Méthodes – Probabilités

Comment calculer une probabilité

On rappelle les différentes formules du cours servant à calculer des probabilités dans la figure 1.

Figure 1 – Formules de calculs de probabilités (rappels).

Définitions, propriétés des probabilités

$$\mathrm{P}(\emptyset) = 0, \quad \mathrm{P}(\Omega) = 1, \quad \mathrm{P}\left(\bar{A}\right) = 1 - \mathrm{P}(A), \quad \mathrm{P}(A \setminus B) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A \cap B),$$

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B), \quad A \subseteq B \Rightarrow \mathrm{P}(A) \leqslant \mathrm{P}(B).$$

Définition d'une probabilité conditionnelle : $\mathrm{P}_B(A) = \dfrac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$ (si $\mathrm{P}(B) > 0$).

Définition d'évènements indépendants : $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$.

Formules utiles

— Probabilités composées : $\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}_{A_1}(A_2)\cdots\mathrm{P}_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n)$.

— Probabilités totales : $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ système complet d'évènements $\Rightarrow \mathrm{P}(B) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(A_n)\mathrm{P}_{A_n}(B)$.

— Continuité croissante : $\forall n \in \mathbb{N},\ A_n \subseteq A_{n+1} \Rightarrow \mathrm{P}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{P}(A_n)$.

— Continuité décroissante : $\forall n \in \mathbb{N},\ A_{n+1} \subseteq A_n \Rightarrow \mathrm{P}\left(\bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{P}(A_n)$.

— Formule de Bayes : $\mathrm{P}_B(A) = \mathrm{P}_A(B)\frac{\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(B)}$.

Toute formule n'apparaissant pas dans ce formulaire est en général fautive et pure invention de votre part. Les enjeux de ce chapitre sont d'apprendre à les utiliser pour calculer toutes les probabilités rigoureusement. Si on ne le fait pas, en se contentant uniquement de l'intuition, alors ce chapitre ne vous apprendra rien. Vous savez d'expérience que les probabilités sont pleines de vérités contre-intuitives, et ces formules sont justement là pour fournir le cadre rigoureux évitant les écueils de l'intuition.

Il y a donc deux difficultés à surmonter dans ce chapitre :

— comment écrire correctement, d'un point de vue ensembliste, les évènements dont nous cherchons à calculer les probabilités (s'agit-il d'intersections ? de réunions ? si oui, de quels évènements ? s'il y a plusieurs façons d'écrire un évènement comme intersections et réunions d'autres évènements, comment les choisir pour que ce soit pertinent ?)

— une fois que nous avons reconnu une intersection ou une réunion d'évènements, il y a plusieurs formules semblant s'appliquer au calcul de sa probabilité : comment choisir la plus pertinente ?

Le deuxième point me paraît être le plus problématique pour vous. Vous êtes nombreux, une fois que vous avez écrit un évènement correctement comme réunions et intersections d'évènements plus simples, à ne pas utiliser cette écriture, et à calculer « à l'intuition » la probabilité demandée. C'est là que vous vous trompez la plupart du temps. Vous passez à côté de l'intérêt de l'écriture ensembliste comme réunion et intersection d'évènements plus simples : elle est là pour vous aider à ne pas vous tromper, justement !

J'ai souvent vu le raisonnement suivant (dont la conclusion est certes correcte) :

Deux joueurs A et B lancent une pièce truquée à tour de rôle (en commençant par A), et la partie s'arrête dès qu'un joueur fait « pile » : le joueur ayant fait pile a alors gagné. La probabilité de faire « pile » est égale à p. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on cherche la probabilité que A gagne à son n^{e} lancer. Si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $\mathrm{F}_{\mathrm{A},k}$ l'évènement : « le joueur A fait face au k^{e} lancer » (notation analogue pour l'évènement « le joueur B fait face au k^{e} lancer »), alors la probabilité recherchée est :

$$\mathrm{P}(\mathrm{F}_{\mathrm{A},1} \cap \mathrm{F}_{\mathrm{B},1} \cap \mathrm{F}_{\mathrm{A},2} \cap \mathrm{F}_{\mathrm{B},2} \cap \cdots \cap \mathrm{F}_{\mathrm{A},n-1} \cap \mathrm{F}_{\mathrm{B},n-1} \cap \overline{\mathrm{F}_{\mathrm{A},n}}).$$

Comme A et B ont une probabilité $1-p$ de faire « face » à chaque lancer, et qu'ils le font $n-1$ si l'on veut que l'évènement ci-dessus se réalise, et comme A a une probabilité p de faire « pile » au n^{e} lancer, on a :

$$\mathrm{P}(\mathrm{F}_{\mathrm{A},1} \cap \mathrm{F}_{\mathrm{B},1} \cap \mathrm{F}_{\mathrm{A},2} \cap \mathrm{F}_{\mathrm{B},2} \cap \cdots \cap \mathrm{F}_{\mathrm{A},n-1} \cap \mathrm{F}_{\mathrm{B},n-1} \cap \overline{\mathrm{F}_{\mathrm{A},n}}) = (1-p)^{n-1} \times (1-p)^{n-1} \times p = (1-p)^{2(n-1)}p.$$

Bien que le résultat final soit juste (et puisse, d'ailleurs, se justifier rapidement avec l'usage de variables aléatoires de lois usuelles : comment ?), comment justifiez-vous MATHÉMATIQUEMENT ce raisonnement intuitif ? Et OÙ utilisez-vous le fait que ce soit une intersection d'évènements ?

Ce qui vous effraie est que vous trouvez les formules (rappelées dans la figure 1) compliquées à interpréter, en particulier la formule des probabilités composées à cause de ses nombreux conditionnements. L'objectif des prochaines sections est de vous convaincre qu'utiliser ces formules n'est pas si compliqué qu'il n'y paraît, et de montrer comment identifier les situations où elles sont pertinentes. ← page 1

1 ✓ Formaliser un évènement : intersections, réunions, etc.

Le moyen fondamental de traduire un énoncé concret (écrit en français et non en langage mathématique) en une réunion ou une intersection d'évènements, est entièrement contenu dans les deux principes suivants :

$$(A \cup B) \quad = \quad A \text{ OU } B \text{ se réalise} = \begin{cases} \text{AU MOINS UN des évènements} \\ A \text{ ou } B \text{ se réalise} \end{cases}$$

$$(A \cap B) \quad = \quad A \text{ ET } B \text{ se réalisent tous les deux}$$

En résumé, « ou » = réunion, et « et » = intersection. Cela entraîne les cas particuliers suivants, que vous croiserez souvent.

1.1 Cas particulier fréquent : évènement décrit en une succession d'étapes

Supposons que pour observer un certain évènement A, on passe d'abord par la réalisation d'étapes A_1, A_2, …, A_n (par exemple, si A est obtenu après n lancers d'une pièce ou d'un dé, ou après n tirages dans une urne, etc., et que chaque lancer ou tirage nécessite la vérification d'une condition pour que A se réalise). Alors informellement :

$$A = A_1 \text{ se réalise ET } A_2 \text{ se réalise ET } \ldots \text{ ET } A_n \text{ se réalise.}$$

Formellement, cela se traduit par : $A = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$, d'après le principe donné ci-dessus.

Remarque. Bien sûr, dans un exercice, c'est souvent à VOUS que revient l'initiative de définir les A_i. L'examinateur ne lit pas dans vos pensées et n'est pas tenu de deviner les évènements de votre intersection, si vous ne les définissez pas.

Exemple 1. On lance quatre fois un dé équilibré à six faces (ce qu'on peut modéliser avec l'univers $\Omega = [\![1,6]\!]^4$ muni de la probabilité uniforme), et on se demande la probabilité d'avoir alternativement un nombre pair et un nombre impair. Contentons-nous de la description ensembliste de l'évènement voulu.

Pour cela, si l'on note pour tout $i \in [\![1,4]\!]$ l'évènement P_i : « avoir un nombre pair au i^{e} lancer », et I_i l'évènement : « avoir un nombre impair au i^{e} lancer » (noter que I_i est le contraire de P_i), on veut l'évènement :

$$\begin{gathered} P_1 \text{ se réalise ET } I_2 \text{ se réalise ET } P_3 \text{ se réalise ET } I_4 \text{ se réalise,} \\ \text{OU} \\ I_1 \text{ se réalise ET } P_2 \text{ se réalise ET } I_3 \text{ se réalise ET } P_4 \text{ se réalise.} \end{gathered}$$

La première ligne ci-dessus s'écrit ensemblistement : $P_1 \cap I_2 \cap P_3 \cap I_4$. Le second s'écrit : $I_1 \cap P_2 \cap I_3 \cap P_4$. On veut que l'un OU l'autre se réalise. Donc l'évènement dont on cherche la probabilité est :

$$(P_1 \cap I_2 \cap P_3 \cap I_4) \cup (I_1 \cap P_2 \cap I_3 \cap P_4) \quad \text{(le parenthésage est important).}$$

Exercice 1. En déduire la probabilité demandée.

1.2 Cas particulier fréquent : évènement qu'on veut observer au moins une fois

On répète une certaine expérience n fois, et on se demande la probabilité qu'un certain évènement A soit observé AU MOINS UNE FOIS en ces n expériences. Pour cela, si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ l'on note A_i l'évènement : « observer A à la i^{e} expérience », alors on note qu'observer au moins une fois A équivaut à :

$$A_1 \text{ se réalise OU } A_2 \text{ se réalise OU } \ldots \text{ OU } A_n \text{ se réalise.}$$

Donc l'évènement étudié est : $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$.

Noter que l'union n'est pas disjointe *a priori* : on pourrait observer plusieurs fois l'évènement A.

Dit plus intelligemment : A est observé au moins une fois si et seulement s'il existe (au moins un) $i \in [\![1, n]\!]$ tel que A_i se réalise. Interprété ainsi, on arrive plus facilement à généraliser la réflexion au cas suivant : il arrive qu'on répète une expérience un nombre infini de fois (au moins en esprit). Dans ce cas, dire que A est observé au moins une fois signifie qu'il existe (au moins un) $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que A_n se réalise. Donc l'évènement « observer au moins une fois A » est :

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n.$$

Cette fois-ci l'entier n peut être arbitrairement grand, qui sait ? vu qu'il y a une infinité d'itérations de l'expérience, on ne peut pas se contenter de considérer tous les cas jusqu'à un entier fixé. C'est pourquoi la réunion va jusqu'à l'infini.

Remarque. Bien sûr, dans un exercice, c'est souvent à VOUS que revient l'initiative de définir les A_i. L'examinateur ne lit pas dans vos pensées et n'est pas tenu de deviner les évènements de votre réunion, si vous ne les définissez pas.

1.3 Cas particulier fréquent : évènement qu'on veut observer plusieurs fois (éventuellement une infinité)

On répète une certaine expérience n fois, et on se demande la probabilité qu'un certain évènement A soit observé À CHACUNE de ces n expériences. Pour cela, si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ l'on note A_i l'évènement : « observer A à la i^{e} expérience », alors on note qu'observer systématiquement A équivaut à :

$$A_1 \text{ se réalise ET } A_2 \text{ se réalise ET } \ldots \text{ ET } A_n \text{ se réalise.}$$

Donc l'évènement étudié est : $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$.

Dit plus intelligemment : A est observé à chaque expérience si et seulement si, pour TOUT $i \in [\![1, n]\!]$, l'évènement A_i se réalise. Interprété ainsi, on arrive plus facilement à généraliser la réflexion au cas suivant : il arrive qu'on répète une expérience un nombre infini de fois (au moins en esprit). Dans ce cas, dire que A

est observé à chaque fois signifie que pour TOUT $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ l'évènement A_n se réalise. Donc l'évènement « observer systématiquement A en une infinité d'expériences » est :

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n.$$

Cette fois-ci l'entier n peut être arbitrairement grand, qui sait ? vu qu'il y a une infinité d'itérations de l'expérience, on ne peut pas se contenter de considérer tous les cas jusqu'à un entier fixé. C'est pourquoi l'intersection va jusqu'à l'infini.

Remarque. Bien sûr, dans un exercice, c'est souvent à VOUS que revient l'initiative de définir les A_i. L'examinateur ne lit pas dans vos pensées et n'est pas tenu de deviner les évènements de votre intersection, si vous ne les définissez pas.

Mise en garde 1. À manipuler les variables n comme des quantités abstraites ou symboliques, sous prétexte qu'elles sont notées avec des lettres et non des entiers explicites, vous faites très souvent les bêtises suivantes et je vous somme d'y prendre garde :

Si l'on répète une infinité de fois une expérience, que A est l'évènement : « observer au moins une fois tel phénomène », et que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ on définit A_n comme l'évènement : « on observe tel phénomène à la n^e expérience », alors A N'EST PAS LA RÉUNION SUIVANTE : $A_1 \cup \cdots \cup A_n$.
De même, si A est l'évènement : « observer systématiquement la réalisation de tel phénomène », alors IL EST TOTALEMENT FAUX D'ÉCRIRE : $A = A_1 \cap \cdots \cap A_n$.
En effet, dans ces deux cas, vous ne décrivez pas A, mais l'évènement : « observer au moins une fois tel phénomène entre la première et la n^e expérience » (dans le cas de la réunion), et l'évènement : « observer tel phénomène à chacune des n premières expériences » dans le cas de l'intersection, où n est un entier donné (qui, d'ailleurs, N'EST MÊME PAS DANS LA DÉFINITION DE A, donc mal défini !).
Les descriptions correctes sont respectivement, pour la réunion : $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots$ (ne s'arrête jamais), et pour l'intersection : $A = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots$ (ne s'arrête jamais).
Par contre, si vous ne répétez pas une infinité de fois l'expérience, mais un nombre n de fois (fini, donc), alors les descriptions ci-dessus sont correctes.

Il vous arrive aussi de faire l'erreur exactement inverse : écrire $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ alors qu'il n'intervient qu'un nombre fini possible d'évènements. Faites la différence entre une réunion finie, et une réunion infinie ! De même pour les intersections. Le seul moyen de ne pas se tromper est de prendre le temps de se demander : combien peut-il y avoir d'expériences en tout ? à laquelle veut-on observer tel phénomène ? Ce sont les entiers qui répondent à ces questions qui indexent les réunions ou intersections étudiées. Si les entiers à convenir peuvent être arbitrairement grands, alors la réunion ou intersection étudiée est indexée par un ensemble infini.

1.4 Cas extrêmement fréquent : évènement décrit avec des variables aléatoires

Dans tous les domaines de ce chapitre, retenez ce conseil important :

Dans la mesure du possible, définissez les évènements étudiés à l'aide de variables aléatoires réelles discrètes.

C'est très souvent faisable : une variable aléatoire n'est rien d'autre qu'une grandeur (un nombre) mesurée dans une expérience aléatoire. Or, en sciences, à peu près tout peut être exprimé avec des grandeurs !

C'est important non seulement parce que vous pouvez gagner un temps significatif s'il y a des variables aléatoires de lois usuelles (et c'est souvent le cas), mais aussi parce qu'elles facilitent la description des évènements. Rappelons que si X est une variable aléatoire réelle discrète, alors :

$$(X \in U) = \bigcup_{x \in U} (X = x),$$

où l'union fait intervenir des évènements incompatibles : cela fournit « gratuitement » une écriture de l'évènement $(X \in U)$ à l'aide d'évènements plus simples ! (dont on a les probabilités si la loi de X est connue)

Exemple 2. Si X est une variable aléatoire réelle discrète, disons à valeurs dans $\mathbb{N}$, et qu'on se demande quelle est la probabilité de l'évènement $(X \geqslant k)$ (où k est un entier naturel fixé), alors on note qu'écrit INFORMELLEMENT au brouillon, on a :

$$(X \geqslant k) = (X = k) \text{ OU } (X = k+1) \text{ OU } (X = k+2) \text{ OU } (X = k+3) \text{ OU } (X = k+4) \text{ OU } \dots$$

et donc, FORMELLEMENT :

$$(X \geqslant k) = (X = k) \cup (X = k+1) \cup (X = k+2) \cup (X = k+3) \cup (X = k+4) \cup \cdots = \bigcup_{n=k}^{+\infty} (X = n).$$

la réunion va alors de $n = k$ à l'infini, parce que $(X \geqslant k)$ est vérifié dès que $(X = n)$ *pour n'importe quel entier n supérieur ou égal à k*. Dit moins formellement : dans notre réunion écrite avec des points de suspension, $(X = n)$ apparaît pour n'importe quelle valeur de n entre k et l'infini. Alors, par σ-additivité (les évènements $(X = n)$, pour $n \geqslant k$, sont toujours incompatibles pour une variable aléatoire X) :

$$\boxed{\mathrm{P}(X \geqslant k) = \mathrm{P}\left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} (X = n)\right) = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathrm{P}(X = n).}$$

Si, par contre, on voulait décrire l'évènement : $(a \leqslant X \leqslant b)$, où a et b sont des entiers naturels, alors on écrirait d'abord INFORMELLEMENT, au brouillon :

$$(a \leqslant X \leqslant b) = (X = a) \text{ OU } (X = a+1) \text{ OU} \dots \text{ OU } (X = b-1) \text{ OU } (X = b),$$

et donc, FORMELLEMENT : $(a \leqslant X \leqslant b) = (X = a) \cup (X = a+1) \cup \cdots \cup (X = b-1) \cup (X = b) = \bigcup_{n=a}^{b} (X = n)$. Là encore, la σ-additivité permettrait d'en déduire la probabilité de $(a \leqslant X \leqslant b)$.

Exemple 3. On lance un dé à 20 faces – c'est-à-dire un icosaèdre – (disons non équilibré pour que la réponse ne soit pas triviale ; je ne donne pas les probabilités de tomber sur chaque face car là n'est pas le sujet). On se demande la probabilité que le résultat soit un nombre pair. Notons A cet évènement.

Pour correctement formaliser le problème, et suivant le conseil de définir des variables aléatoires dès que possible, soit X la variable aléatoire donnant le résultat du dé. On a, d'abord informellement :

$$A = (X \text{ pair}) = (X = 2) \text{ OU } (X = 4) \text{ OU } (X = 6) \text{ OU} \cdots \text{ OU } (X = 20)$$

et donc, formellement : $A = (X \text{ pair}) = (X = 2) \cup (X = 4) \cup (X = 6) \cup \cdots \cup (X = 20) = \bigcup_{k=1}^{10} (X = 2k)$, parce qu'un entier pair entre 1 et 20 s'écrit $2k$ avec k entre 1 et 10. Alors, par σ-additivité :

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}\left(\bigcup_{k=1}^{10} (X = 2k)\right) = \sum_{k=1}^{10} \mathrm{P}(X = 2k).$$

Exercice 2. Des joueurs A et B s'affrontent dans un jeu de pile ou face. Chaque joueur lance une pièce, et gagne s'il fait pile (si les deux joueurs font pile, il y a match nul et on rejoue). Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on note A_n l'évènement : « le joueur A fait pile à la n^{e} manche » et B_n l'évènement : « le joueur B fait pile à la n^{e} manche ».

Écrire correctement les évènements :

1. Le joueur A remporte la partie avant la cinquième manche.
2. Les joueurs A et B font match nul jusqu'à la huitième manche.
3. Les joueurs A et B font match nul jusqu'à la n^{e} manche.
4. Les joueurs A et B font match nul jusqu'à la fin des temps.
5. Le joueur A remporte la partie.
6. Le joueur A remporte la partie après un nombre pair de manches.

Bien sûr, on peut définir les évènements en jeu plus synthétiquement en recourant aux variables aléatoires donnant le rang du premier pile pour A et B respectivement : l'intérêt est qu'elles suivent une loi géométrique. Refaire l'exercice en les utilisant.

Exercice 3. Deux joueurs A et B lancent à tour de rôle une pièce. Le joueur A commence, et la partie s'achève dès qu'un joueur obtient « face ».

Écrire correctement, à l'aide d'intersections d'évènements simples :

1. Le joueur A gagne lors de son n^{e} lancer.
2. Le joueur B gagne lors de son n^{e} lancer.
3. Le joueur A gagne.
4. Le joueur B gagne.
5. Le jeu ne s'arrête jamais.

Exercice 4. On lance une pièce une infinité de fois. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on note A_n l'évènement : « la pièce tombe sur pile au n^{e} lancer ». Écrire, à l'aide des évènements de la famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

1. On obtient au moins une fois pile dans cette série infinie de lancers.
2. On n'obtient jamais pile dans cette série infinie de lancers.
3. On obtient systématiquement pile dans cette série infinie de lancers.
4. On obtient alternativement pile et face dans cette série infinie de lancers.
5. Au moins une fois, dans cette série infinie de lancers, on obtient deux piles consécutifs.

2 ✓ Calculer la probabilité d'une réunion d'évènements

Vous avez affaire à la probabilité d'une **réunion** d'évènements lorsque vous devez considérer la probabilité qu'il se produit AU MOINS UNE des issues parmi une liste d'issues possibles.

Pour calculer la probabilité d'une réunion d'évènements, demandez-vous si :

— ces évènements sont **incompatibles** (c'est-à-dire : peuvent-ils ou non se produire simultanément ?) ;

— ces évènements forment une **suite croissante** (si l'un se réalise, est-ce que les suivants aussi ?) ;

— ces évènements sont **indépendants** (est-ce que la réalisation de l'un influe sur la probabilité de réalisation des autres ?) ;

— ces évènements ne sont que deux, et la réalisation de l'un conditionne la réalisation de l'autre.

Selon les cas de figure, voici comment en déduire la probabilité d'une réunion :

— si les évènements de la famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont **incompatibles** deux à deux, alors par σ-additivité :

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(A_n)\ ;$$

— si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'évènements **croissante**, alors d'après le théorème de continuité croissante :

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(A_n)\ ;$$

— si $(A_1, \ldots, A_n)$ est une famille d'évènements **indépendants**, alors par passage au complémentaire et définition de l'indépendance :

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - \mathrm{P}\left(\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}\right) = 1 - \mathrm{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}(\overline{A_i}) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - \mathrm{P}(A_i)) \ ;$$

et on peut généraliser cette formule à une famille infinie quitte à passer à la limite ensuite (grâce au théorème de continuité croissante) ;

— si A et B sont deux évènements ne vérifiant rien de tout cela, alors d'après la formule de Moivre :

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B) \ .$$

Cette formule est utile si vous savez calculer $\mathrm{P}(A \cap B)$ grâce à un conditionnement : $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}_A(B)$, ou si $A \cap B$ admet une description plus simple que $A \cup B$.
Par exemple, si on tire un nombre au hasard entre 1 et 60, qu'on prend A l'évènement « être un multiple de 3 » et B l'évènement « être un multiple de 2 », alors $A \cup B$: « être un multiple de 3 ou 2 » est plus délicat à décrire rapidement (attention à ne pas compter les doublons, lorsqu'on énumère les multiples de 3, puis les multiples de 2 !) que l'évènement $A \cap B$: « être un multiple de 3 ET 2 », c'est-à-dire : « être un multiple de 6 » (on voit alors immédiatement qu'il y en a dix entre 1 et 60).
Une raison pour laquelle $A \cap B$ est souvent plus simple à déterminer est que c'est un ensemble plus petit que $A \cup B$, A et B.

Il est très important de souligner qu'en général, **vous savez dès le début dans quel cas de figure vous êtes**, et je dirais même que vous avez modélisé le problème et choisi les évènements de la réunion de sorte à vous placer sciemment dans ces contextes favorables :

— on a naturellement des évènements **incompatibles** lorsque :
  — X est une variable aléatoire et qu'on prend $A_n = (X = x_n)$; plus généralement, on rappelle que :

$$(X \in U) = \bigcup_{x \in U} (X = x),$$

  et tous les $(X = x)$ sont incompatibles (on illustre ce type d'évènements dans la section 1) ; ← page 2
  — les A_n forment l'ensemble des issues possibles d'une expérience, par exemple :

  A_n : « avoir le (premier) succès à la n^{e} itération de l'expérience ».

— on a naturellement une suite d'évènements **croissante** lorsqu'on répète une certaine expérience un nombre éventuellement infini de fois, et qu'on cherche à étudier les évènements :
« l'expérience finit par se terminer (sous condition) », ou :
« on observe au moins une fois tel phénomène dans cette infinité d'expériences », etc. ;
il suffit en effet de prendre pour A_n :

A_n : « la partie s'est terminée en moins de n itérations de l'expérience »,

A_n : « on observe au moins une fois tel phénomène dans les n premières itérations de l'expérience »,

où nous vous laissons vérifier la monotonie ;

— on a des évènements **indépendants** lorsque qu'on répète une expérience plusieurs fois (lancer un dé, par exemple) sans que le résultat d'une expérience n'influe sur les suivantes ; si A_n désigne un évènement concernant la n^{e} itération de l'expérience (et uniquement celle-ci), alors en général les

A_n forment une famille d'évènements indépendants (noter que c'est souvent une hypothèse donnée dans l'énoncé).

On n'avance donc pas à l'aveugle et nous sommes méthodiques.

Ces conseils sont récapitulés dans la figure 2.

FIGURE 2 – Cas de la probabilité d'une réunion.

σ-ADDITIVITÉ (évènements incompatibles)

Si les A_n sont INCOMPATIBLES (synonyme : DISJOINTS), alors : $\mathrm{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(A_n)$.
Cadre d'application. Il faut que les évènements A_i ne puissent pas se produire simultanément.
Exemple fréquent. Les A_n sont toutes les issues possibles d'une expérience. Plus généralement : A_n est de la forme $(X = x_n)$ avec X une variable aléatoire réelle discrète.

THÉORÈME DE CONTINUITÉ CROISSANTE (suite croissante d'évènements)

Continuité croissante : $\forall n \in \mathbb{N},\ A_n \subseteq A_{n+1} \Rightarrow \mathrm{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(A_n)$.
Sans hypothèse : $\mathrm{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{N\to+\infty} \mathrm{P}\left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right)$.
Cadre d'application. C'est le contraire ici : si A_n se réalise, alors tous les suivants aussi.
Exemple fréquent. L'évènement A_n est l'observation d'AU MOINS un succès en n itérations d'une expérience.

PASSAGE AU COMPLÉMENTAIRE (évènements indépendants)

$\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - \mathrm{P}\left(\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}\right) = 1 - \mathrm{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right)$.
Cadre d'application. En général, on gagne à passer aux intersections si l'on sait que les évènements sont INDÉPENDANTS. Dans ce cas, on peut écrire : $\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}\left(\overline{A_i}\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - \mathrm{P}(A_i))$.
Si la réunion est infinie : d'abord écrire la réunion finie, puis utiliser le théorème de continuité croissante.
Exemple fréquent. Les évènements A_i sont de la forme $(X_i \in U_i)$ où les X_i sont des variables aléatoires indépendantes par hypothèse (résultats de différents dés ou pièces, par exemple).

LA FORMULE DE MOIVRE

$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$.
Cadre d'application. Vous ne la connaissez que dans le cas d'une réunion de deux évènements, ce qui limite déjà son cadre d'utilisation. Il n'est intéressant d'utiliser cette formule ici que si vous connaissez $\mathrm{P}(A\cap B)$, sinon vous êtes dans une impasse. C'est possible si vous connaissez la probabilité conditionnelle de B sachant A (ou de A sachant B), ou si A et B sont indépendants.
Exemple fréquent. Les évènements A et B sont de la forme $A = (X \in U)$ et $B = (Y \in V)$, où X et Y sont deux variables aléatoires dont on connaît soit l'indépendance, soit la loi conjointe. On rencontre aussi le cas où $A = (X \in U)$ et $B = (X \in V)$, et cela ramène le calcul de $\mathrm{P}(X \in U \cup V)$ à celui de $\mathrm{P}(X \in U \cap V)$: intéressant si $U \cap V$ est plus simple à décrire.

3 ✓ Calculer la probabilité d'une intersection d'évènements

Vous avez affaire à la probabilité d'une **intersection** d'évènements lorsque vous devez considérer la probabilité que se réalisent TOUS les évènements d'une liste. C'est en particulier le cas lorsque, pour qu'il se réalise un certain évènement après n étapes, il faut d'abord que se réalisent des évènements $A_1, \ldots, A_n$ à chaque étape.

Pour calculer la probabilité d'une intersection d'évènements, demandez-vous si :

— ces évènements sont **indépendants** (c'est-à-dire : la réalisation de l'un influe-t-elle sur les autres ?) ;

— ces évènements forment une **suite décroissante** (si l'un ne se réalise pas, est-ce que les suivants non plus ? si l'un se réalise, est-ce que les précédents sont aussi réalisés nécessairement ?) ;

— ces évènements **suivent un ordre logique ou chronologique naturel** ;

— ces évènements ne sont que deux, et la **non réalisation** simultanée des deux évènements est plus facile à étudier que leur réalisation simultanée.

Dans le cas d'évènements incompatibles, l'intersection est un évènement impossible et sa probabilité est trivialement nulle.

Selon les cas de figure, voici comment en déduire la probabilité d'une intersection :

— si $(A_1, \ldots, A_n)$ est une famille d'évènements **indépendants**, alors par définition de l'indépendance :

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i)\,;$$

et on peut généraliser cette formule à une famille infinie quitte à passer à la limite ensuite (grâce au théorème de continuité décroissante) ;

— si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'évènements **décroissante**, alors d'après le théorème de continuité décroissante :

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(A_n)\ ;$$

— si les évènements de la famille $(\overline{A_n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont **incompatibles** deux à deux (attention, la propriété n'est pas sur la famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mais sur les complémentaires !), alors par passage au complémentaire et σ-additivité on a :

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1 - \mathrm{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n}\right) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(\overline{A_n}) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty}(1 - \mathrm{P}(A_n))\ ;$$

— si $(A_1, \ldots, A_n)$ correspond naturellement à une suite d'étapes, dans la réalisation logique ou chronologique d'un évènement, alors d'après la formule des probabilités composées :

$$\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}_{A_1}(A_2)\cdots\mathrm{P}_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n).$$

Il est très important de souligner qu'en général, **vous savez dès le début dans quel cas de figure vous êtes**, et je dirais même que vous avez modélisé le problème et choisi les évènements d'intersection de sorte à vous placer sciemment dans ces contextes favorables. Nous avons déjà commenté le cas des évènements incompatibles et indépendants dans les sections 1 et 2. Nous avons aussi mentionné, dans la section 1, le cas d'un évènement obtenu par succession d'étapes. De plus : ← page 2 ← page 6

— on a naturellement une suite d'évènements **décroissante** lorsqu'on répète une certaine expérience un nombre éventuellement infini de fois, et qu'on cherche à étudier les évènements :

« l'expérience ne se termine jamais (sous condition) », ou :

« on observe systématiquement tel phénomène dans cette infinité d'expériences », etc. ;

il suffit en effet de prendre pour A_n :

A_n : « la condition requise pour achever l'expérience ne s'est jamais vérifiée en les n premières itérations »,

---

A_n : « on observe systématiquement tel phénomène dans les n premières itérations de l'expérience »,

où nous vous laissons vérifier la monotonie ;

— $\boxed{\text{on a naturellement une famille d'évènements } (\overline{A_n})_{n\in\mathbb{N}} \textbf{ incompatibles}}$ lorsqu'à chaque fois qu'on fait l'expérience, dans un couple d'évènements (A_{n_1}, A_{n_2}), il y a toujours au moins un des deux qui se réalise, par exemple :

On répète une infinité de fois une expérience, et A_n est l'évènement :
« il existe un résultat de cette suite d'expériences qui est supérieur ou égal au résultat de la n^{e} expérience » ;

On n'avance donc pas à l'aveugle et nous sommes méthodiques.

Ces conseils sont récapitulés dans la figure 3.

Remarque. On pourrait se demander pourquoi je n'inclus pas le cas d'une famille (finie) et monotone d'évènements. En effet, si $A_n \subseteq A_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq A_1$, alors $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k = A_n$ (pour vous en convaincre, faites un dessin !), et donc : $\mathrm{P}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k\right) = \mathrm{P}(A_n)$. Résultat analogue si les inclusions sont dans l'autre ordre, en remplaçant $\mathrm{P}(A_n)$ par $\mathrm{P}(A_1)$. Cela semble bien plus simple que de calculer la probabilité d'une inclusion de n évènements !

La raison pour laquelle je ne mentionne pas le cas d'une famille finie et monotone, est que cette simplicité est trompeuse : il n'en est rien en général. En effet, lorsqu'on est dans ce type de configuration, l'égalité $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k = A_n$ est souvent la traduction du fait que pour accomplir A_n, il faut passer par des étapes A_k. En regardant comment, un à un, on obtient A_1, puis A_2, etc. (en regardant la probabilité de réalisation à chaque étape), puis A_n, on se ramène à n calculs de probabilités plus simples (implicitement : on utilise la formule des probabilités composées). En regardant A_n directement au lieu de l'intersection, on perd cette fragmentation en étapes simples.

4 ✓ Synthèse : conseils pour entamer un exercice, et passer de l'intuition à la démonstration

En présence d'un exercice contenant un énoncé en français, et qu'on doit traduire mathématiquement pour en déduire des probabilités, je vous recommande de suivre les conseils suivants, qui sont éclairés par les conseils des sections précédentes.

1. Identifier, à l'aide de l'énoncé, les différents évènements et probabilités en jeu (ne pas oublier les conditionnements éventuels).
2. Écrire en terme d'intersections et d'unions les relations entre les évènements, si possible. Si l'énoncé s'y prête, identifier à l'aide de mots la variable aléatoire à considérer, et dans ce cas :
   (a) Identifier correctement la loi de probabilité qu'elle suit en essayant de reconnaître dans le problème une situation type (Bernoulli, binomiale, géométrique... d'abord préciser les valeurs possibles que peut prendre cette variable, pour exclure des possibilités), et déterminer les paramètres de la loi. Attention au fait que certaines variables aléatoires ne suivent des lois usuelles que si l'on rajoute un conditionnement (pour fixer un paramètre) : voir plus bas.
   (b) Utiliser les formules théoriques pour déterminer les probabilités demandées, en suivant les conseils des sections précédentes.

FIGURE 3 – Cas de la probabilité d'une intersection.

INDÉPENDANCE

Si les A_i sont INDÉPENDANTS, alors : $\mathrm{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A_i)$.
Cadre d'application. Comme l'indique l'hypothèse : il faut l'indépendance. VEUILLEZ NE PAS L'INVENTER SI ELLE N'EST PAS VÉRIFIÉE. Si l'intersection est infinie : d'abord écrire l'intersection finie, puis utiliser le théorème de continuité décroissante.
Exemple fréquent. Les évènements A_i sont de la forme $(X_i \in U_i)$ où les X_i sont des variables aléatoires indépendantes par hypothèse (résultats de différents dés ou pièces, par exemple).

THÉORÈME DE CONTINUITÉ DÉCROISSANTE (suite décroissante d'évènements)

Continuité décroissante : $\forall n \in \mathbb{N},\ A_{n+1} \subseteq A_n \Rightarrow \mathrm{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(A_n)$.
Sans hypothèse : $\mathrm{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{N\to+\infty} \mathrm{P}\left(\bigcap_{n=0}^{N} A_n\right)$.
Cadre d'application. Si A_n se réalise, alors tous les précédents se sont aussi réalisés (ce sont des évènements de moins en moins probables).
Exemple fréquent. L'évènement A_n est l'observation SYSTÉMATIQUE d'un succès en n itérations d'une expérience.

PASSAGE AU COMPLÉMENTAIRE (complémentaires incompatibles)

$\mathrm{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1 - \mathrm{P}\left(\overline{\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n}\right) = 1 - \mathrm{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n}\right)$.
Cadre d'application. On n'y gagne à passer aux intersections que si l'on sait que les évènements complémentaires $\overline{A_n}$ sont DISJOINTS. Dans ce cas, on peut écrire : $\mathrm{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} (1 - \mathrm{P}(A_n))$.
Exemple fréquent. Quand on considère deux évènements de la famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ il y en a toujours l'un des deux qui se réalise.

FORMULE DES PROBABILITÉS COMPOSÉES (succession logique ou chronologique d'étapes)

Probabilités composées : $\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}_{A_1}(A_2) \cdots \mathrm{P}_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n)$.
Cadre d'application. Elle remplace la formule en cas de non indépendance. Elle n'est pas pertinente s'il n'y a pas une chronologie claire : les évènements doivent suivre un certain ordre de réalisation (logique ou chronologique).
Exemple fréquent. Si un évènement se décompose en n étapes (n tirages de boules sans remise, etc.).

Plus généralement :

3. À l'aide des méthodes données dans les sections 2 et 3, ramener les probabilités à calculer à celles connues, en repérant entre autres les schémas classiques suivants : ← page 6 ← page 9
   — une succession logique ou chronologique d'étapes simples ; (penser à la formule des probabilités composées)
   — des évènements de la forme $(X \in U)$ où X est une variable aléatoire (penser à la σ-additivité) ;
   — des évènements de la forme « avoir au moins un succès en une infinité d'expériences » ou « avoir toujours un succès en une infinité d'expériences » (penser au théorème de continuité monotone) ;
   — une variable aléatoire qui serait usuelle si on FIXAIT la valeur d'une autre variable aléatoire (penser à la formule des probabilités totales : voir le document *Deux applications fréquentes de la formule des probabilités totales* et plus spécifiquement la section *Lois marginales et lois conjointes.*

Ce n'est pas exhaustif : référez-vous à toute la discussion qui précède.

4. Penser au besoin aux formules de dénombrement, surtout en cas de loi uniforme.

Notez bien que la formule des probabilités totales et la formule de Bayes n'ont pas été mentionnées dans les sections précédentes. Et pour cause : elles ne s'utilisent pas lorsque nous avons une réunion ou intersection d'évènements. Leur cadre d'application n'est donc pas le même :

— la formule des probabilités totales s'obtient pour passer de probabilités conditionnelles (« avec contraintes supplémentaires ») à une probabilité « tout court », et formalise le principe d'arbre de probabilités : les applications les plus fréquentes de cette formule sont dans la section *Deux applications fréquentes de la formule des probabilités totales*, mais plus généralement elle permet d'exprimer une probabilité $\mathrm{P}(B)$ **quand on sait quelle est la probabilité qu'elle découle de chaque cause possible** (l'ensemble des causes forme alors un système complet d'évènements) : on exprime $\mathrm{P}(B)$ en fonction des probabilités conditionnelles mieux connues $\mathrm{P}_{A_i}(B)$ où les A_i sont les différentes « causes » possibles ;

— la formule de Bayes s'applique plus particulièrement aux probabilités conditionnelles, et sert à inverser le conditionnement ; pour voir en quoi cela peut être pertinent, voir la section *Cadre d'application de la formule de Bayes*.

Table des matières

Table des figures