MÉTHODES (MP) – Intégration

Les différentes techniques d'approximation des intégrales

Ces techniques d'approximation sont en général utilisés dans un cadre *théorique* (fonctions non définies explicitement). On vous demande parfois (ou pire : on ne vous demande rien et vous devez y penser de vous-mêmes) de démontrer un résultat concernant $\int_I f$ en introduisant :

— un **segment** $J \subseteq I$ tel que : $\left|\int_I f - \int_J f\right| \leqslant \varepsilon$ (**approximation de l'intervalle d'intégration**) ;

— une fonction en escalier ou polynomiale φ telle que : $\|f-\varphi\|_\infty \leqslant \varepsilon$ (**approximation de l'intégrande**) ;

— une somme de Riemann $S_n(f)$ telle que : $\left|\int_I f - S_n(f)\right| \leqslant \varepsilon$ (**approximation de l'intégrale**).

Je n'inclus pas la comparaison entre séries et intégrales qui, pour moi, est d'une nature assez différente. J'en parle assez longuement dans la section 3 (Natures d'intégrales obtenues par comparaison à des séries).

Je discute ici des mérites comparés de ces trois approches et des cadres *où l'on peut y penser*, mais il faut tout de même accepter l'idée que la question de l'approximation est subtile et que je ne donnerai pas d'approche systématique.

À chaque approximation, l'idée sous-jacente est : on sait démontrer le résultat de l'exercice en changeant légèrement les données : l'intervalle d'intégration, la régularité de l'intégrande, ou en remplaçant l'intégrale par une somme. On essaie alors de s'y ramener.

À noter que ces idées se combinent. Il n'est pas rare de *d'abord* approcher l'intervalle d'intégration par un segment, pour *ensuite* approcher l'intégrande par densité.

1 Quand se ramener à un segment ?

Les segments permettent d'utiliser les deux théorèmes d'approximation des fonctions suivants :

— la densité des fonctions en escalier ;

— la densité des fonctions polynomiales ;

mais aussi ces différents résultats valables uniquement sur des segments, sauf hypothèses supplémentaires (limites finies en $\pm\infty$ par exemple) :

— les fonctions continues (par morceaux) sont bornées sur tout segment ;

— les fonctions continues sur un segment sont uniformément continues (théorème de Heine) ;

— il arrive parfois qu'une suite de fonctions converge uniformément sur tout segment sans converger uniformément sur tout l'intervalle.

L'uniforme continuité est particulièrement importante dans l'étude d'intégrales, en général lorsqu'on étudie une différence entre une intégrale et une somme de Riemann (parce que c'est le cadre naturel où il apparaît des différences de la forme $|f(x) - f(a_i)|$ avec trop de a_i distincts pour que la continuité suffise à avoir un module commun de continuité), mais pas seulement. C'est le cadre le plus naturel où il faut penser à l'uniforme continuité sans hésiter.

Pour le reste, cela dépend du contexte de l'exercice. À vous de juger si vous parvenez dans un premier temps à traiter l'exercice en remplaçant l'intégrande par une fonction en escalier ou une fonction polynomiale, ou en supposant qu'il est borné, etc. Si c'est le cas, vous pouvez PEUT-ÊTRE envisager d'étendre votre raisonnement à un intervalle quelconque en approchant votre intégrale par une intégrale par un segment.

2 Quand se ramener à une somme de Riemann ?

Le cadre le plus naturel est celui où les hypothèses du problème se traduisent plus naturellement avec des sommes finies : la convexité et la linéarité par exemple. Les sommes de Riemann permettent, par passage à la limite (et s'il y a continuité), d'écrire cette même propriété avec des intégrales.

Exemple 1. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application $\mathbb{R}$-linéaire et continue (cette dernière précision est superflue quand on sait que toute application linéaire définie sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie est continue). On veut montrer que pour toute fonction continue $g : [a, b] \to \mathbb{C}$, on a :

$$f\left(\int_a^b g(x)\cos(x)\mathrm{d}x\right) = \int_a^b f(g(x))\cos(x)\mathrm{d}x.$$

Comme la linéarité s'exprime volontiers avec des sommes, on s'y ramène et on regarde ce qu'il se passe au niveau des sommes de Riemann. Posons donc : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_{k,n} = a + \dfrac{k(b-a)}{n}$, et : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $S_n = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} g\left(a_{k,n}\right)\cos\left(a_{k,n}\right)$. On a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_a^b g(x)\cos(x)\mathrm{d}x$, donc par continuité de f on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f\left(S_n\right) = f\left(\int_a^b g(x)\cos(x)\mathrm{d}x\right)$. Mais on a aussi, cette fois-ci par $\mathbb{R}$-linéarité :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad f\left(S_n\right) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\cos(a_{k,n}) f\left(g\left(a_{k,n}\right)\right).$$

On reconnaît une somme de Riemann associée à $f \circ g \cdot \cos$, qui est continue. Donc : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f\left(S_n\right) = \int_a^b f(g(x))\cos(x)\mathrm{d}x$. Par unicité de la limite, on a démontré le résultat voulu.

Nous donnons une autre situation où l'on peut se ramener à une somme de Riemann : lorsqu'on veut intégrer par parties alors qu'il n'y a pas de fonction de classe C^1 en jeu. À la place : on approche l'intégrale par une somme, avec laquelle on effectue une transformation d'Abel (qui est l'analogue discret de l'intégration par parties et a l'avantage de ne pas nécessiter d'hypothèse de régularité). On en parle plus amplement dans la section 8.4 du document *Méthodes* du chapitre sur les séries numériques.

3 Fonctions en escalier, ou applications polynomiales : que choisir ?

Lorsque vous êtes sur un segment et que les hypothèses sur f sont trop restrictives pour vous permettre d'effectuer un raisonnement qui aboutit, vous pouvez regarder ce qu'il en est si l'on remplace f par une fonction en escalier ou polynomiale (cependant le topologue le sait bien : cette tentative n'a aucun intérêt si l'ensemble des fonctions à vérifier l'objet de l'exercice *n'est pas un fermé*). C'est d'ailleurs ainsi qu'en 1re année, vous avez démontré toutes les propriétés de base de l'intégrale (linéarité, relation de Chasles, croissance...). Vous les avez démontrées pour des fonctions en escalier, où l'affaire était triviale, puis par passage à la limite vous les avez étendues à toute fonction continue par morceaux.

On peut se demander par quoi approcher f : par des fonctions en escalier, ou des fonctions polynomiales ? En fait le premier choix est presque toujours le meilleur dans un contexte d'intégration, parce qu'une fonction en escalier est une combinaison linéaire de fonctions indicatrices, c'est-à-dire de fonctions constantes par morceaux : y a-t-il plus simple à intégrer ? De plus l'approximation par des fonctions en escalier est moins gourmand en hypothèses : il suffit d'avoir la continuité *par morceaux.*

Ainsi, lorsqu'on veut montrer qu'un résultat est vrai pour toute fonction en escalier, on commence par le montrer par une fonction indicatrice (égale à 1 sur un segment et nulle ailleurs : cela rend le calcul trivial). Par linéarité de l'intégrale, on a le résultat pour toute fonction en escalier, et on espère en déduire le résultat pour toute fonction continue par morceaux par densité.

Mais dans ce cas, quand est-il préférable d'utiliser la densité des applications polynomiales ? Lorsqu'une hypothèse de l'énoncé fait intervenir une égalité vraie pour toute application polynomiale. On peut être même moins exigeant. On peut penser aux applications polynomiales dès qu'une hypothèse de l'énoncé :

— concerne **toute fonction puissance** (des puissances entières suffisent), puisque la linéarité de l'intégrale permet de l'étendre à tout polynôme ;

— plus généralement, donne une égalité intégrale vraie pour **toute puissance de n'importe quelle fonction**, puisque la formule du changement de variable permet de se ramener au cas précédent.

Un exemple concret permettra d'y voir clair.

Exemple 2. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ et négligeable devant $x \mapsto e^{-x}$ au voisinage de $+\infty$. On suppose que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} f(x)e^{-nx}\mathrm{d}x = 0$, et on veut démontrer que f est nulle. Pour cela, on note qu'en faisant le changement de variable $u = e^{-x}$, cette égalité équivaut à : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{e^{-1}} u^{-1}f(-\ln(u))u^n\mathrm{d}u = 0$. Comme $(u \mapsto u^n)_{n\in\mathbb{N}}$ engendre l'espace des applications polynomiales, par linéarité de l'intégrale on a aussi l'égalité : $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $\int_0^1 u^{-1}f(-\ln(u))P(u)\mathrm{d}u = 0$. Or $g : u \mapsto u^{-1}f\left(-\ln(u)\right)$ se prolonge en une application continue sur $[0,1]$ (pourquoi ?), donc par le théorème d'approximation de Weierstraß il existe une suite d'applications polynomiales $(P_n)_{n\geqslant 0}$ convergeant uniformément sur $[0,1]$ vers g. Comme $(P_ng)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers g^2, l'égalité ci-dessus donne, quand on l'évalue en $P = P_n$ et qu'on passe à la limite : $\int_0^1 (g(u))^2\mathrm{d}u = 0$. Une application continue, positive et d'intégrale nulle est identiquement nulle, donc : $g = 0$. On en déduit : $f = 0$.

Exercice 1. Compléter les détails omis ci-dessus :

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)e^{-nx}\mathrm{d}x = 0$ converge.
2. Justifier la continuité sur $[0,1]$ de $g : u \mapsto u^{-1}f(-\ln(u))$.
3. Vérifier que $(P_ng)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers g.
4. Vérifier que $g = 0$ implique $f = 0$.

On se convaincra qu'ici, l'approximation par des fonctions en escalier n'aurait pas apporté grand'chose.

4 Fonctions en escalier, ou sommes de Riemann : que choisir ?

Il semble que cela revienne au même : une somme de Riemann est en effet l'intégrale d'une fonction en escalier bien choisie. En vérité, c'est plutôt si l'on a une intégrale de la forme : $\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$, que la question se pose : veut-on approcher par une somme de Riemann associée à la fonction fg, ou veut-on approcher uniquement f ou g par une fonction en escalier ?

Pour savoir si une approximation prévaut sur l'autre, méditez sur le point suivant, qui n'a cependant rien d'une règle absolue : si g est explicite et le calcul de $\int_a^b g$ facile : **approchez uniquement f par une fonction en escalier**.

Pour l'illustrer : si l'on vous demande de démontrer un résultat concernant l'intégrale $\int_0^{\pi} f(t)\cos(xt)\mathrm{d}t$, et que vous choisissez de raisonner par approximation, on conviendra que la somme de Riemann $\frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{xk\pi}{n}\right)$ est bien plus pénible à étudier que l'intégrale où l'on a approché f par une fonction en escalier : $\int_0^{\pi}\sum_{i=0}^{p} c_i\mathbb{1}_{[a_i,b_i]}\cos(xt)\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{p} c_i\frac{\sin(xb_i) - \sin(xa_i)}{x}$.

Dans les autres cas, vous choisirez en général d'approcher par une somme de Riemann. Celles-ci ont un autre intérêt : son terme général dépend très explicitement des fonctions en jeu. Si on a des hypothèses sur ces fonctions (uniforme continuité, monotonie...), elles sont donc en quelque sorte préservées dans les sommes de Riemann. Dans une approximation par une fonction en escalier non explicite, on n'en sait rien.

On lira cette section en complément de la suivante.

5 Quand n'est-il PAS pertinent de raisonner par densité ?

Ne perdez pas de vue que la convergence uniforme est une notion exigeante : ce N'est PAS parce que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers f que :

- f et les f_n partagent les mêmes propriétés ;
- les suites $(f_n')_{n\geqslant 0}$, $(F_n)_{n\geqslant 0}$ (primitives de f), $(f_n^{-1})_{n\geqslant 0}$ (réciproques), convergent uniformément vers f', F (primitive de f) et f^{-1} respectivement (il n'est même pas certain que f_n^{-1} existe même si f^{-1} existe).

Par conséquent, si une identité à démontrer implique non seulement une fonction f, mais aussi sa dérivée, ou une de ses primitives, ou sa bijection réciproque (comme dans l'égalité de Young), etc., il y a très peu de chance qu'un raisonnement par densité vous le permette : même si vous démontrez le résultat pour f_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, vous ne pourrez pas passer à la limite pour tout exprimer en fonction de f.

C'est une autre piste qui peut éventuellement vous aiguiller vers les sommes de Riemann plutôt que les fonctions en escalier.

Table des matières