Méthodes – Probabilités

✓ Contredire l'indépendance de deux variables aléatoires

Je ne parlerai pas du cas où l'on veut *montrer* l'indépendance de variables aléatoires : il n'y a là rien de spécialement ingénieux à faire, sinon utiliser la définition de l'indépendance... Je m'attarde seulement sur la marche à suivre lorsqu'il faut *infirmer* l'indépendance, parce que dans ce cas vous tombez régulièrement dans un écueil logique (contre lequel on vous met pourtant en garde dès la première semaine de cours de 1re année). À savoir : pour contredire un énoncé devant être universellement vrai (présence d'un « $\forall$ »), il suffit de trouver UN SEUL contre-exemple.

Dans le cas de l'indépendance de variables aléatoires X et Y, donc, pour contredire l'affirmation : « $\forall (x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $\mathrm{P}(X=x, Y=y) = \mathrm{P}(X=x)\mathrm{P}(Y=y)$ », c'est une TRÈS MAUVAISE approche de tenter de montrer : « $\forall (x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $\mathrm{P}(X=x, Y=y) \neq \mathrm{P}(X=x)\mathrm{P}(Y=y)$ ». Vous n'y parviendrez pas, ou seulement avec beaucoup de peine, si les lois de X et Y font intervenir des quantités compliquées (coefficients binomiaux en général). Pire : ce peut être faux.

Ce que vous devez faire. Vous devez trouver UN choix PARTICULIER de x et y tels que l'on ait : $\mathrm{P}(X=x, Y=y) \neq \mathrm{P}(X=x)\mathrm{P}(Y=y)$. Puisque vous avez le choix, vous pouvez prendre des valeurs de x et y qui facilitent vos calculs (par exemple : x ou y égal à 0, ou 1, etc.).

Mieux encore : quand c'est possible, prenez des valeurs de x et y tels que $(X=x, Y=y)$ soit CLAIREMENT un évènement impossible, tandis que $(X=x)$ et $(Y=y)$ ne le sont pas. Dans ce cas, l'égalité $\mathrm{P}(X=x, Y=y) = \mathrm{P}(X=x)\mathrm{P}(Y=y)$ est nécessairement impossible, puisque le membre de gauche est nul et pas celui de membre de droite : vous n'avez même pas besoin de vous fatiguer à simplifier le produit pour obtenir le résultat souhaité !

Exemple 1. On lance une pièce équilibrée une infinité de fois, et on appelle X le rang du premier pile, Y le rang du second pile. Montrons que X et Y ne sont pas indépendantes (chose intuitive) : pour cela, on note qu'on a nécessairement $X < Y$, donc $(X=x, Y=y)$ est impossible dès qu'on prend $x \geqslant y$. Prenons par exemple $x=y=2$ pour faciliter les calculs. On a $\mathrm{P}(X=2, Y=2) = 0$ pour la raison qu'on vient de donner. Or $X \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$, donc $\mathrm{P}(X=2) = \frac{1}{2^2} \neq 0$, et un calcul facile (que nous vous laissons effectuer...) montre que : $\mathrm{P}(Y=2) = \frac{1}{2^2} \neq 0$, donc $\mathrm{P}(X=2)\mathrm{P}(Y=2) \neq 0 = \mathrm{P}(X=2, Y=2)$ et on en déduit que X et Y ne sont pas indépendantes.

Demandez-vous pourquoi je n'ai pas pris $x=y=1$ pour encore plus simplifier les calculs.

Si l'on n'est pas dans le cas très facile où l'évènement $(X=x, Y=y)$ est impossible pour de bonnes valeurs de x et y, vous aurez en général à calculer $\mathrm{P}(X=x, Y=y)$ *via* un conditionnement (vous ne pouvez pas utiliser l'indépendance de X et Y, vu que vous voulez justement la contredire). C'est-à-dire, en écrivant :

$$\mathrm{P}(X=x, Y=y) = \mathrm{P}(X=x)\mathrm{P}_{(X=x)}(Y=y), \quad \text{ou :} \quad \mathrm{P}(X=x, Y=y) = \mathrm{P}(Y=y)\mathrm{P}_{(Y=y)}(X=x).$$

S'il y a davantage que deux variables aléatoires, vous utilisez la formule des probabilités composées.

Le choix du conditionnement dépend de la situation : l'ordre logique ou chronologique de l'expérience permet tantôt de calculer plus facilement la loi conditionnelle de Y (sachant que $X = \cdots$), tantôt l'inverse.

Exemple 2. On lance une pièce équilibrée une infinité de fois, et on appelle X le rang du premier pile à être suivi d'un autre pile, tandis que Y est le rang du premier pile à être suivi de *deux* autres piles. Montrons que X et Y ne sont pas indépendantes (pourquoi est-ce intuitif ?). Pour cela, on note qu'on a facilement : $\mathrm{P}(X=1, Y=1) = \mathrm{P}(X=1)\mathrm{P}_{(X=1)}(Y=1) = \frac{1}{2^2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^3}$, tandis que : $\mathrm{P}(X=1) = \frac{1}{2^2}$, et : $\mathrm{P}(Y=1) = \frac{1}{2^3}$. Ainsi : $\mathrm{P}(X=1)\mathrm{P}(Y=1) = \frac{1}{2^5} \neq \mathrm{P}(X=1, Y=1)$, donc X et Y ne sont pas indépendantes.

Exercice 1. Vérifier les calculs de probabilité qui ont été omis dans cet exemple. On peut procéder autrement, si l'on remarque que : $(X=1, Y=1) = (Y=1)$.