Méthodes (PSI) – Intégration
Sommes de Riemann

On rappelle le résultat essentiel à connaître sur les sommes de Riemann. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une application continue sur $[a,b]$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

C'est là une version simplifiée de l'énoncé au programme. On peut en effet changer le pas de la subdivision associée à la somme de Riemann de f.

Cet énoncé permet de calculer des limites de suites de sommes, à condition de pouvoir les écrire sous la forme du membre de gauche.

1 Quand y penser ? Comment les reconnaître ?

On *peut* penser à reconnaître une somme de Riemann dans un exercice, lorsqu'on nous demande de calculer la limite quand $n \to +\infty$, d'une somme **finie** (dont le nombre de termes dépend de n), dont le terme général dépend de l'indice de sommation k **et** de n. C'est-à-dire, lorsqu'on nous demande de calculer une limite de la forme :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}(\text{quantité dépendant de } k \text{ et } n), \text{ ou } \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{2^n}(\text{quantité dépendant de } k \text{ et } n), \text{ etc.}$$

Par exemple :

$$\lim_{n\to+\infty} 2^{n+1}\sum_{k=0}^{2^n}\frac{1}{4k^2+2^n}, \quad \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n+k}, \quad \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{n^2}\cos\left(\frac{k\pi}{n^2}\right)$$

peuvent faire penser à des sommes de Riemann.

Il existe des cas où l'on peut y penser même quand le terme général ne dépend pas de n, mais c'est plus subtil : on s'y ramène en « ajoutant les termes manquants » pour reconnaître une somme de Riemann (en multipliant et divisant par n par exemple).

Votre souci est alors : comment reconnaître la fonction f ? L'intervalle $[a,b]$? La quantité $a+\frac{k}{n}(b-a)$? Cela semble difficile, d'autant plus que les sommes en question ne sont pas directement mises sous la forme classique d'une somme de Riemann.

Voici quelques pistes :

1. Tout d'abord, ne vous focalisez pas sur l'intervalle $[a,b]$: vous pouvez TOUJOURS le prendre égal à [0,1]. Ce qui simplifie l'énoncé à reconnaître :

   $$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$$

   On peut remplacer n par n'importe quelle quantité dépendant de n et tendant vers $+\infty$. De plus, il n'est pas gênant si la somme ne va pas jusqu'à $n-1$, mais n, $n+1$... (De même pour l'indice de départ.)

2. Pour transformer votre somme afin qu'elle soit sous la forme $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$, vous essayez de faire apparaître des termes en $\dfrac{k}{n}$, quitte à faire des factorisations, divisions, etc., par n.

   Une fois que vous avez fait ceci, vous remplacez tous ces $\dfrac{k}{n}$ par des x, et vous appelez $f(x)$ la quantité ainsi obtenue : c'est la fonction f dont vous étudiez la somme de Riemann.

Il est important qu'il ne reste AUCUN terme en k « isolé » (c'est-à-dire : non divisé par n). Si ce n'est pas possible, alors ce n'est pas une somme de Riemann.

Encore une fois, si la somme n'a pas n termes, mais (disons) α_n, on s'adapte : on fait apparaître $\dfrac{k}{\alpha_n}$ au lieu de $\dfrac{k}{n}$.

3. Si vous avez bien suivi les étapes ci-dessus, alors la somme que vous étudiez est de la forme $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$, et vous savez donc que sa limite quand $n \to +\infty$ est $\displaystyle\int_0^1 f$: il ne reste plus qu'à calculer cette intégrale.

   S'il manque le $\dfrac{1}{n}$ en facteur, rien de grave : on multiplie et divise par n pour le faire apparaître.

Reconnaître une somme de Riemann

(1) Faire apparaître du $\frac{k}{n}$ dans la somme, et remplacer les $\frac{k}{n}$ par x : cela définit la fonction f dont vous avez besoin.

(2) La somme étudiée est alors $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$, ou une variante : sa limite est $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.

Exemple 1. Calculons : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2^{n+1}\sum_{k=0}^{2^n} \frac{1}{4k^2+2^n}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, on a :

$$2^{n+1}\sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{4k^2+2^{2n}} \overset{(1)}{=} 2^{n+1}\sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{2^{2n}}\cdot\frac{1}{\frac{k^2}{2^{2n-2}}+1} = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right)^2+1}$$

Posons : $\forall x \in [0,1]$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ (1). Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, on a d'après les calculs ci-dessus :

$$2^{n+1}\sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{4k^2+2^{2n}} = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{2^{n-1}} f\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right).$$

C'est la somme de Riemann de f de pas 2^{n-1}, associée à la subdivision : $0 = \frac{0}{2^{n-1}} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}} \leqslant \frac{2}{2^{n-1}} \leqslant \cdots \leqslant \frac{k}{2^{n-1}} \leqslant \cdots \leqslant \frac{2^{n-1}}{2^{n-1}} = 1$.

En vérité il y a un terme en trop dans la somme ci-dessus, mais il n'affecte pas du tout la limite des sommes de Riemann. Comme f est continue sur $[0,1]$, on sait que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{2^{n-1}} f\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = [\arctan(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4}, \qquad (2)$$

donc finalement : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2^{n+1}\sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{4k^2+2^{2n}} = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 1. Étudier de même le comportement quand $n \to +\infty$ de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{n^2}\cos\left(\frac{k\pi}{n^2}\right)$.

2 Cas d'une limite de produits

Il est aussi possible de recourir aux sommes de Riemann pour calculer des limites de suites de produits de la forme :

$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n} (\text{quantité dépendant de } k \text{ et } n)^{(\text{puissance dépendant de } n)}.$$

Par exemple : $\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Il est possible de calculer ces limites grâce aux sommes de Riemann. Pour cela :

— il suffit de prendre le logarithme (si les termes du produit sont bien strictement positifs), afin de transformer le produit en somme ;

— on calcule la nouvelle limite étudiée grâce aux sommes de Riemann ;

— on revient à la limite de départ par composition avec la fonction exponentielle.

Exercice 2. Appliquer cette méthode pour montrer : $\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{4}{e}$.

Table des matières