Méthodes (MP) – Intégration

✓ Étudier la nature d'une intégrale $\int_I f$

Si $I = [a, b[$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, et si $f : I \to \mathbb{C}$ est une application continue par morceaux sur I, les cas les plus simples où l'on peut déterminer la nature de $\int_a^b f$ sont :

— si f admet une limite finie en b ; en ce cas, f se prolonge par continuité en une application $\tilde{f} : [a, b] \to \mathbb{C}$ continue sur le SEGMENT $[a, b]$, donc $\int_a^b \tilde{f}$ converge et $\int_a^b f = \int_a^b \tilde{f}$ également ; chercher si f admet une limite finie en b est donc la première chose à faire – *via* un équivalent asymptotique qui, de toute façon, nous reste utile même si la limite n'est pas finie, pour des relations de comparaison ultérieures (notons qu'une limite infinie en b, ou inexistante, NE démontre RIEN, au même titre qu'une limite nulle si $b = +\infty$) ;

— si on connaît la limite en b d'une primitive de f.

Plus généralement :

— on mentionne l'intervalle où f est continue (par morceaux) : cela assure qu'elle est intégrable sur tout segment inclus dans cet intervalle de continuité ;

— si I est un intervalle borné, on regarde si f admet une limite finie aux bornes ; si oui, elle se prolonge en une application continue sur un segment et est donc intégrable ;

— on utilise les théorèmes de comparaison au voisinage de chaque borne problématique : nous avons vu que la convergence d'une intégrale $\int_a^b f$, si f est continue sur $]a, b]$, ne dépend pas de b et cette borne peut donc être un réel au voisinage de a au besoin, ce qui permet d'utiliser des équivalents asymptotiques ou des inégalités seulement valables au voisinage de a (de même si f est continue sur $I = [a, b[$ ou $I =]a, b[$).

C'est plus rare, mais nous pouvons comme dans le cas des séries, en dernier recours, étudier la nature de $\int_I f$, dans le cas où f est de signe inconstant, à l'aide d'un développement asymptotique. Ainsi on écrit $f = g + h$, où $\int_I h$ converge, de sorte que $\int_I f$ et $\int_I g$ soient de même nature.

Exemple 1. Étudions la nature de $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t} + \sin(t)} \mathrm{d}t$ ainsi. L'application $t \mapsto \frac{\sin(t)}{\sqrt{t} + \sin(t)}$ est continue sur $[\pi, +\infty[$: étudions le problème éventuel d'intégrabilité au voisinage de $+\infty$. Pour tout t au voisinage de $+\infty$, on a $\frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc :

$$\begin{aligned}\frac{\sin(t)}{\sqrt{t} + \sin(t)} = \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}} &= \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} \left(1 - \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} + \underset{t \to +\infty}{o}\left(\frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\right)\right) \\ &= \underbrace{\frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}}_{=g(t)} \underbrace{- \frac{(\sin(t))^2}{t} + \underset{t \to +\infty}{o}\left(\frac{(\sin(t))^2}{t}\right)}_{=h(t)}.\end{aligned}$$

Or l'intégrale $\int_\pi^{+\infty} g(t) = \int_\pi^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t$ converge, donc $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t} + \sin(t)} \mathrm{d}t$ et $\int_\pi^{+\infty} h(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature. Mais :

$$h(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{(\sin(t))^2}{t} > 0,$$

et on sait démontrer que l'intégrale $\int_\pi^{+\infty} \frac{(\sin(t))^2}{t} \mathrm{d}t$ est divergente ; ainsi $\int_\pi^{+\infty} h(t)\mathrm{d}t$ diverge par comparaison.

On en déduit que l'intégrale $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t} + \sin(t)} \mathrm{d}t$, qui est de même nature, diverge aussi.

Exercice 1. Vérifier les résultats admis dans cet exemple :

1. Montrer que $\dfrac{\sin(t)}{\sqrt{t}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ converge.
3. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{(\sin(t))^2}{t}\mathrm{d}t$ diverge. On pourra utiliser ingénieusement une formule de trigonométrie impliquant $\sin^2$ afin de se ramener à des intégrales classiques.

Comme dans le cas des séries, il n'y a pas de méthode systématique.

Je pense que le plus sage reste, pour ne pas s'emmêler les pinceaux, de comprendre ce qu'on fait dans les grandes lignes : **éliminer autant de points problématiques que possible grâce à la continuité, et traiter les points restants (il y en a au plus deux) avec des méthodes de comparaison à leur voisinage**. Si l'approche échoue, considérer d'autres recours (intégration par parties en général).

Les relations de comparaison doivent, dans le meilleur des cas, nous ramener aux fonctions de Riemann, dont nous rappelons l'intégrabilité dans l'encart de la figure 1.

FIGURE 1 – Intégrales de référence.

— **si** $I=[1,+\infty[$: l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^s}$ converge si et seulement si $s>1$;
— **si** $I=]0,1]$: l'intégrale $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{t^s}$ converge si et seulement si $s<1$;
— **si** $I=]b,a]$**, où** $a,b\in\mathbb{R}$: l'intégrale $\displaystyle\int_b^a\frac{\mathrm{d}t}{(t-b)^s}$ converge si et seulement si $s<1$ (résultat analogue si $I=[a,b[$).

Il est synonyme ici, puisque les fonctions sont positives, de dire :
— **si** $I=[1,+\infty[$: l'application $t\mapsto\dfrac{1}{t^s}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ si et seulement si $s>1$;
— **si** $I=]0,1]$: l'application $t\mapsto\dfrac{1}{t^s}$ est intégrable au voisinage de 0 si et seulement si $s<1$;
— **si** I **admet pour extrémité** $b\in\mathbb{R}$: l'application $t\mapsto\dfrac{1}{(t-b)^s}$ est intégrable au voisinage de b si et seulement si $s<1$.

On retiendra en particulier :
— l'application $t\mapsto\dfrac{1}{t}$ n'est intégrable ni au voisinage de $+\infty$, ni au voisinage de 0 ;
— **l'intégrale** $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^s}$ **ne converge jamais !**
— que ce soit au voisinage de 0 ou de $+\infty$, ce sont les fonctions puissances dont le graphe est « sous » celui de $t\mapsto\dfrac{1}{t}$ qui sont intégrables.

La fonction inverse $t\mapsto\dfrac{1}{t}$ sert donc, graphiquement, de ligne de démarcation entre les fonctions de Riemann intégrables et celles qui ne le sont pas (au voisinage de 0 et de $+\infty$). Voir la figure 5. → page 12

Pour l'agrément, nous avons également pour intégrales de référence $\displaystyle\int_0^1\ln(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-at}\mathrm{d}t$, mais elles ne sont **jamais** indispensables. Comparer aux fonctions de Riemann suffit.

Étudier la nature de $\int_I f$ par comparaison : cas positif

1. Mentionner où f est continue.
2. Trouver si possible un équivalent simple aux extrémités où f n'est pas continue.
3. Déduire de ces équivalents si :
   — f se prolonge par continuité sur un segment ;
   — f est équivalente à $\dfrac{1}{t^\alpha}$;

   et conclure le cas échéant.
4. Sinon : méthode « $t^\alpha f(t)$ ». Prendre $\alpha = 2$ marche presque toujours si f est à décroissance exponentielle.

Si f n'est pas positive : reprendre les étapes 3 et 4 avec $|f|$ (convergence absolue).

Les intégrales de référence $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}\mathrm{d}t$ sont superflues et vous induisent en erreur.

1 ✓ Comparer aux intégrales de Riemann en pratique

C'est comme dans le cas des séries : on utilise les développements limités et équivalents asymptotiques usuels. Si cela ne permet pas d'obtenir directement un équivalent à une fonction de Riemann : on étudie $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{1/t^\alpha}$ ou $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\frac{f(t)}{1/t^\alpha}$ pour « forcer la comparaison ». C'est semblable au voisinage de 0, *en inversant les conclusions* selon que $\alpha > 1$ ou $\alpha \leqslant 1$. Attention !

Détails. Soit f une fonction continue par morceaux et positive sur $[a, +\infty[$ et soit $\alpha \in \mathbb{R}$:

— si $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^\alpha f(t) = L \neq 0$, alors $f(t) \sim \dfrac{L}{t^\alpha}$ quand $t \to +\infty$, et donc $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ sont de même nature : on a convergence de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ si et seulement si $\alpha > 1$ (si vous tombez dans ce cas-là, c'est que vous n'avez pas remarqué qu'un équivalent à une fonction de Riemann pouvait s'obtenir directement *via* des développements usuels : la méthode « $t^\alpha f(t)$ » est normalement inutile dans ce cas-là) ;

— si $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^\alpha f(t) = 0$ et $\alpha > 1$, alors : $f(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^\alpha}\right)$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge donc $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge également par comparaison (le cas $\alpha \leqslant 1$ ne permet pas de conclure) ;

— si $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^\alpha f(t) = +\infty$ et $\alpha \leqslant 1$, alors $f(t) \geqslant \dfrac{1}{t^\alpha}$ pour t assez grand et $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ diverge, donc $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ diverge également par comparaison (le cas $\alpha > 1$ ne permet pas de conclure)

Je rappelle qu'on inverse les conclusions si l'étude est au voisinage de 0. Si le problème d'intégrabilité est au voisinage d'un autre réel $a \in \mathbb{R}$ que 0, il suffit d'étudier à la place : $\displaystyle\lim_{t\to a}|t-a|^\alpha f(t)$.

Si vous n'avez pas d'idée du α qui pourrait convenir : vous faites le calcul de limite pour α quelconque dans un premier temps. Selon que la limite soit nulle ou infinie, vous obtenez une relation de comparaison entre f et les fonctions de Riemann d'exposant α, qui dépend de la valeur de α. Vous regardez alors si ces relations de comparaison permettent de conclure pour une valeur de α bien choisie.

Exemple 2. Étudions la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ *via* cette méthode (l'intégrande est continu sur $]0,1]$ et donc le problème éventuel d'intégrabilité est au voisinage de 0). Je détaille la réflexion afin de rendre clair mon choix final de α. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a, au voisinage de l'infini :

$$t^\alpha\left|\frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\right| = -t^{\alpha-1/2}\ln(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha - 1/2 > 0, \\ +\infty & \text{si } \alpha - 1/2 \leqslant 0, \end{cases}$$

par croissances comparées pour le cas $\alpha - 1/2 > 0$. Au brouillon, on confronte les deux cas de figure :

$$\forall \alpha \leqslant \frac{1}{2},\ \left|\frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\right| \geqslant \frac{1}{t^\alpha} > 0 \text{ (près de 0)}, \quad \forall \alpha > \frac{1}{2},\ \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} \underset{t\to 0}{=} o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right).$$

On se demande s'il est possible d'avoir une minoration par une fonction non intégrable dans le premier cas : non, car il faudrait à la fois $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$ pour que la minoration soit valable, et $\alpha \geqslant 1$ pour que le minorant soit une fonction de Riemann *non intégrable*. C'est impossible. On passe au deuxième cas : est-il possible d'avoir à la fois $\alpha > \frac{1}{2}$ (pour que la relation de comparaison soit vraie) et $\alpha < 1$ (pour avoir une domination par une fonction de Riemann *intégrable*) ? Bien sûr que oui : il suffit de prendre $\alpha = \frac{3}{4}$ par exemple. Pour cette valeur, on a alors :

$$\frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} \underset{t\to 0}{=} o\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{4}}}\right),$$

et on conclut par comparaison que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ converge absolument donc converge. Bien sûr, quand on rédige au propre, ou si l'on voit à l'œil nu quel choix de α va marcher, il est inutile de faire cette fastidieuse disjonction de cas.

Deux cas particuliers permettent de conclure rapidement :

— **si f est une exponentielle décroissante, ou du moins a une exponentielle décroissante en facteur**, alors les croissances comparées devraient assurer que f est négligeable devant $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ au voisinage de $+\infty$ quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$, et donc pour $\alpha = 2 > 1$ en particulier (démontrant l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$) ;

— **si f est logarithmique**, alors les croissances comparées devraient assurer que f est négligeable devant $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ au voisinage de 0 quel que soit $\alpha > 0$ (attention à être plus soigneux s'il y a d'autres facteurs qu'un facteur logarithmique dans la définition de f), et donc pour $\alpha = \dfrac{1}{2} < 1$ en particulier (démontrant l'intégrabilité au voisinage de 0).

Vous gagnerez du temps si vous faites ces constats. Exercez-vous sur ces intégrales que vous rencontrerez souvent :

Exercice 2.

1. Étudier la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^a e^{-t^2}\mathrm{d}t$ selon la valeur de $a \in \mathbb{R}$.
2. Étudier la nature de $\displaystyle\int_0^{1} t^b(\ln(t))\mathrm{d}t$ selon la valeur de $b \in]-1{,}0[$.

2 ☢ Natures d'intégrales obtenues par comparaison à des séries

2.1 Cas de divergence

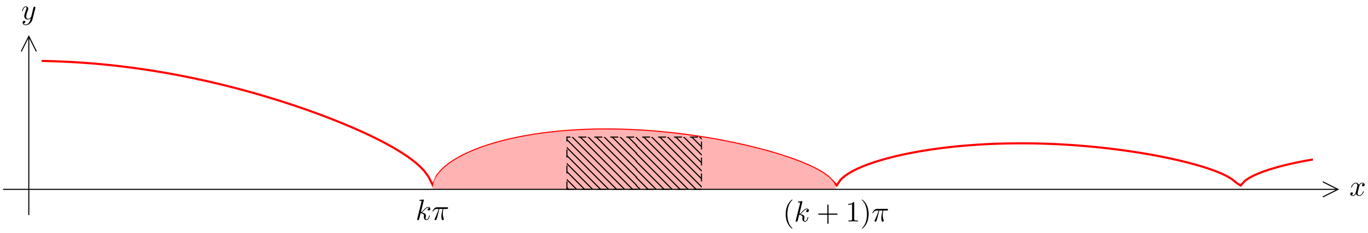
On se place dans le cas très délicat où raisonner *via* les méthodes classiques échoue, ou du moins échoue sans plus d'approfondissement. **C'est le cas en général lorsque nous avons une fonction trigonométrique, cosinus ou sinus** (en effet elles n'ont pas d'équivalent simple au voisinage de $+\infty$, et comme elles s'annulent souvent il est impossible de les minorer par une fonction de Riemann), et aucune domination facile par une fonction de Riemann intégrable. Voici quelques exemples :

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\sin(t))^2}{t}\mathrm{d}t, \quad \int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{|\sin(t)|}{t}}\mathrm{d}t, \quad \int_0^{+\infty} |\sin(t)|^t\mathrm{d}t.$$

Dans ces cas, puisque toute approche classique semble échouer (sauf pour la première intégrale où une formule de trigonométrie simplifie la tâche : exercice 1 du document), on est contraint de montrer la convergence ou divergence « à la main » (en général il y a divergence dans le cas d'un intégrande positif). ← page 1

Pour la divergence, on cherche une minoration de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ par une somme qui vaut $+\infty$. L'interprétation de l'intégrale en tant qu'aire sous la courbe nous donne une piste pour cette minoration : on regarde l'aire sur chaque période, en la minorant par l'aire d'un rectangle de taille raisonnable, et on somme :

Figure 2 – Gestion des cas difficiles sur une période.



Pour trouver un rectangle convenable, en général, on peut prendre arbitrairement sa base, **tant que f y est strictement positive** (pour pouvoir la minorer non trivialement), et que sa hauteur reste toujours en dessous de la courbe de f : pour cela, il suffit de prendre **une hauteur égale à la plus petite valeur prise par f sur la base du rectangle**. On prend souvent un rectangle centré sur le milieu de la période, par commodité, mais ce n'est pas indispensable. Alors, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ est minorée par une somme d'aires de rectangle qui, si tout va bien, est la somme d'une série divergente *à termes positifs* ; elle vaut donc l'infini, et cela prouve : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f = +\infty$.

Montrer la divergence d'une intégrale : cas difficile

($*$) Utiliser la relation de Chasles pour se placer sur des périodes.

($\dagger$) Si la fonction est positive : restreindre l'intervalle d'intégration à un intervalle où la fonction ne s'annule pas.

($\ddagger$) Minorer la fonction sur cet intervalle pour faire apparaître une somme qui tend vers $+\infty$ (série divergente).

Exemple 3. Montrons que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{|\sin(t)|}{t}}\mathrm{d}t$ diverge, en suivant la méthode ci-dessus. Le raisonnement est représenté graphiquement sur la figure 3. On a : → page 6

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{|\sin(t)|}{t}}\mathrm{d}t \overset{(*)}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \sqrt{\frac{|\sin(t)|}{t}}\mathrm{d}t$$

(comme $|\sin|$ est π-périodique, on se place sur des intervalles de longueur π avec la relation de Chasles)

$$\overset{(\dagger)}{\geqslant} \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{(k+\frac{1}{6})\pi}^{(k+\frac{5}{6})\pi} \sqrt{\frac{|\sin(t)|}{t}}\mathrm{d}t$$

(on choisit un sous-intervalle de $[k\pi,(k+1)\pi]$, peu importe lequel, où le sinus ne s'annule pas, ce qui permettra de le minorer par une quantité strictement positive)

$$\overset{(\ddagger)}{\geqslant} \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{(k+\frac{1}{6})\pi}^{(k+\frac{5}{6})\pi} \sqrt{\frac{1/2}{t}}\mathrm{d}t$$

(on a $|\sin(t)| \geqslant \frac{1}{2}$ pour tout $t \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$, donc aussi pour tout $t \in \left[\frac{\pi}{6}+k\pi, \frac{5\pi}{6}+k\pi\right]$ par π-périodicité)

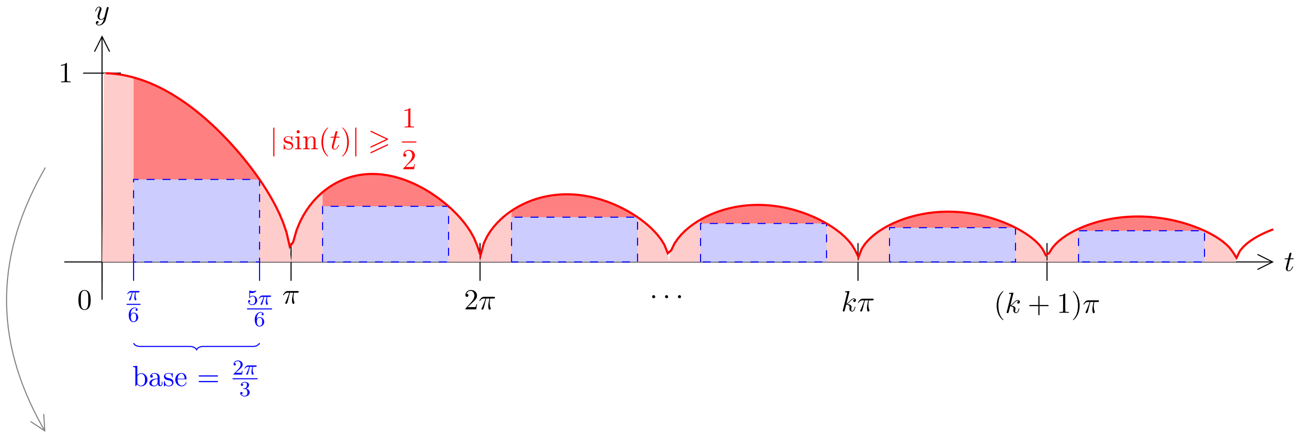
$$\geqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{(k+\frac{1}{6})\pi}^{(k+\frac{5}{6})\pi} \sqrt{\frac{1}{2\left(k+\frac{5}{6}\right)\pi}}\mathrm{d}t$$

(le plus dur a été fait, et la minoration $\frac{1}{t} \geqslant \frac{1}{(k+\frac{5}{6})\pi}$ n'est pas nécessaire pour conclure ; mais elle facilite l'interprétation géométrique)

On a donc :

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{|\sin(t)|}{t}}\mathrm{d}t \geqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{2\pi}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\left(k+\frac{5}{6}\right)\pi}}}_{\text{aires des rectangles (figure 3)}} .$$

FIGURE 3 – Divergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sqrt{\frac{|\sin(t)|}{t}}\mathrm{d}t$: démonstration géométrique (donc excellente).



$$\int_0^{+\infty}\sqrt{\frac{|\sin(t)|}{t}}\mathrm{d}t \overset{(\dagger)}{\geqslant} \sum_{k=0}^{+\infty} \boxed{} \overset{(\ddagger)}{\geqslant} \sum_{k=0}^{+\infty} \boxed{} = \sum_{k=0}^{+\infty}(\text{base} \times \text{hauteur}) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2\pi}{3}\times\sqrt{\frac{1}{2\left(k+\frac{5}{6}\right)\pi}} = +\infty$$

Or la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{\sqrt{\left(k+\frac{5}{6}\right)}}$ diverge du fait que $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{\left(k+\frac{5}{6}\right)}} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{k}}$ et de la divergence de la série de Riemann $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{\sqrt{k}}$. Comme elle est à termes positifs, sa somme vaut $+\infty$. On en déduit :

$$\int_0^{+\infty}\sqrt{\frac{|\sin(t)|}{t}}\mathrm{d}t \geqslant \frac{2\pi}{3\sqrt{2\pi}}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\left(k+\frac{5}{6}\right)}} = +\infty.$$

On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sqrt{\frac{|\sin(t)|}{t}}\mathrm{d}t$ diverge.

Exercice 3. Produire une minoration de $\displaystyle\int_0^{N\pi}\sqrt{\frac{|\sin(t)|}{t}}\mathrm{d}t$ par une quantité explicite, sans symbole somme, dépendant de N et tendant vers $+\infty$.

Exercice 4. Traiter de même l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{(\sin(t))^2}{t}\mathrm{d}t$.

☢ **Exercice 5.** Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}|\sin(t)|^t\mathrm{d}t$. Vous aurez besoin d'un équivalent asymptotique simple des intégrales de Wallis.

2.2 Cas de convergence

On peut aussi s'inspirer de la méthode ci-dessus pour montrer la *convergence* de certaines intégrales de la forme $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ pour lesquelles les méthodes classiques (convergence absolue et théorème de comparaison) ne fonctionnent pas. En général, le problème est qu'on ne parvient pas à avoir une majoration de $|f|$ sur $[a,+\infty[$ ou $]a,+\infty[$ suffisamment bonne pour qu'elle soit intégrable. Un exemple typique est la fonction $f : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$: la meilleure majoration possible de $|f|$ sur $]0,+\infty[$ est $t\mapsto\frac{1}{t}$, qui n'est pas intégrable au voisinage de 0 et de $+\infty$. Une piste éventuelle (outre l'approche plus classique d'une intégration par parties, cf. la section 4.3) est encore une fois, si f dépend d'une fonction périodique (disons π ou 2π-

périodique sur $[0, +\infty[$ pour fixer les idées : c'est le cas le plus fréquent), d'écrire l'intégrale comme une somme d'intégrales sur chaque période grâce à la relation de Chasles :

$$\int_0^{N\pi} f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{N-1} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\mathrm{d}t.$$

Notez bien que l'intégrale du membre de gauche ne va pas jusqu'à l'infini, puisqu'on ne sait pas encore si $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ existe : c'est justement ce qu'on veut prouver ! En revanche, si f est positive, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ a un sens *a priori* et il est correct d'écrire, qu'il y ait convergence ou non : $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\mathrm{d}t$. Attention à ne pas le généraliser à une intégrale quelconque.

Ensuite, bien que ce ne soit pas toujours nécessaire, je recommande le changement de variable $u = t - n\pi$ afin que le terme général soit toujours une intégrale sur le même intervalle :

$$\int_0^{N\pi} f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{N-1} \int_0^{\pi} f(u + n\pi)\mathrm{d}u.$$

Écrire ainsi l'intégrale peut avoir deux avantages absents avec l'intégrale initiale, et nous permettant de conclure :

— grâce aux formules de trigonométrie bien connues, en particulier :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x + n\pi) = (-1)^n \cos(x),\ \sin(x + n\pi) = (-1)^n \sin(x),$$

vous pouvez éventuellement faire apparaître **une somme alternée**, qui est d'ailleurs souvent visible à l'œil nu (voir figure 4), dont il reste à vérifier les trois hypothèses du théorème spécial (chose souvent assez aisée par croissance de l'intégrale) ;

— ou bien, se ramener à un segment plus petit permet d'y utiliser des inégalités qui seraient fausses si l'on intégrait jusqu'à l'infini (par exemple : l'inégalité $\sin(x) \geqslant \frac{2}{\pi}x$ n'est valable que si $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$) ; ces nouvelles inégalités permettent éventuellement de majorer :

$$\left| \int_0^{\pi} f(u + n\pi)\mathrm{d}u \right|$$

par le terme général d'une **série** convergente (et non d'une intégrale convergente ! on regarde si la SOMME $\sum_{n=0}^{N} \int_0^{\pi} f(u + n\pi)\mathrm{d}u$ admet une limite finie quand $N \to +\infty$, donc on s'intéresse à la convergence d'une série).

Dans les deux cas, cela peut nous permettre éventuellement d'en déduire la convergence de la série :

$$\sum_{n \geqslant 0} \int_0^{\pi} f(u + n\pi)\mathrm{d}u,$$

et donc que la suite $\left(\int_0^{N\pi} f(t)\mathrm{d}t\right)_{N \in \mathbb{N}}$ admet une limite finie quand $N \to +\infty$, d'après l'égalité plus haut.

Mais ce n'est pas suffisant pour en déduire que $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge. En effet, les limites de $\int_0^{x} f(t)\mathrm{d}t$ quand $x \to +\infty$, et de $\int_0^{N\pi} f(t)\mathrm{d}t$ quand $N \to +\infty$ (avec N un paramètre entier), peuvent ne rien avoir en commun.

Exemple 4. (Pour montrer qu'on doit être vigilant) Comparons la limite quand $x \to +\infty$ de $\int_0^{x} \cos(t)\mathrm{d}t$ et celle quand $N \to +\infty$ (paramètre entier) de $\int_0^{N\pi} \cos(t)\mathrm{d}t$. C'est facile, puisque le calcul direct est possible :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{N\pi} \cos(t)\mathrm{d}t = [\sin(t)]_0^{N\pi} = \sin(N\pi) = 0,$$

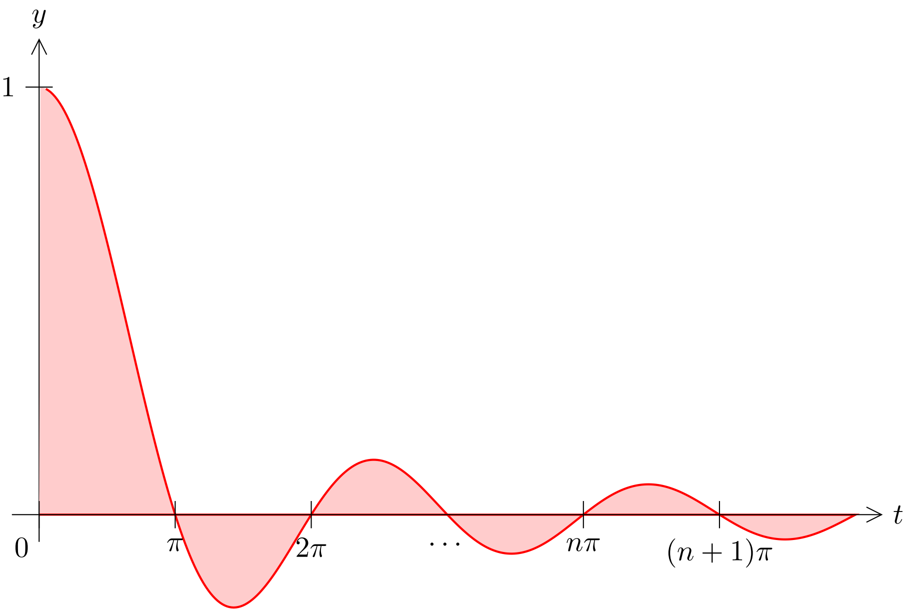


FIGURE 4 – Intégrale de Dirichlet $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$: les aires (absolues) sur des périodes forment clairement une suite alternée, décroissante, convergeant vers 0.

donc : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_0^{N\pi} \cos(x)\mathrm{d}x = 0$. Mais si l'on fait de même en intégrant jusqu'à un **réel quelconque** x, on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^x \cos(t)\mathrm{d}t = \sin(x)$, et c'est un exercice standard de 1$^{\text{re}}$ année de démontrer que le sinus n'admet pas de limite en $+\infty$, en prenant deux suites extraites convenables (nous vous laissons revoir votre cours). Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t)\mathrm{d}t$ diverge, bien que $\displaystyle\left(\int_0^{N\pi} \cos(t)\mathrm{d}t\right)_{N\in\mathbb{N}}$ converge.

Par contre, quand la première limite existe, la seconde aussi et doit lui être égale : c'est la caractérisation séquentielle de la limite qui l'assure.

Comment conclure, dans ce cas, une fois prouvée la convergence de $\displaystyle\left(\int_0^{N\pi} f(t)\mathrm{d}t\right)_{N\in\mathbb{N}}$?
Si $f \geqslant 0$, alors c'est facile : le cours vous dit que l'on a dans ce cas, sans hypothèse de convergence : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\mathrm{d}t$. Par conséquent, la convergence de $\displaystyle\left(\int_0^{N\pi} f(t)\mathrm{d}t\right)_{N\in\mathbb{N}}$ implique la finitude du membre de droite de cette égalité, et donc aussi du membre de gauche : ceci équivaut à la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$.

Si l'on n'est pas dans ce cas de figure très favorable, alors la relation de Chasles permet d'écrire, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ en fonction de $\displaystyle\int_0^{N\pi} f(t)\mathrm{d}t$:

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{N\pi} f(t)\mathrm{d}t + \int_{N\pi}^x f(t)\mathrm{d}t.$$

On choisit N de sorte que $N\pi$ soit « aussi près que possible » de x, c'est-à-dire tel que $N\pi \leqslant x < (N+1)\pi$ par exemple. Cela revient à prendre pour N une partie entière convenable (par exemple $N = \left[\frac{x}{\pi}\right]$, vu que N doit être le plus grand entier tel que $N\pi \leqslant x$, c'est-à-dire tel que $N \leqslant \frac{x}{\pi}$). Alors, quand $x \to +\infty$, on a $N \to +\infty$ également, et d'après l'étude qui précède la quantité $\displaystyle\int_0^{N\pi} f(t)\mathrm{d}t$ admet une limite finie. Il reste alors à montrer qu'il en est de même pour $\displaystyle\int_{N\pi}^x f(t)\mathrm{d}t$: pour cela, on majore $|f|$ par une quantité ε_n ne dépendant pas de t et convergeant vers 0 (souvent très facile à faire), de sorte que :

$$0 \leqslant \left| \int_{N\pi}^{x} f(t)\mathrm{d}t \right| \leqslant \varepsilon_n \int_{N\pi}^{x} \mathrm{d}t = (x - N\pi)\varepsilon_n.$$

Comme $N\pi$ a été choisi aussi proche que possible de x (voir l'encadrement plus haut), on peut majorer $x - N\pi$ par π (pourquoi ?), et alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_{N\pi}^{x} f(t)\mathrm{d}t = 0$ grâce au théorème des gendarmes.

Évidemment, si la période utilisée dans la relation de Chasles n'est pas π, on s'adapte.

Montrer la convergence d'une intégrale : cas difficile

($*$) Utiliser la relation de Chasles pour se placer sur des périodes, et faire un changement de variable nous ramenant à un intervalle fixe.

($\dagger$) Deux possibilités :

(a) Reconnaître une série vérifiant le théorème spécial des séries alternées ;

(b) Montrer l'absolue convergence de la série grâce à des inégalités qui ne sont valables que sur une période.

On en déduit la convergence de $\int_0^{\alpha_N} f$ quand $N \to +\infty$ (paramètre entier), avec α_N un multiple d'une période.

($\ddagger$) Conclure :

(a) si $f \geqslant 0$: dire que $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\mathrm{d}t$ et que le membre de droite est fini par ce qui précède ;

(b) Sinon : écrire $\int_0^x f = \int_0^{\alpha_N} f + \int_{\alpha_N}^x f$ où N est choisi pour que $\alpha_N \approx x$, et montrer la convergence du second terme grâce à $f \to 0$ et $x - \alpha_N \ll 1$.

Exemple 5. (Illustration du cas ($\dagger$).(a)) Montrons la convergence de l'intégrale :

$$\int_{\pi}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t, \quad \text{où :} \quad \forall t \geqslant \pi,\ f(t) = e^{-\sqrt{\ln(t)}}\sin(t).$$

Une approche naïve conduirait à majorer l'intégrande ainsi : $\forall t \in [\pi, +\infty[$, $\left|e^{-\sqrt{\ln(t)}}\sin(t)\right| \leqslant e^{-\sqrt{\ln(t)}}$, mais le problème est que l'intégrale $\int_{\pi}^{+\infty} e^{-\sqrt{\ln(t)}}\mathrm{d}t$ est divergente. Il faut donc procéder autrement. Une intégration par parties fonctionnerait, mais avec beaucoup de peine. Nous allons plutôt suivre la méthode proposée dans cette section. Soit $N \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. On a :

$$\int_{\pi}^{N\pi} f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{N-1} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{N-1} \int_0^{\pi} f(u + n\pi)\mathrm{d}u = \sum_{n=1}^{N-1} (-1)^n \int_0^{\pi} e^{-\sqrt{\ln(u+n\pi)}}\sin(u)\mathrm{d}u,$$

où l'on a effectué le changement de variable $u = t - n\pi$. Posons par commodité :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad u_n = \int_0^{\pi} e^{-\sqrt{\ln(u+n\pi)}}\sin(u)\mathrm{d}u.$$

Montrons que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} (-1)^n u_n$ vérifie le théorème spécial des séries alternées : on a $\sin \geqslant 0$ sur $[0, \pi]$ et l'exponentielle est positive, donc on a : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $u_n = \int_0^{\pi} e^{-\sqrt{\ln(u+n\pi)}}\sin(u)\mathrm{d}u \geqslant 0$, ce qui prouve que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} (-1)^n u_n$ est alternée. De plus : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\forall u \in [0, \pi]$, $\ln(u + (n+1)\pi) \geqslant \ln(u + n\pi)$ par croissance du logarithme, donc après quelques compositions on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \forall u \in [0, \pi], \quad e^{-\sqrt{\ln(u+(n+1)\pi)}}\sin(u) \leqslant e^{-\sqrt{\ln(u+n\pi)}}\sin(u).$$

Par croissance de l'intégrale : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$, donc la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante. Enfin :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \int_0^\pi e^{-\sqrt{\ln(u+n\pi)}}\mathrm{d}u \leqslant e^{-\sqrt{\ln(n\pi)}}\pi \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc par le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. En conclusion, $\sum\limits_{n\geqslant 1}(-1)^n u_n$ vérifie les hypothèses du théorème spécial des séries alternées, donc elle converge. D'après la relation de Chasles plus haut, cela équivaut à la convergence de la suite $\left(\int_\pi^{N\pi} f(t)\mathrm{d}t\right)_{N\geqslant 2}$. De plus, pour tout $x \geqslant 1$, si l'on pose $N = \left[\frac{x}{\pi}\right]$, on a :

$$0 \leqslant \left|\int_{N\pi}^x f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{N\pi}^x e^{-\sqrt{\ln(N\pi)}}\mathrm{d}t = (x - N\pi)e^{-\sqrt{\ln(N\pi)}} \leqslant \pi e^{-\sqrt{\ln(N\pi)}} = \pi e^{-\sqrt{\ln(\left[\frac{x}{\pi}\right]\pi)}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_{N\pi}^x f(t)\mathrm{d}t = 0$. On en déduit que :

$$\int_\pi^x f(t)\mathrm{d}t = \int_\pi^{N\pi} f(t)\mathrm{d}t + \int_{N\pi}^x f(t)\mathrm{d}t$$

s'écrit comme somme de deux quantités ayant une limite finie quand $x \to +\infty$, donc elle admet une limite finie quand $x \to +\infty$. Autrement dit : l'intégrale $\int_\pi^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge, ce qu'on voulait démontrer.

Exercice 6.

1. Démontrer qu'effectivement, l'intégrale $\int_\pi^{+\infty} e^{-\sqrt{\ln(t)}}\mathrm{d}t$ est divergente.
2. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{\ln(t)}}\sin(t)\mathrm{d}t$ converge avec une intégration par parties.

Exemple 6. (Illustration du cas (†).(b)) Montrons la convergence de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^4(\sin(t))^2}.$$

On ne peut pas minorer $1 + t^4(\sin(t))^2$ mieux que par 1 pour $t \in [0, +\infty[$, ce qui donne la majoration suivante de l'intégrande : $\forall t \in [0, +\infty[$, $\frac{1}{1 + t^4(\sin(t))^2} \leqslant 1$. Cependant $t \mapsto 1$ n'est pas du tout intégrable sur $[0, +\infty[$... Suivons l'approche de cette section. Notons que l'intégrande est positif. On a :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^4(\sin(t))^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^4(\sin(t))^2} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}u}{1 + (u + n\pi)^4(\sin(u + n\pi))^2} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}u}{1 + (u + n\pi)^4(\sin(u))^2},\end{aligned}$$

où l'on a effectué le changement de variable $u = t - n\pi$. Or un argument de concavité permet de montrer que $\sin(t) \geqslant \frac{2}{\pi}t$ pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}u}{1 + (u + n\pi)^4(\sin(u))^2} \leqslant \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}u}{1 + (n\pi)^4(\sin(u))^2} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{1 + (n\pi)^4(\sin(u))^2} \leqslant 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{1 + (n\pi)^4\left(\frac{2u}{\pi}\right)^2}.$$

On calcule cette dernière intégrale en y reconnaissant la dérivée d'une arc tangente, et on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}u}{1 + (u + n\pi)^4(\sin(u))^2} \leqslant \frac{\arctan\left((n\pi)^2\right)}{\pi n^2} \leqslant \frac{1}{2n^2}.$$

Or la série de Riemann $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge. On en déduit :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4(\sin(t))^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}u}{1+(u+n\pi)^4(\sin(u))^2} \leqslant \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty,$$

ce qui équivaut à la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4(\sin(t))^2}$: d'où le résultat.

Exercice 7. Écrire les détails omis dans cet exemple, pour que la démonstration soit complète :

1. Montrer : $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}u}{1+(n\pi)^4(\sin(u))^2} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{1+(n\pi)^4(\sin(u))^2}$ (*utiliser la relation de Chasles puis un changement de variable*).
2. Montrer : $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \sin(t) \geqslant \frac{2}{\pi} t$.
3. Montrer : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{1+\left(2n^2\pi u\right)^2} = \frac{\arctan\left((n\pi)^2\right)}{2\pi n^2}$.

Exercice 8. Montrer par la méthode de cette section que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t$ converge.

FIGURE 5 – Intégrabilité des fonctions puissances selon leur position par rapport à $t \mapsto \frac{1}{t}$.

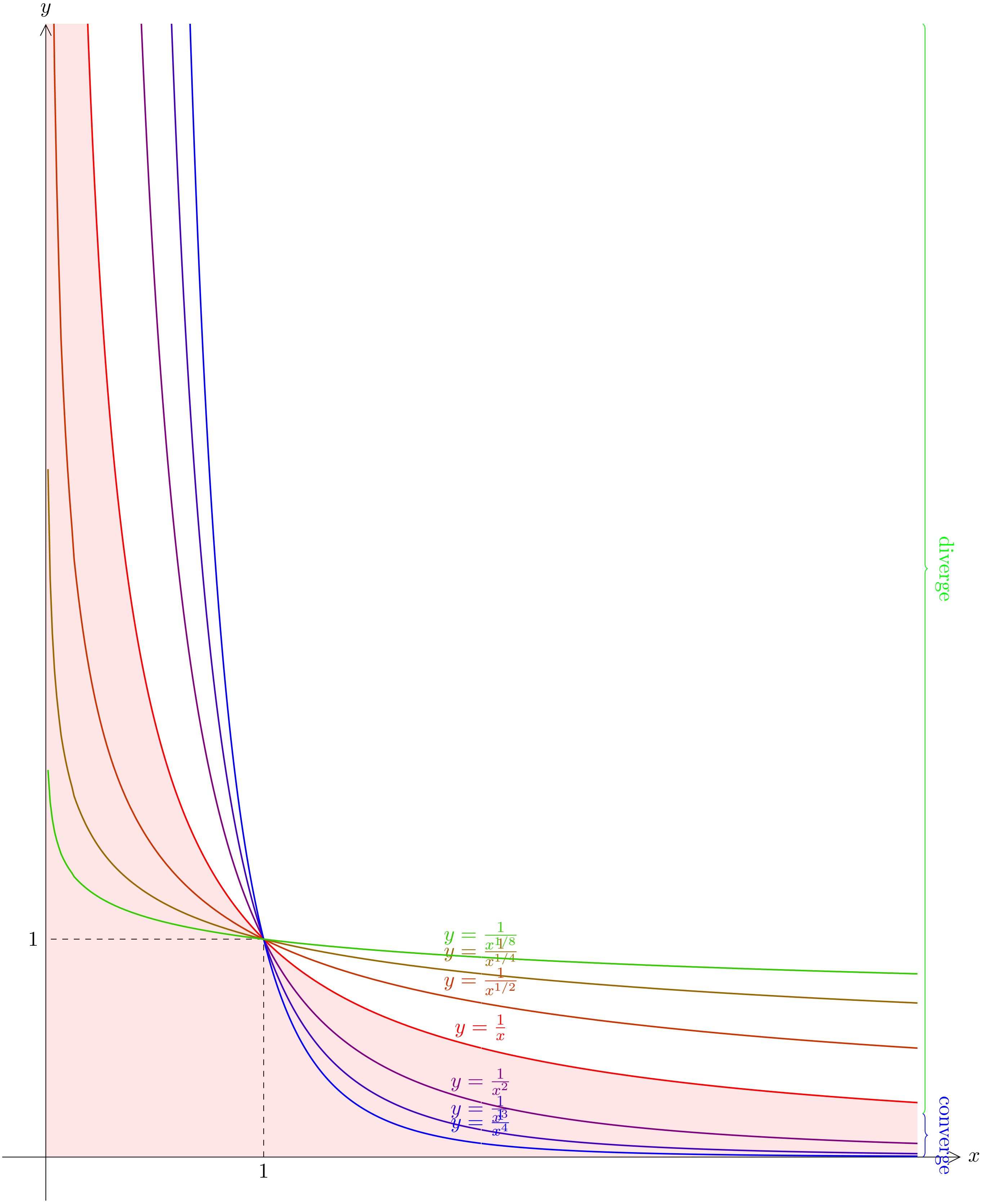


Table des matières