Méthodes (MP) – Intégration

Limites et développements limités, asymptotiques d'intégrales

1 Encadrer explicitement une intégrale

Cette méthode est utile notamment lorsqu'il s'agit de déterminer la limite d'une suite d'intégrales, avec le théorème des gendarmes. Exemples : $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n}{1-x}\mathrm{d}x=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{2x}\frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}=+\infty$.

Il n'existe pas de primitive simple pour ces intégrandes, et c'est ce qui rend le calcul compliqué. **Il n'est pas possible de simplement rentrer la limite dans l'intégrale**. Nous avons tout de même deux théorèmes de passage à la limite sous le signe intégrale (dont le *théorème de convergence dominée*), mais il est parfois possible de procéder directement : dans l'intégrande, on remplace la quantité qui nous empêche d'avoir une primitive simple (*en général un dénominateur*) par son maximum ou son minimum sur l'intervalle d'intégration, grâce à la croissance de l'intégrale. On obtient ainsi une majoration ou minoration par une quantité constante, qu'on sort de l'intégrale, et l'intégrande s'en trouve simplifié.

Exemple 1. Montrons : $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n}{1-x}\mathrm{d}x=0$. On a :

$$0\leqslant\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n}{1-x}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n}{1-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x=2\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\frac{1}{2}}.$$

Partant de là, il est très facile de montrer que la limite du membre de droite est 0 quand $n\to+\infty$, et on conclut avec le théorème des gendarmes.

Bien sûr, il s'agit d'être au point sur la majoration des quantités simples, en particulier s'il apparaît des quotients et des signes moins... Certains parmi vous n'auraient-ils pas été tentés d'écrire la majoration fausse $\frac{1}{1-x}\leqslant 1$ sous prétexte que $x\geqslant 0$? Pour ne pas vous tromper, partez de l'hypothèse sur la variable d'intégration x (à savoir ici : $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$) et, par opérations élémentaires (sommes, multiplications, passage à l'inverse) arrivez à la quantité que vous souhaitez encadrer. Voir aussi les conseils du document *L'art de la majoration.*

Exercice 1. Redémontrer : $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n}{1-x}\mathrm{d}x=0$, mais en majorant autrement l'intégrande.

Exemple 2. De la même manière, on a :

$$\int_x^{2x}\frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}\geqslant\frac{1}{\ln(2x)}\int_x^{2x}\mathrm{d}t=\frac{x}{\ln(2x)}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty.$$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{2x}\frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}=+\infty$.

La partie qui pose problème, dans ces raisonnements, est de correctement choisir ce qu'on majore (ou minore) dans l'intégrande, et ce qu'on laisse tel quel. Deux conseils :

— 1° plus vous effectuez de majorations, plus vous vous éloignez de l'intégrale de départ, et moins la majoration est bonne : touchez donc au moins de facteurs possibles de l'intégrande ;

— 2° identifiez ce qui rend l'intégrale « petite » (si vous voulez montrer une convergence vers 0) ou « grande » (si vous voulez une divergence vers $+\infty$), et N'Y TOUCHEZ PAS.

Par exemple, dans le cas de $\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$, c'est le terme x^n qui est de plus en plus petit sur $[0,1[$: si vous le majorez par 1, vous perdez ce qui contrôlait la taille de l'intégrale et ne pouvez pas conclure.

Au contraire, un facteur « proche » de 1 peut souvent (mais pas toujours) être retiré sans douleur, puisque multiplier par 1 ne change pas la valeur d'un réel. Par exemple, si l'on étudie le comportement de $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^t}{t} \mathrm{d}t$ quand $x \to 0$, notons que $e^t \approx e^0 = 1$ quand $t \in [x,2x]$ et $x \to 0$, donc il ne coûte pas grand'chose de s'en débarrasser *a priori* : cela nous encourage à utiliser l'encadrement $e^x \leqslant e^t \leqslant e^{2x}$ pour sortir le terme exponentiel « qui ne compte pas » de l'intégrale, et se ramener à l'intégrale $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ facile à calculer (et égale à $\ln(2)$).

Exercice 2. Achever ce raisonnement pour en déduire : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} \mathrm{d}t = \ln(2)$.

Bien sûr, si l'on vous donne des outils de passage à la limite dans l'intégrale, c'est parce qu'il y a une raison : la méthode ci-dessus échoue dans bien des cas. Vous ne parviendrez pas à démontrer ainsi que la limite de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(x))^n \mathrm{d}x$ est 0 quand $n \to +\infty$, sauf à faire un découpage epsilonesque fin, bien que ce soit assez naturel (l'intégrande est un réel positif strictement inférieur à 1 élevé à la puissance n, sauf en $\frac{\pi}{2}$, donc il devient de plus en plus petit).

Ne vous acharnez donc pas si aucun encadrement ne fonctionne.

2 Développements limités et asymptotiques

Il est difficile en général d'obtenir un développement limité ou asymptotique d'une intégrale. Les trois cas les plus favorables sont lorsque :

- on peut utiliser le **théorème d'intégration des relations de comparaison** (ce qui est déjà foutu si la variable x qui tend vers 0 ou l'infini est dans l'intégrande et non les bornes de l'intégrale) ;
- on peut **calculer explicitement l'intégrale**, pour l'exprimer à l'aide de fonctions usuelles et faire leurs développements limités ;
- un **théorème d'interversion s'applique**, par exemple pour montrer : $\displaystyle\int_I f_n(t)\mathrm{d}t = \frac{\ell}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$, en montrant le résultat équivalent : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_I n f_n(t)\mathrm{d}t = \ell$.

Le cas le plus simple, pour trouver un équivalent grâce au théorème d'intégration des relations de comparaison, est lorsqu'on cherche un équivalent de $\displaystyle\int_a^x f$ (ou $\displaystyle\int_x^b f$) avec f de la forme : $f = u'v$. Si l'on parvient à écrire : $f \underset{a}{\sim} u'v + uv' > 0$, avec uv' CLAIREMENT négligeable devant $u'v$, il ne reste plus qu'à intégrer cet équivalent pour conclure. L'intérêt de la manœuvre est que l'intégrale de $u'v + uv'$ se simplifie immédiatement puisqu'on connaît une primitive (à savoir uv). Cela donne un équivalent explicite. On l'illustre dans le premier exemple ci-dessous.

Notez que ces trois approches ont l'avantage de ne pas nécessiter d'idée *a priori* de ce que l'on veut. Une quatrième situation est aussi agréable, mais elle nécessite plus de finesse :

- quand la **formule de l'intégration par parties** donne un terme entre crochets CLAIREMENT prépondérant devant la nouvelle intégrale obtenue (par CLAIREMENT, on veut dire : on parvient à le démontrer par une majoration triviale de l'intégrale ou avec le théorème d'intégration des relations de comparaison). Cela nécessite un bon choix de fonction à intégrer et dériver, et donc de la finesse dans l'appréciation des ordres de grandeur.

Quand on n'est pas dans l'un de ces quatre cas de figure, on essaie de s'y ramener dans la mesure du possible, **souvent avec un changement de variable** (par exemple pour avoir une intégrale sans variable dans l'intégrande, mais dans la borne, afin d'utiliser le théorème d'intégration des relations de comparaison ; ou encore, pour appliquer le théorème de convergence dominée, là où l'intégrale initiale ne le permettait pas). Mais ce n'est pas toujours suffisant et nous y revenons après ces quelques exemples :

Exemple 3. (Illustration élémentaire du 1er cas) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On cherche un équivalent quand

$x \to +\infty$ de l'intégrale $\displaystyle\int_0^x t^a e^t \mathrm{d}t$. Pour cela, il suffit de remarquer que l'on a :

$$t^a e^t \underset{t\to+\infty}{\sim} t^a e^t + a t^{a-1} e^t > 0.$$

(Objectif de la manœuvre : on pense avoir reconnu uv', on essaie de faire apparaître $u'v$ de manière licite ; pour cela, il faut que ce soit négligeable devant le uv' candidat et c'est bien le cas ici). Or $t \mapsto t^a e^t + a t^{a-1} e^t$ n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$, puisqu'une primitive (qu'on sait calculer immédiatement, et pour cause : on a fait en sorte de faire apparaître la dérivée d'un produit, c'est l'intérêt de la manœuvre !) est $t \mapsto t^a e^t$, qui admet une limite infinie en l'infini. Par le théorème d'intégration des équivalents :

$$\int_0^x t^a e^t \mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_0^x \left(t^a e^t + a t^{a-1} e^t\right) \mathrm{d}t = \left[t^a e^t\right]_0^x = x^a e^x.$$

Exercice 3. (Illustration du 2ᵉ cas) Lorsque a est un entier naturel, retrouver l'équivalent de cet exemple en passant par un calcul explicite de l'intégrale.

Exemple 4. (Illustration plus fine du 1ᵉʳ cas) On cherche un équivalent quand $n \to +\infty$ de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan(nx)}{x}\mathrm{d}x$. Le théorème d'intégration des relations de comparaison ne semble pas s'appliquer. En revanche, si l'on fait le changement de variable : $u = nx$, on a : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan(nx)}{x}\mathrm{d}x = \int_0^n \frac{\arctan(u)}{u}\mathrm{d}u$, et on a : $\displaystyle\frac{\arctan(u)}{u} \underset{u\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2u} > 0$. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u}$ diverge et donc, par le théorème d'intégration des équivalents : $\displaystyle\int_1^n \frac{\arctan(u)}{u}\mathrm{d}u \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}\int_1^n \frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{\pi}{2}\ln(n)$. Comme $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan(u)}{u}\mathrm{d}u$ est évidemment négligeable devant une quantité qui tend vers l'infini, on conclut :

$$\int_0^1 \frac{\arctan(nx)}{x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\arctan(u)}{u}\mathrm{d}u + \int_1^n \frac{\arctan(u)}{u}\mathrm{d}u \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_1^n \frac{\arctan(u)}{u}\mathrm{d}u \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}\ln(n).$$

Exemple 5. (Illustration du 3ᵉ cas) On cherche un équivalent quand $n \to +\infty$ de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t$. On pose $u = t^n$ afin de reconnaître une des situations favorables décrites ci-dessus, et on a : $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{u^{\frac{1}{n}}}{1+u^{\frac{1}{n}}}\mathrm{d}u$. En appliquant le théorème de convergence dominée avec cette intégrale (une fonction de domination étant $u \mapsto 1$), on obtient : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{u^{\frac{1}{n}}}{1+u^{\frac{1}{n}}}\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{1}{2}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}$. On en déduit :

$$\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

Exemple 6. (Illustration du 4ᵉ cas) On reprend l'exemple précédent. Nous allons obtenir un équivalent sans utiliser le théorème de convergence dominée. Une intégration par parties, où l'on dérive $t \mapsto \dfrac{1}{1+t}$ et intègre $t \mapsto t^n$, donne : $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2}\mathrm{d}t$. Or le théorème de convergence dominée (avec la fonction de domination $t \mapsto 1$) donne facilement : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2}\mathrm{d}t = 0$. On retrouve donc : $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2(n+1)} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$.

Exercice 4. Compléter les détails qui ont été omis dans chacun des trois exemples.

Exercice 5. Obtenir un terme supplémentaire dans le développement asymptotique de l'intégrale des exemples 5 et 6.

Si les quatre approches ci-dessus échouent et qu'on ne parvient pas à s'y ramener par un simple changement de variable ou une intégration par parties : c'est là qu'il faut commencer à tâtonner et avoir le « sens de l'Analyse » cher à Jean Dieudonné. C'est-à-dire : étant donnée une intégrale $\displaystyle\int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ dépendant d'un paramètre x au voisinage de 0 ou $+\infty$, on essaie de montrer qu'elle est « proche » d'une autre intégrale :

$$\int_I g(x,t)\mathrm{d}t,$$

qui aurait le bon goût de pouvoir s'étudier grâce aux quatre approches ci-dessus. Pour trouver la bonne fonction g, il faut analyser, quand $x \to 0$ ou $x \to +\infty$, quelles sont les quantités prépondérantes dans $\displaystyle\int_I f(x,t)\mathrm{d}t$, *et les garder* ; il ne faut pas oublier d'avoir en tête OÙ elles sont prépondérantes (en général c'est au voisinage d'une extrémité de l'intervalle I ; mais laquelle ?) ; appelons a l'extrémité où elles sont prépondérantes. On approche ensuite les quantités négligeables (qui *a priori* ne contribuent donc pas significativement à la valeur de $\displaystyle\int_I f(x,t)\mathrm{d}t$), en les remplaçant par leur valeur au voisinage de a. Une fois que vous aurez fait cela, vous aurez votre intégrale $\displaystyle\int_I g(x,t)\mathrm{d}t$ qui, on l'espère, est plus simple à étudier (dans les cas idéaux, elle est explicitement calculable).

On prendra garde, pour ne pas avoir une « mauvaise fonction » g :

— à ne PAS remplacer x par zéro, même si $x \to 0$ (cela vaut aussi, souvent, pour une fonction qui s'annulerait en a) ;

— à ne PAS faire apparaître une intégrale divergente : tout ce que cela vous enseignerait, ce serait que $\displaystyle\int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ tend vraisemblablement vers l'infini : intéressant, mais ce n'est pas ce qu'on cherche ici.

Tout cela est très bien, mais une fois qu'on a obtenu un équivalent ou développement de $\displaystyle\int_I g(x,t)\mathrm{d}t$: que fait-on ? On étudie $\displaystyle\int_I f(x,t)\mathrm{d}t - \int_I g(x,t)\mathrm{d}t = \int_I (f(x,t) - g(x,t))\mathrm{d}t$ et on essaie :

— soit des encadrements visant à démontrer que cette intégrale est négligeable devant $\displaystyle\int_I g(x,t)\mathrm{d}t$ (de sorte que l'équivalent de $\displaystyle\int_I g(x,t)\mathrm{d}t$ trouvé donne aussi un équivalent de $\displaystyle\int_I f(x,t)\mathrm{d}t = \int_I (f(x,t) - g(x,t))\mathrm{d}t + \int_I g(x,t)\mathrm{d}t$) ;

— soit les quatre méthodes ci-dessus (qui peuvent parfois s'appliquer à cette intégrale même si elles ne s'appliquaient pas à $\displaystyle\int_I f(x,t)\mathrm{d}t$! c'est le cas en particulier si la différence ci-avant supprime une discontinuité en une extrémité et facilite la vérification d'une hypothèse de domination).

Vous aurez souvent à majorer des « différences petites » au sens de *L'art de la majoration*, pour justement quantifier l'écart entre les fonctions de l'intégrande initial et leurs approximations en ce qu'on a appelé a. Utilisez dans ce cas l'inégalité des accroissements finis, ou la formule de Taylor à un ordre k si vous avez besoin de k termes dans le développement limité (ou asymptotique) de votre intégrale.

Exemple 7. On cherche un équivalent quand $x \to 0$ de : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{ch}(t)}{(t+x)\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t$. Une *bêtise* serait de faire le raisonnement suivant : quand $x \to 0$, on a : $t + x \approx t$, donc : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{ch}(t)}{(t+x)\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t \approx \int_0^1 \frac{\mathrm{ch}(t)}{t\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t$. Après, qu'importe si vous faites d'autres analogues qualitatives vous avez là une intégrale divergente et vous êtes bien avancés.

En revanche, une conjecture pertinente est la suivante : lorsque $x \to 0$, $\frac{1}{t+x}$ devient très grand au voisinage de $t = 0$, et c'est ce terme qui contribue en majorité à la valeur de l'intégrale. Puisque c'est la valeur au voisinage de $t = 0$ qui contribue le plus, on ne perd rien à faire les approximations suivantes : $\mathrm{ch}(t) \approx \mathrm{ch}(0) = 1$, et : $\sqrt{1-t} \approx \sqrt{1} = 1$. Ainsi $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{ch}(t)}{(t+x)\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t$ devrait être proche de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t+x}\mathrm{d}t$ quand $x \to 0$. Or cette intégrale est très facile à calculer, puisque l'on a :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t+x}\mathrm{d}t = [\ln(t+x)]_0^1 = \ln(1+x) - \ln(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln(x),$$

et on peut donc conjecturer : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{ch}(t)}{(t+x)\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t \underset{x\to 0}{\sim} -\ln(x)$. Montrons-le :

$$\left|\int_0^1 \frac{\mathrm{ch}(t)}{(t+x)\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t+x}\mathrm{d}t\right| = \int_0^1 \frac{\mathrm{ch}(t)-\sqrt{1-t}}{(t+x)\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{ch}(t)-\sqrt{1-t}}{t\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t.$$

Cette intégrale converge, le plus technique à vérifier étant l'équivalent : $\mathrm{ch}(t)-\sqrt{1-t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t}{2}$. Une fois qu'on l'a, le reste de la vérification est trivial. En particulier : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{ch}(t)}{(t+x)\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t+x}\mathrm{d}t = \underset{x\to 0}{O}(1) = \underset{x\to 0}{o}(\ln(x))$, et on en déduit :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{ch}(t)}{(t+x)\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t+x}\mathrm{d}t + \underset{x\to 0}{o}(\ln(x)) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln(x).$$

Exercice 6. Compléter ce qui a été omis dans cet exemple.

Si vous voulez augmenter la précision de votre développement limité ou asymptotique :

— soit vous avez utilisé l'inégalité des accroissements finis, ou la formule de Taylor à un certain ordre ; auquel cas, il suffit de le pousser à un ordre plus élevé ;

— soit vous refaites le même raisonnement que ci-dessus, mais avec l'intégrale $\displaystyle\int_I (f(x,t)-g(x,t))\mathrm{d}t$; et ainsi de suite.

On remarquera une similarité entre le discours de cette partie et celui de la section 7.2 : presque tous les conseils qui y sont formulés s'appliquent aussi à cette situation.

Table des matières

1 Encadrer explicitement une intégrale **1**

2 Développements limités et asymptotiques **2**