Méthodes – Probabilités ✓ Penser à l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, et correctement l'utiliser

Le cadre d'application de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : $\forall \varepsilon > 0,\ \mathrm{P}\left(|X - \mathrm{E}(X)| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathrm{V}(X)}{\varepsilon^2}$ qui donne, par passage au complémentaire :

$$\mathrm{P}\left(|X - \mathrm{E}(X)| \leqslant \varepsilon\right) \geqslant 1 - \frac{\mathrm{V}(X)}{\varepsilon^2} \tag{1}$$

est facile, puisqu'elle ne s'utilise que dans une configuration : lorsqu'on veut déterminer la probabilité qu'une variable aléatoire prenne des valeurs proches ou lointaines de sa valeur moyenne théorique (l'espérance). Plus précisément, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev sert en général à répondre à un énoncé du type :

« déterminer la probabilité que telle grandeur soit comprise entre m_1 et m_2 »,

ou :

« déterminer pour quelles valeurs (d'un certain paramètre) la probabilité, que telle grandeur soit comprise entre m_1 et m_2, est supérieure ou égale à p »,

Vous devez y penser dès que vous voyez un tel énoncé.

C'est une chose d'y penser, mais encore faut-il bien traduire l'énoncé pour reconnaître une probabilité de la forme : $\mathrm{P}\left(|X - \mathrm{E}(X)| \geqslant \varepsilon\right)$ (ou $\mathrm{P}\left(|X - \mathrm{E}(X)| < \varepsilon\right)$). Pour cela :

1. Vous appelez X la fameuse grandeur, dont on cherche la probabilité qu'elle soit comprise entre m_1 et m_2. Autrement dit, avec cette notation, on cherche : $\mathrm{P}(m_1 \leqslant X \leqslant m_2)$.
2. C'est une variable aléatoire (souvent de loi usuelle). Calculez son espérance $\mathrm{E}(X)$.
3. Ensuite, transformez l'encadrement : $(m_1 \leqslant X \leqslant m_2)$, en soustrayant $\mathrm{E}(X)$ à chaque membre de l'encadrement, pour en déduire : $\mathrm{P}(m_1 \leqslant X \leqslant m_2) = \mathrm{P}(m_1 - \mathrm{E}(X) \leqslant X - \mathrm{E}(X) \leqslant m_2 - \mathrm{E}(X))$. À ce stade-là, il y a deux cas possibles, plus ou moins favorables :
   (a) Il est quasiment systématique qu'en fait, m_1 et m_2 soient symétriques par rapport à l'espérance de X, c'est-à-dire : m_1 et m_2 sont de la forme $m_1 = \mathrm{E}(X) - \varepsilon$ et $m_2 = \mathrm{E}(X) + \varepsilon$. Dans ce cas on a directement :

   $$(m_1 \leqslant X \leqslant m_2) = (\mathrm{E}(X) - \varepsilon \leqslant X \leqslant \mathrm{E}(X) + \varepsilon) = (-\varepsilon \leqslant X - \mathrm{E}(X) \leqslant \varepsilon) = \left(|X - \mathrm{E}(X)| \leqslant \varepsilon\right),$$

   comme nous vous laissons le vérifier. Il reste alors à utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, ou plus précisément sa variante rappelée en (1), pour répondre à la question de l'exercice.

   (Notons que réciproquement, cette discussion vous donne un indice supplémentaire pour reconnaître le cadre d'application de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : c'est lorsqu'on veut déterminer la probabilité que X soit « proche » (ou non) de sa valeur moyenne.)

   (b) Si on n'est pas dans le cas de figure ci-dessus, ce n'est pas grave : si l'on note m la plus petite valeur entre $|m_1 - \mathrm{E}(X)|$ et $|m_2 - \mathrm{E}(X)|$, alors l'encadrement $m_1 - \mathrm{E}(X) \leqslant X - \mathrm{E}(X) \leqslant m_2 - \mathrm{E}(X)$ est vérifié en particulier si : $-m \leqslant X - \mathrm{E}(X) \leqslant m$, donc :

   $$\begin{aligned}(|X - \mathrm{E}(X)| \leqslant m) = (-m \leqslant X - \mathrm{E}(X) \leqslant m) &\subseteq (m_1 - \mathrm{E}(X) \leqslant X - \mathrm{E}(X) \leqslant m_2 - \mathrm{E}(X)) \\ &= (m_1 \leqslant X \leqslant m_2),\end{aligned}$$

   et donc, par croissance d'une probabilité :

   $$\mathrm{P}\left(|X - \mathrm{E}(X)| \leqslant m\right) \leqslant \mathrm{P}(m_1 \leqslant X \leqslant m_2),$$

   ce qu'on sait minorer grâce à la variante de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev (1).