Méthodes (MP) – Intégration

Pour les méthodes générales de calcul intégral (intégrale d'une fraction rationnelle, du produit d'une exponentielle par une fonction trigonométrique, ou d'un polynôme par une fonction trigonométrique, etc.), nous vous renvoyons à votre cours de 1re année.

1 ✓ Étudier la nature d'une intégrale $\int_I f$

Si $I = [a, b[$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, et si $f : I \to \mathbb{C}$ est une application continue par morceaux sur I, les cas les plus simples où l'on peut déterminer la nature de $\displaystyle\int_a^b f$ sont :

— si f admet une limite finie en b ; en ce cas, f se prolonge par continuité en une application $\tilde{f} : [a, b] \to \mathbb{C}$ continue sur le SEGMENT $[a, b]$, donc $\displaystyle\int_a^b \tilde{f}$ converge et $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b \tilde{f}$ également ; chercher si f admet une limite finie en b est donc la première chose à faire – *via* un équivalent asymptotique qui, de toute façon, nous reste utile même si la limite n'est pas finie, pour des relations de comparaison ultérieures (notons qu'une limite infinie en b, ou inexistante, NE démontre RIEN, au même titre qu'une limite nulle si $b = +\infty$) ;

— si on connaît la limite en b d'une primitive de f.

Plus généralement :

— on mentionne l'intervalle où f est continue (par morceaux) : cela permet d'identifier où sont les problèmes éventuels (les deux bornes ? une seule ? nulle part ?) ;

— si I est un intervalle borné, on regarde si f admet une limite finie aux bornes ; si oui, elle se prolonge en une application continue sur un segment et est donc intégrable ;

— on utilise les théorèmes de comparaison avec f, ou $|f|$ si f n'est pas positive, au voisinage de chaque borne problématique : pour cela, vous pouvez utiliser des équivalents asymptotiques ou des inégalités seulement valables au voisinage de a (remarque analogue si f est continue sur $I = [a, b[$ ou $I =]a, b[$) ;

— si f n'est pas positive ni intégrable, cela se complique : s'inspirer des cas déjà traités par intégration par parties ou changement de variable, et regarder si $\displaystyle\int_I f$ se prête à un raisonnement analogue ; sinon, voir les pistes proposées ci-dessous ou la section 3.1. → page 4

C'est plus rare, mais nous pouvons comme dans le cas des séries, en avant-dernier recours, étudier la nature de $\displaystyle\int_I f$, dans le cas où f est de signe inconstant, à l'aide d'un développement asymptotique. Ainsi on écrit $f = g + h$, où $\displaystyle\int_I h$ converge, de sorte que $\displaystyle\int_I f$ et $\displaystyle\int_I g$ soient de même nature.

Exemple 1. Étudions la nature de $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t} + \sin(t)} \mathrm{d}t$ ainsi. L'application $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{\sqrt{t} + \sin(t)}$ est continue sur $[\pi, +\infty[$: étudions le problème éventuel d'intégrabilité au voisinage de $+\infty$. Pour tout t au voisinage de $+\infty$, on a $\dfrac{\sin(t)}{\sqrt{t}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc :

$$\begin{aligned} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t} + \sin(t)} = \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}} &= \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} \left(1 - \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} + \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} \right) \right) \\ &= \underbrace{\frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}}_{=g(t)} \underbrace{- \frac{(\sin(t))^2}{t} + \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{(\sin(t))^2}{t} \right)}_{=h(t)}. \end{aligned}$$

Or l'intégrale $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} g(t) = \int_\pi^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t$ converge, donc $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t} + \sin(t)} \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} h(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature. Mais :

$$h(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{(\sin(t))^2}{t} > 0,$$

et on sait démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{(\sin(t))^2}{t}\mathrm{d}t$ est divergente ; ainsi $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} h(t)\mathrm{d}t$ diverge par comparaison.

On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}+\sin(t)}\mathrm{d}t$, qui est de même nature, diverge aussi.

Exercice 1. Vérifier les résultats admis dans cet exemple :

1. Montrer que $\displaystyle\frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ converge.
3. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{(\sin(t))^2}{t}\mathrm{d}t$ diverge. On pourra soit s'inspirer de la méthode de la section 3.1, soit utiliser ingénieusement une formule de trigonométrie impliquant $\sin^2$ afin de se ramener à des intégrales classiques. → page 4

Comme dans le cas des séries, il n'y a pas de méthode systématique.

Je pense que le plus sage reste, pour ne pas s'emmêler les pinceaux, de comprendre ce qu'on fait dans les grandes lignes : **éliminer autant de points problématiques que possible grâce à la continuité, et traiter les points restants (il y en a au plus deux) avec des méthodes de comparaison à leur voisinage**. Si l'approche échoue, considérer d'autres recours (intégration par parties en général).

Les relations de comparaison doivent, dans le meilleur des cas, nous ramener aux fonctions de Riemann, dont nous rappelons l'intégrabilité dans l'encart de la figure 1.

Figure 1 – Intégrales de référence.

- **si** $I = [1, +\infty[$: l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^s}$ converge si et seulement si $s > 1$;
- **si** $I =]0,1]$: l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t^s}$ converge si et seulement si $s < 1$;
- **si** $I =]b, a]$**, où** $a, b \in \mathbb{R}$: l'intégrale $\displaystyle\int_{b}^{a} \frac{\mathrm{d}t}{(t-b)^s}$ converge si et seulement si $s < 1$ (résultat analogue si $I = [a, b[$).

Il est synonyme ici, puisque les fonctions sont positives, de dire :

- **si** $I = [1, +\infty[$: l'application $t \mapsto \dfrac{1}{t^s}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ si et seulement si $s > 1$;
- **si** $I =]0,1]$: l'application $t \mapsto \dfrac{1}{t^s}$ est intégrable au voisinage de 0 si et seulement si $s < 1$;
- **si** I **admet pour extrémité** $b \in \mathbb{R}$: l'application $t \mapsto \dfrac{1}{(t-b)^s}$ est intégrable au voisinage de b si et seulement si $s < 1$.

On retiendra en particulier :

- l'application $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ n'est intégrable ni au voisinage de $+\infty$, ni au voisinage de 0 ;
- **l'intégrale** $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^s}$ **ne converge jamais !**
- que ce soit au voisinage de 0 ou de $+\infty$, ce sont les fonctions puissances dont le graphe est « sous » celui de $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ qui sont intégrables.

La fonction inverse $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sert donc, graphiquement, de ligne de démarcation entre les fonctions de Riemann intégrables et celles qui ne le sont pas (au voisinage de 0 et de $+\infty$). Voir la figure 5. → page 39

Pour l'agrément, nous avons également pour intégrale de référence $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}\mathrm{d}t$, mais elle n'est **jamais** indispensable. Comparer aux fonctions de Riemann suffit.

Étudier la nature de $\displaystyle\int_I f$ par comparaison : cas positif

1. Mentionner où f est continue.
2. Trouver si possible un équivalent simple aux extrémités où f n'est pas continue.
3. Déduire de ces équivalents si :
   — f se prolonge par continuité sur un segment ;
   — f est équivalente à $\dfrac{1}{t^\alpha}$;

   et conclure le cas échéant.
4. Sinon : méthode « $t^\alpha f(t)$ ». Prendre $\alpha = 2$ marche presque toujours si f est à décroissance exponentielle.

Si f n'est pas positive : reprendre les étapes 3 et 4 avec $|f|$ (convergence absolue).

L'intégrale de référence $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}\mathrm{d}t$ est superflue et vous induit parfois en erreur.

2 ✓ Comparer aux intégrales de Riemann en pratique

C'est comme dans le cas des séries : on utilise les développements limités et équivalents asymptotiques usuels. Si cela ne permet pas d'obtenir directement un équivalent à une fonction de Riemann : on étudie $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{1/t^\alpha}$ ou $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\frac{f(t)}{1/t^\alpha}$ pour « forcer la comparaison ». C'est semblable au voisinage de 0, *en inversant les conclusions* selon que $\alpha > 1$ ou $\alpha \leqslant 1$. Attention !

Détails. Soit f une fonction continue par morceaux et positive sur $[a,+\infty[$ et soit $\alpha \in \mathbb{R}$:

— si $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^\alpha f(t) = L \neq 0$, alors $f(t) \sim \dfrac{L}{t^\alpha}$ quand $t \to +\infty$, et donc $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ sont de même nature : on a convergence de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ si et seulement si $\alpha > 1$ (si vous tombez dans ce cas-là, c'est que vous n'avez pas remarqué qu'un équivalent à une fonction de Riemann pouvait s'obtenir directement *via* des développements usuels : la méthode « $t^\alpha f(t)$ » est normalement inutile dans ce cas-là) ;

— si $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^\alpha f(t) = 0$ et $\alpha > 1$, alors : $f(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^\alpha}\right)$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge donc $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge également par comparaison (le cas $\alpha \leqslant 1$ ne permet pas de conclure) ;

— si $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^\alpha f(t) = +\infty$ et $\alpha \leqslant 1$, alors $f(t) \geqslant \dfrac{1}{t^\alpha}$ pour t assez grand et $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ diverge, donc $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ diverge également par comparaison (le cas $\alpha > 1$ ne permet pas de conclure)

Je rappelle qu'on inverse les conclusions si l'étude est au voisinage de 0. Si le problème d'intégrabilité est au voisinage d'un autre réel $a \in \mathbb{R}$ que 0, il suffit d'étudier à la place : $\displaystyle\lim_{t\to a}|t-a|^\alpha f(t)$.

Si vous n'avez pas d'idée du α qui pourrait convenir : vous faites le calcul de limite pour α quelconque dans un premier temps. Selon que la limite soit nulle ou infinie, vous obtenez une relation de comparaison entre f et les fonctions de Riemann d'exposant α, qui dépend de la valeur de α. Vous regardez alors si ces relations de comparaison permettent de conclure pour une valeur de α bien choisie.

Exemple 2. Étudions la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ *via* cette méthode (l'intégrande est continu sur $]0,1]$ et donc le problème éventuel d'intégrabilité est au voisinage de 0). Je détaille la réflexion afin de rendre clair mon choix final de α. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a, au voisinage de l'infini :

$$t^\alpha \left|\frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\right| = -t^{\alpha-1/2}\ln(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha - 1/2 > 0, \\ +\infty & \text{si } \alpha - 1/2 \leqslant 0, \end{cases}$$

par croissances comparées pour le cas $\alpha - 1/2 > 0$. Au brouillon, on confronte les deux cas de figure :

$$\forall \alpha \leqslant \frac{1}{2},\ \left|\frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\right| \geqslant \frac{1}{t^\alpha} > 0 \text{ (près de 0)}, \quad \forall \alpha > \frac{1}{2},\ \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} \underset{t\to 0}{=} o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right).$$

On se demande s'il est possible d'avoir une minoration par une fonction non intégrable dans le premier cas : non, car il faudrait à la fois $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$ pour que la minoration soit valable, et $\alpha \geqslant 1$ pour que le minorant soit une fonction de Riemann *non intégrable*. C'est impossible. On passe au deuxième cas : est-il possible d'avoir à la fois $\alpha > \frac{1}{2}$ (pour que la relation de comparaison soit vraie) et $\alpha < 1$ (pour avoir une domination par une fonction de Riemann *intégrable*) ? Bien sûr que oui : il suffit de prendre $\alpha = \frac{3}{4}$ par exemple. Pour cette valeur, on a alors :

$$\frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} \underset{t\to 0}{=} o\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{4}}}\right),$$

et on conclut par comparaison que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ converge absolument donc converge. Bien sûr, quand on rédige au propre, ou si l'on voit à l'œil nu quel choix de α va marcher, il est inutile de faire cette fastidieuse disjonction de cas.

Deux cas particuliers permettent de conclure rapidement :

— **si f est une exponentielle décroissante, ou du moins a une exponentielle décroissante en facteur**, alors les croissances comparées devraient assurer que f est négligeable devant $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ au voisinage de $+\infty$ quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$, et donc pour $\alpha = 2 > 1$ en particulier (démontrant l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$) ;

— **si f est logarithmique**, alors les croissances comparées devraient assurer que f est négligeable devant $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ au voisinage de 0 quel que soit $\alpha > 0$ (attention à être plus soigneux s'il y a d'autres facteurs qu'un facteur logarithmique dans la définition de f), et donc pour $\alpha = \dfrac{1}{2} < 1$ en particulier (démontrant l'intégrabilité au voisinage de 0).

Vous gagnerez du temps si vous faites ces constats. Exercez-vous sur ces intégrales que vous rencontrerez souvent :

Exercice 2.

1. Étudier la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^a e^{-t^2}\mathrm{d}t$ selon la valeur de $a \in \mathbb{R}$.
2. Étudier la nature de $\displaystyle\int_0^1 t^b(\ln(t))\mathrm{d}t$ selon la valeur de $b \in]-1,0[$.

3 ☢ Natures d'intégrales obtenues par comparaison à des séries

3.1 Cas de divergence

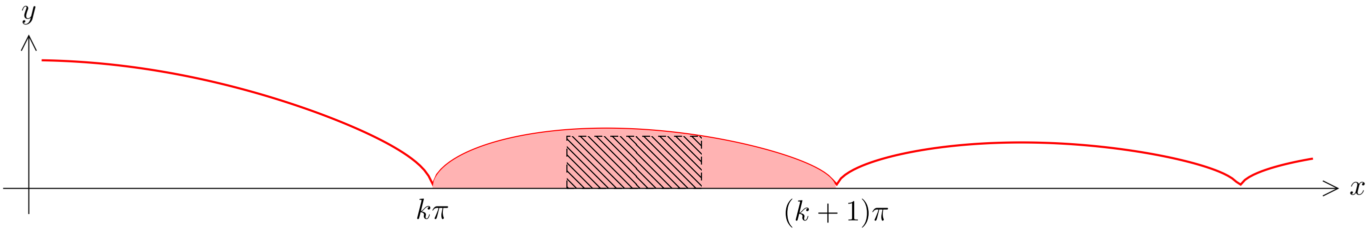
On se place dans le cas très délicat où raisonner *via* les méthodes classiques échoue, ou du moins échoue sans plus d'approfondissement. **C'est le cas en général lorsque nous avons une fonction trigonométrique, cosinus ou sinus** (en effet elles n'ont pas d'équivalent simple au voisinage de $+\infty$, et comme elles s'annulent souvent il est impossible de les minorer par une fonction de Riemann), et aucune domination facile par une fonction de Riemann intégrable. Voici quelques exemples :

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\sin(t))^2}{t}\mathrm{d}t, \quad \int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{|\sin(t)|}{t}}\mathrm{d}t, \quad \int_0^{+\infty} |\sin(t)|^t\mathrm{d}t.$$

Dans ces cas, puisque toute approche classique semble échouer (sauf pour la première intégrale où une formule de trigonométrie simplifie la tâche : exercice 1 du document), on est contraint de montrer la convergence ou divergence « à la main » (en général il y a divergence dans le cas d'un intégrande positif). ← page 2

Pour la divergence, on cherche une minoration de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ par une somme qui vaut $+\infty$. L'interprétation de l'intégrale en tant qu'aire sous la courbe nous donne une piste pour cette minoration : on regarde l'aire sur chaque période, en la minorant par l'aire d'un rectangle de taille raisonnable, et on somme :

FIGURE 2 – Gestion des cas difficiles sur une période.



Pour trouver un rectangle convenable, en général, on peut prendre arbitrairement sa base, **tant que f y est strictement positive** (pour pouvoir la minorer non trivialement), et que sa hauteur reste toujours en dessous de la courbe de f : pour cela, il suffit de prendre **une hauteur égale à la plus petite valeur prise par f sur la base du rectangle**. On prend souvent un rectangle centré sur le milieu de la période, par commodité, mais ce n'est pas indispensable. Alors, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ est minorée par une somme d'aires de rectangle qui, si tout va bien, est la somme d'une série divergente *à termes positifs* ; elle vaut donc l'infini, et cela prouve : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f = +\infty$.

Montrer la divergence d'une intégrale : cas difficile

(∗) Utiliser la relation de Chasles pour se placer sur des périodes.

(†) Si la fonction est positive : restreindre l'intervalle d'intégration à un intervalle où la fonction ne s'annule pas.

(‡) Minorer la fonction sur cet intervalle pour faire apparaître une somme qui tend vers $+\infty$ (série divergente).

Exemple 3. Montrons que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{|\sin(t)|}{t}}\mathrm{d}t$ diverge, en suivant la méthode ci-dessus. Le raisonnement est représenté graphiquement sur la figure 3. On a : → page 6

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{|\sin(t)|}{t}}\mathrm{d}t \overset{(*)}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \sqrt{\frac{|\sin(t)|}{t}}\mathrm{d}t$$

(comme $|\sin|$ est π-périodique, on se place sur des intervalles de longueur π avec la relation de Chasles)

$$\overset{(\dagger)}{\geqslant} \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{(k+\frac{1}{6})\pi}^{(k+\frac{5}{6})\pi} \sqrt{\frac{|\sin(t)|}{t}}\mathrm{d}t$$

(on choisit un sous-intervalle de $[k\pi, (k+1)\pi]$, peu importe lequel, où le sinus ne s'annule pas, ce qui permettra de le minorer par une quantité strictement positive)

$$\overset{(\ddagger)}{\geqslant} \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{(k+\frac{1}{6})\pi}^{(k+\frac{5}{6})\pi} \sqrt{\frac{1/2}{t}}\mathrm{d}t$$

(on a $|\sin(t)| \geqslant \frac{1}{2}$ pour tout $t \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$, donc aussi pour tout $t \in \left[\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{5\pi}{6} + k\pi\right]$ par π-périodicité)

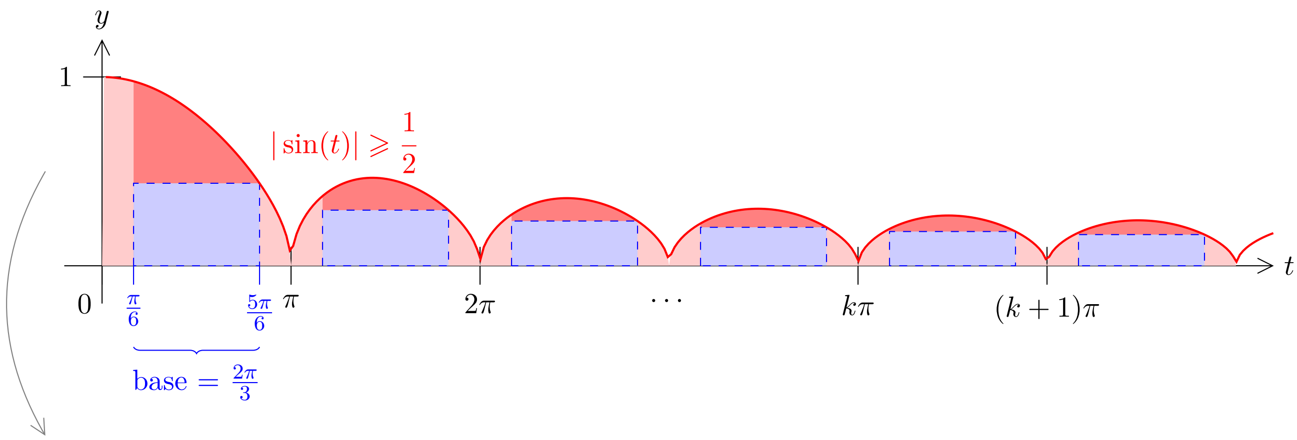
$$\geqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{(k+\frac{1}{6})\pi}^{(k+\frac{5}{6})\pi} \sqrt{\frac{1}{2\left(k+\frac{5}{6}\right)\pi}}\mathrm{d}t$$

(le plus dur a été fait, et la minoration $\frac{1}{t} \geqslant \frac{1}{(k+\frac{5}{6})\pi}$ n'est pas nécessaire pour conclure ; mais elle facilite l'interprétation géométrique)

On a donc :

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{|\sin(t)|}{t}}\mathrm{d}t \geqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{2\pi}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\left(k+\frac{5}{6}\right)\pi}}}_{\text{aires des rectangles (figure 3)}} .$$

Figure 3 – Divergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{|\sin(t)|}{t}}\mathrm{d}t$: démonstration géométrique (donc excellente).



$$\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{|\sin(t)|}{t}}\mathrm{d}t \overset{(\dagger)}{\geqslant} \sum_{k=0}^{+\infty} \quad \overset{(\ddagger)}{\geqslant} \sum_{k=0}^{+\infty} \quad = \sum_{k=0}^{+\infty} (\text{base} \times \text{hauteur}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2\pi}{3} \times \sqrt{\frac{1}{2\left(k+\frac{5}{6}\right)\pi}} = +\infty$$

Or la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{\left(k+\frac{5}{6}\right)}}$ diverge du fait que $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{\left(k+\frac{5}{6}\right)}} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{k}}$ et de la divergence de la série de Riemann $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{k}}$. Comme elle est à termes positifs, sa somme vaut $+\infty$. On en déduit :

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{|\sin(t)|}{t}}\mathrm{d}t \geqslant \frac{2\pi}{3\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\left(k+\frac{5}{6}\right)}} = +\infty.$$

On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{|\sin(t)|}{t}}\mathrm{d}t$ diverge.

Exercice 3. Produire une minoration de $\displaystyle\int_0^{N\pi} \sqrt{\frac{|\sin(t)|}{t}}\mathrm{d}t$ par une quantité explicite, sans symbole somme, dépendant de N et tendant vers $+\infty$.

Exercice 4. Traiter de même l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\sin(t))^2}{t}\mathrm{d}t$.

☢ **Exercice 5.** Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\sin(t)|^t \mathrm{d}t$. Vous aurez besoin d'un équivalent asymptotique simple des intégrales de Wallis.

3.2 Cas de convergence

On peut aussi s'inspirer de la méthode ci-dessus pour montrer la *convergence* de certaines intégrales de la forme $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ pour lesquelles les méthodes classiques (convergence absolue et théorème de comparaison) ne fonctionnent pas. En général, le problème est qu'on ne parvient pas à avoir une majoration de $|f|$ sur $[a,+\infty[$ ou $]a,+\infty[$ suffisamment bonne pour qu'elle soit intégrable. Un exemple typique est la fonction $f : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$: la meilleure majoration possible de $|f|$ sur $]0,+\infty[$ est $t \mapsto \frac{1}{t}$, qui n'est pas intégrable au voisinage de 0 et de $+\infty$. Une piste éventuelle (outre l'approche plus classique d'une intégration par parties, cf. la section 4.3) est encore une fois, si f dépend d'une fonction périodique (disons π ou 2π-périodique sur $[0,+\infty[$ pour fixer les idées : c'est le cas le plus fréquent), d'écrire l'intégrale comme une somme d'intégrales sur chaque période grâce à la relation de Chasles : ← page 12

$$\int_0^{N\pi} f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{N-1} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\mathrm{d}t.$$

Notez bien que l'intégrale du membre de gauche ne va pas jusqu'à l'infini, puisqu'on ne sait pas encore si $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ existe : c'est justement ce qu'on veut prouver ! En revanche, si f est positive, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ a un sens *a priori* et il est correct d'écrire, qu'il y ait convergence ou non : $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\mathrm{d}t$. Attention à ne pas le généraliser à une intégrale quelconque.

Ensuite, bien que ce ne soit pas toujours nécessaire, je recommande le changement de variable $u = t - n\pi$ afin que le terme général soit toujours une intégrale sur le même intervalle :

$$\int_0^{N\pi} f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{N-1} \int_0^{\pi} f(u+n\pi)\mathrm{d}u.$$

Écrire ainsi l'intégrale peut avoir deux avantages absents avec l'intégrale initiale, et nous permettant de conclure :

— grâce aux formules de trigonométrie bien connues, en particulier :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x+n\pi) = (-1)^n \cos(x),\ \sin(x+n\pi) = (-1)^n \sin(x),$$

vous pouvez éventuellement faire apparaître **une somme alternée**, qui est d'ailleurs souvent visible à l'œil nu (voir figure 4), dont il reste à vérifier les trois hypothèses du théorème spécial (chose souvent assez aisée par croissance de l'intégrale) ;

— ou bien, se ramener à un segment plus petit permet d'y utiliser des inégalités qui seraient fausses si l'on intégrait jusqu'à l'infini (par exemple : l'inégalité $\sin(x) \geqslant \frac{2}{\pi}x$ n'est valable que si $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$) ; ces nouvelles inégalités permettent éventuellement de majorer :

$$\left|\int_0^{\pi} f(u+n\pi)\mathrm{d}u\right|$$

par le terme général d'une **série** convergente (et non d'une intégrale convergente ! on regarde si la SOMME $\sum_{n=0}^{N} \int_0^{\pi} f(u+n\pi)\mathrm{d}u$ admet une limite finie quand $N \to +\infty$, donc on s'intéresse à la convergence d'une série).

Dans les deux cas, cela peut nous permettre éventuellement d'en déduire la convergence de la série :

$$\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{\pi} f(u+n\pi)\mathrm{d}u,$$

et donc que la suite $\left(\int_0^{N\pi} f(t)\mathrm{d}t\right)_{N\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie quand $N \to +\infty$, d'après l'égalité plus haut.

Mais ce n'est pas suffisant pour en déduire que $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge. En effet, les limites de $\int_0^{x} f(t)\mathrm{d}t$ quand $x \to +\infty$, et de $\int_0^{N\pi} f(t)\mathrm{d}t$ quand $N \to +\infty$ (avec N un paramètre entier), peuvent ne

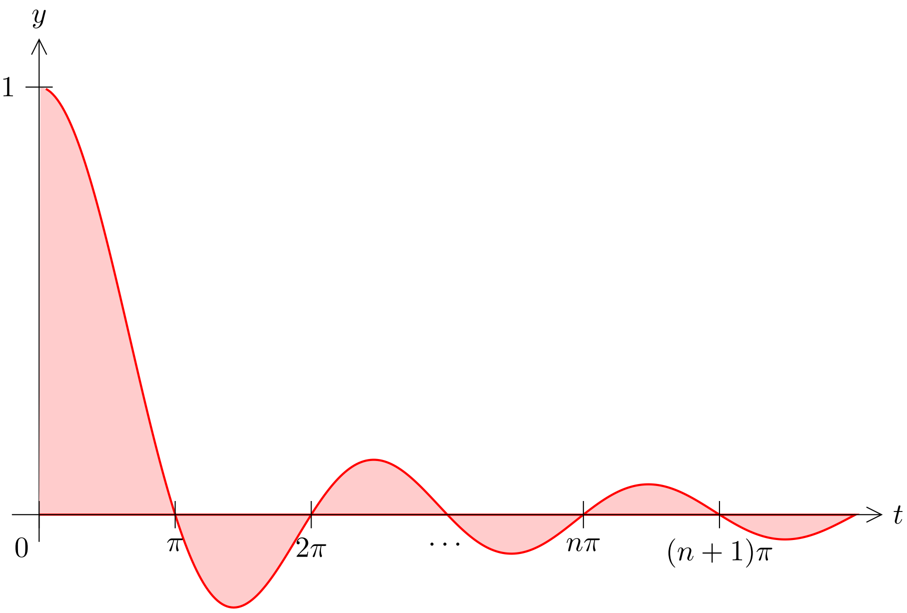


FIGURE 4 – Intégrale de Dirichlet $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$: les aires (absolues) sur des périodes forment clairement une suite alternée, décroissante, convergeant vers 0.

rien avoir en commun.

Exemple 4. (Pour montrer qu'on doit être vigilant) Comparons la limite quand $x \to +\infty$ de $\displaystyle\int_0^x \cos(t)\mathrm{d}t$ et celle quand $N \to +\infty$ (paramètre entier) de $\displaystyle\int_0^{N\pi} \cos(t)\mathrm{d}t$. C'est facile, puisque le calcul direct est possible :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{N\pi} \cos(t)\mathrm{d}t = [\sin(t)]_0^{N\pi} = \sin(N\pi) = 0,$$

donc : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_0^{N\pi} \cos(x)\mathrm{d}x = 0$. Mais si l'on fait de même en intégrant jusqu'à un **réel quelconque** x, on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^x \cos(t)\mathrm{d}t = \sin(x)$, et c'est un exercice standard de 1re année de démontrer que le sinus n'admet pas de limite en $+\infty$, en prenant deux suites extraites convenables (nous vous laissons revoir votre cours). Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t)\mathrm{d}t$ diverge, bien que $\displaystyle\left(\int_0^{N\pi} \cos(t)\mathrm{d}t\right)_{N\in\mathbb{N}}$ converge.

Par contre, quand la première limite existe, la seconde aussi et doit lui être égale : c'est la caractérisation séquentielle de la limite qui l'assure.

Comment conclure, dans ce cas, une fois prouvée la convergence de $\displaystyle\left(\int_0^{N\pi} f(t)\mathrm{d}t\right)_{N\in\mathbb{N}}$? Si $f \geqslant 0$, alors c'est facile : le cours vous dit que l'on a dans ce cas, sans hypothèse de convergence : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\mathrm{d}t$. Par conséquent, la convergence de $\displaystyle\left(\int_0^{N\pi} f(t)\mathrm{d}t\right)_{N\in\mathbb{N}}$ implique la finitude du membre de droite de cette égalité, et donc aussi du membre de gauche : ceci équivaut à la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$.

Si l'on n'est pas dans ce cas de figure très favorable, alors la relation de Chasles permet d'écrire, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ en fonction de $\displaystyle\int_0^{N\pi} f(t)\mathrm{d}t$:

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{N\pi} f(t)\mathrm{d}t + \int_{N\pi}^x f(t)\mathrm{d}t.$$

On choisit N de sorte que $N\pi$ soit « aussi près que possible » de x, c'est-à-dire tel que $N\pi \leqslant x < (N+1)\pi$ par exemple. Cela revient à prendre pour N une partie entière convenable (par exemple $N = [\frac{x}{\pi}]$, vu que N doit être le plus grand entier tel que $N\pi \leqslant x$, c'est-à-dire tel que $N \leqslant \frac{x}{\pi}$). Alors, quand $x \to +\infty$, on a $N \to +\infty$ également, et d'après l'étude qui précède la quantité $\int_0^{N\pi} f(t)\mathrm{d}t$ admet une limite finie. Il reste alors à montrer qu'il en est de même pour $\int_{N\pi}^{x} f(t)\mathrm{d}t$: pour cela, on majore $|f|$ par une quantité ε_n ne dépendant pas de t et convergeant vers 0 (souvent très facile à faire), de sorte que :

$$0 \leqslant \left|\int_{N\pi}^{x} f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon_n \int_{N\pi}^{x} \mathrm{d}t = (x - N\pi)\varepsilon_n.$$

Comme $N\pi$ a été choisi aussi proche que possible de x (voir l'encadrement plus haut), on peut majorer $x - N\pi$ par π (pourquoi ?), et alors : $\lim_{x\to+\infty} \int_{N\pi}^{x} f(t)\mathrm{d}t = 0$ grâce au théorème des gendarmes.

Évidemment, si la période utilisée dans la relation de Chasles n'est pas π, on s'adapte.

Montrer la convergence d'une intégrale : cas difficile

($*$) Utiliser la relation de Chasles pour se placer sur des périodes, et faire un changement de variable nous ramenant à un intervalle fixe.

($\dagger$) Deux possibilités :

(a) Reconnaître une série vérifiant le théorème spécial des séries alternées ;

(b) Montrer l'absolue convergence de la série grâce à des inégalités qui ne sont valables que sur une période.

On en déduit la convergence de $\int_0^{\alpha_N} f$ quand $N \to +\infty$ (paramètre entier), avec α_N un multiple d'une période.

($\ddagger$) Conclure :

(a) si $f \geqslant 0$: dire que $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\mathrm{d}t$ et que le membre de droite est fini par ce qui précède ;

(b) Sinon : écrire $\int_0^x f = \int_0^{\alpha_N} f + \int_{\alpha_N}^{x} f$ où N est choisi pour que $\alpha_N \approx x$, et montrer la convergence du second terme grâce à $f \to 0$ et $x - \alpha_N \ll 1$.

Exemple 5. (Illustration du cas ($\dagger$).(a)) Montrons la convergence de l'intégrale :

$$\int_{\pi}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t, \quad \text{où :} \quad \forall t \geqslant \pi,\ f(t) = e^{-\sqrt{\ln(t)}}\sin(t).$$

Une approche naïve conduirait à majorer l'intégrande ainsi : $\forall t \in [\pi, +\infty[,\ \left|e^{-\sqrt{\ln(t)}}\sin(t)\right| \leqslant e^{-\sqrt{\ln(t)}}$, mais le problème est que l'intégrale $\int_{\pi}^{+\infty} e^{-\sqrt{\ln(t)}}\mathrm{d}t$ est divergente. Il faut donc procéder autrement. Une intégration par parties fonctionnerait, mais avec beaucoup de peine. Nous allons plutôt suivre la méthode proposée dans cette section. Soit $N \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. On a :

$$\int_{\pi}^{N\pi} f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{N-1} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{N-1} \int_0^{\pi} f(u+n\pi)\mathrm{d}u = \sum_{n=1}^{N-1} (-1)^n \int_0^{\pi} e^{-\sqrt{\ln(u+n\pi)}}\sin(u)\mathrm{d}u,$$

où l'on a effectué le changement de variable $u = t - n\pi$. Posons par commodité :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad u_n = \int_0^{\pi} e^{-\sqrt{\ln(u+n\pi)}}\sin(u)\mathrm{d}u.$$

Montrons que la série $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n u_n$ vérifie le théorème spécial des séries alternées : on a $\sin \geqslant 0$ sur $[0,\pi]$ et l'exponentielle est positive, donc on a : $\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, $u_n = \int_0^{\pi} e^{-\sqrt{\ln(u+n\pi)}}\sin(u)\mathrm{d}u \geqslant 0$, ce qui prouve que la série $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n u_n$ est alternée. De plus : $\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, $\forall u\in[0,\pi]$, $\ln(u+(n+1)\pi)\geqslant \ln(u+n\pi)$ par croissance du logarithme, donc après quelques compositions on obtient :

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\ \forall u\in[0,\pi],\quad e^{-\sqrt{\ln(u+(n+1)\pi)}}\sin(u)\leqslant e^{-\sqrt{\ln(u+n\pi)}}\sin(u).$$

Par croissance de l'intégrale : $\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, $u_{n+1}\leqslant u_n$, donc la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante. Enfin :

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad 0\leqslant u_n\leqslant \int_0^{\pi} e^{-\sqrt{\ln(u+n\pi)}}\mathrm{d}u\leqslant e^{-\sqrt{\ln(n\pi)}}\pi \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc par le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. En conclusion, $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n u_n$ vérifie les hypothèses du théorème spécial des séries alternées, donc elle converge. D'après la relation de Chasles plus haut, cela équivaut à la convergence de la suite $\left(\int_{\pi}^{N\pi} f(t)\mathrm{d}t\right)_{N\geqslant 2}$. De plus, pour tout $x\geqslant 1$, si l'on pose $N=\left[\frac{x}{\pi}\right]$, on a :

$$0\leqslant \left|\int_{N\pi}^{x} f(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant \int_{N\pi}^{x} e^{-\sqrt{\ln(N\pi)}}\mathrm{d}t=(x-N\pi)e^{-\sqrt{\ln(N\pi)}}\leqslant \pi e^{-\sqrt{\ln(N\pi)}}=\pi e^{-\sqrt{\ln(\left[\frac{x}{\pi}\right]\pi)}}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{N\pi}^{x} f(t)\mathrm{d}t = 0$. On en déduit que :

$$\int_{\pi}^{x} f(t)\mathrm{d}t=\int_{\pi}^{N\pi} f(t)\mathrm{d}t+\int_{N\pi}^{x} f(t)\mathrm{d}t$$

s'écrit comme somme de deux quantités ayant une limite finie quand $x\to+\infty$, donc elle admet une limite finie quand $x\to+\infty$. Autrement dit : l'intégrale $\int_{\pi}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge, ce qu'on voulait démontrer.

Exercice 6.

1. Démontrer qu'effectivement, l'intégrale $\int_{\pi}^{+\infty} e^{-\sqrt{\ln(t)}}\mathrm{d}t$ est divergente.
2. Montrer que l'intégrale $\int_{1}^{+\infty} e^{-\sqrt{\ln(t)}}\sin(t)\mathrm{d}t$ converge avec une intégration par parties.

Exemple 6. (Illustration du cas (†).(b)) Montrons la convergence de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^4(\sin(t))^2}.$$

On ne peut pas minorer $1+t^4(\sin(t))^2$ mieux que par 1 pour $t\in[0,+\infty[$, ce qui donne la majoration suivante de l'intégrande : $\forall t\in[0,+\infty[$, $\frac{1}{1+t^4(\sin(t))^2}\leqslant 1$. Cependant $t\mapsto 1$ n'est pas du tout intégrable sur $[0,+\infty[$... Suivons l'approche de cette section. Notons que l'intégrande est positif. On a :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^4(\sin(t))^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^4(\sin(t))^2}&=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}u}{1+(u+n\pi)^4(\sin(u+n\pi))^2}\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}u}{1+(u+n\pi)^4(\sin(u))^2},\end{aligned}$$

où l'on a effectué le changement de variable $u=t-n\pi$. Or un argument de concavité permet de montrer que $\sin(t)\geqslant\frac{2}{\pi}t$ pour tout $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. On en déduit, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}u}{1+(u+n\pi)^4(\sin(u))^2}\leqslant\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}u}{1+(n\pi)^4(\sin(u))^2}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}u}{1+(n\pi)^4(\sin(u))^2}\leqslant 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}u}{1+(n\pi)^4\left(\frac{2u}{\pi}\right)^2}.$$

On calcule cette dernière intégrale en y reconnaissant la dérivée d'une arc tangente, et on en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}u}{1+(u+n\pi)^4(\sin(u))^2} \leqslant \frac{\arctan\left((n\pi)^2\right)}{\pi n^2} \leqslant \frac{1}{2n^2}.$$

Or la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge. On en déduit :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4(\sin(t))^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}u}{1+(u+n\pi)^4(\sin(u))^2} \leqslant \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty,$$

ce qui équivaut à la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4(\sin(t))^2}$: d'où le résultat.

Exercice 7. Écrire les détails omis dans cet exemple, pour que la démonstration soit complète :

1. Montrer : $\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}u}{1+(n\pi)^4(\sin(u))^2} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{1+(n\pi)^4(\sin(u))^2}$ (*utiliser la relation de Chasles puis un changement de variable*).
2. Montrer : $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(t) \geqslant \frac{2}{\pi}t$.
3. Montrer : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{1+\left(2n^2\pi u\right)^2} = \frac{\arctan\left((n\pi)^2\right)}{2\pi n^2}$.

Exercice 8. Montrer par la méthode de cette section que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ converge.

4 ✓ L'intégration par parties

Donnons trois applications principales de la formule d'intégration par parties. Les deux premières applications ne sont que des extensions de celles vues en 1re année.

4.1 Le calcul intégral

Nous ne détaillons pas ce point, déjà largement abordé par mes collègues de 1re année. Contentons-nous de dire que l'intégration par parties se prête au calcul intégral lorsqu'une fonction est compliquée mais de dérivée simple (en général : est une fraction rationnelle), tandis qu'elle est en facteur d'une fonction facile à intégrer. On est alors ramené à une intégrale de fonction plus simple, qu'on espère savoir calculer.

Sans que ce ne soit une règle générale, les fonctions intéressantes à dériver sont le logarithme, l'arc tangente, voire les autres fonctions trigonométriques réciproques. Les fonctions puissances, exponentielles, voire cosinus et sinus, ont l'avantage d'être versatiles, car leurs dérivées et leurs primitives sont (presque) semblablement simples à manipuler.

Une situation standard est le calcul de $\int_I t^n f(t)\mathrm{d}t$, où f est facile à intégrer. En ce cas, on intègre par parties en dérivant à chaque étape la fonction puissance, jusqu'à ce que son degré soit nul. C'est ainsi qu'on calcule $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\mathrm{d}t$ (fonction Gamma d'Euler).

4.2 Les relations de récurrence

C'est lié au dernier paragraphe. Il s'agit de calculer une intégrale de la forme :

$$I_n = \int_J (f(x))^n g(x)\mathrm{d}x$$

à l'aide d'une relation de récurrence.

Il faut donc relier $I_n = \int_J (f(x))^n g(x)\mathrm{d}x$ à $I_{n-1} = \int_J (f(x))^{n-1} g(x)\mathrm{d}x$ (voire I_{n-2}, etc., cela dépend du contexte). Pour cela, il faut abaisser la puissance de f dans l'intégrande : cela se fait *via* une intégration par parties en DÉRIVANT f^n (puisque sa dérivée est : $nf'f^{n-1}$, et il apparaît bien f^{n-1}). Il reste à espérer que la fonction à intégrer en conséquence, g, nous permette d'obtenir I_{n-1} dans la nouvelle intégrale.

Si I_n est plutôt de la forme :

$$I_n = \int_J \frac{g(x)}{(f(x))^n}\mathrm{d}x,$$

alors abaisser la puissance ne se fait pas en dérivant $\frac{1}{f^n}$ (on obtiendrait $-n\frac{f'}{f^{n+1}}$), mais en intégrant... mais dans ce cas, il faut faire apparaître f' au numérateur : on ne sait pas intégrer $\frac{1}{f^n}$ directement, il nous faut $\frac{f'}{f^n}$ (dont une primitive est : $-\frac{1}{n-1}\frac{1}{f^{n-1}}$).

En bref, pour savoir ce qu'il faut dériver et intégrer, pensez à ce que vous désirez : **abaisser la puissance n, pour passer de n à $n-1$.** Posé ainsi, le problème ne souffre d'aucune ambiguïté.

Si la nouvelle intégrale obtenue, *via* l'intégration par parties, ne donne pas directement I_{n-1}, n'oubliez pas que des manipulations élémentaires du type : $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$, ou des formules de trigonométrie reliant cos et sin, $\cos((n+1)x)$ et $\cos(nx)$, etc., permettent éventuellement de faire apparaître I_{n-1}.

Exercice 9. Trouvez des relations de récurrence pour les intégrales :

$$\text{(a)} \int_1^e (\ln(x))^n\mathrm{d}x, \quad \text{(b)} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan(x))^n\mathrm{d}x, \quad \text{(c)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(x))^n\mathrm{d}x.$$

Pour en déduire la valeur générale de l'intégrale, vous pourrez avoir besoin de lire le document *Méthodes* sur les suites numériques, section 2. On y apprend comment obtenir la valeur explicite d'une suite vérifiant une relation de récurrence compliquée d'ordre 1.

Exercice 10.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, trouver une relation entre $\int_0^1 t^{n+1}e^t\mathrm{d}t$ et $\int_0^1 t^n e^t\mathrm{d}t$.
2. Montrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $\int_0^1 t^n e^t\mathrm{d}t = (-1)^n n!\left(e\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} - 1\right)$.

4.3 La convergence des intégrales

Lorsqu'il est impossible d'obtenir l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$ d'une fonction de la forme $x \mapsto \frac{f(x)}{x^\alpha}$ *via* les critères de comparaison (en général $\alpha \leqslant 1$ dans ce cas), l'intégration par parties permet de tout de même démontrer la convergence de $\int_a^{+\infty}\frac{f(x)}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ ainsi : on *augmente l'exposant* α avec une dérivation de $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$, en espérant se ramener à une intégrale de la forme $\int_I \frac{g(x)}{x^{\alpha+1}}\mathrm{d}x$ qui soit convergente : c'est bon si g est bornée, de sorte à ce que l'intégrande soit dominé par la fonction de Riemann $x \mapsto \frac{1}{x^{\alpha+1}}$: si l'exposant est désormais suffisamment élevé, on conclut avec le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives.

L'exemple $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ est extrêmement standard et à savoir faire les yeux fermés.

RETENEZ BIEN DANS QUEL CAS DE FIGURE PENSER À L'INTÉGRATION PAR PARTIES ! Seulement s'il est impossible d'obtenir une domination par une fonction intégrable. Il n'y a pas d'intérêt à montrer une convergence *via* intégration par parties, si l'on y parvient directement par des moyens plus classiques !

Il faut bien sûr pouvoir s'adapter à la situation. Dans le cas de l'intégrale $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \cos(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x$, quelle fonction à dériver, à intégrer, permettrait de faire apparaître un facteur $\dfrac{1}{x^\alpha}$ salvateur ? Et pour montrer la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\mathrm{d}x$, est-il vraiment pertinent de dériver $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ ici ?

Quelques remarques pour conclure :

— lorsqu'on fait l'intégration par parties avec l'intégrale impropre $\displaystyle\int_I f'g$, la vérification préalable de l'existence du crochet $[fg]_a^b$ n'est pas facultative : il arrive parfois que fg ne soit pas de limite finie en a ou b ! Dans ce cas, n'oubliez pas que vous avez le choix de la primitive de f' utilisée : remplacez f par $f - f(a)$ si le problème est en a (par $f - f(b)$ s'il est en b), en général vous n'aurez plus une limite infinie (pourquoi ?) ;

— l'intégration par parties permet parfois d'obtenir un équivalent asymptotique d'une intégrale I_n : si cette formule donne $I_n = \alpha_n - J_n$, avec α_n provenant du terme entre crochets, et J_n une intégrale clairement négligeable devant I_n ou α_n, alors on obtient $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha_n$: voir section 6.2. → page 26

5 ✓ Comment vérifier l'hypothèse de domination ?

Dans toute cette section, nous ne nous soucions pas de la vérification des hypothèses de régularité en vue d'appliquer le théorème de convergence dominée et les théorèmes de régularité des intégrales à paramètres. Nous nous concentrons sur la partie difficile, vérifier l'hypothèse de domination, **uniquement ici**. Cela ne veut pas dire que vous devez oublier les autres hypothèses !

On cherche comment obtenir $|f_n(t)| \leqslant \varphi(t)$ (pour le théorème de convergence dominée) ou $|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$ (pour les intégrales à paramètres) avec φ intégrable. **Voyons d'abord ce que vous n'avez PAS le droit de faire** :

1. Puisqu'il faut une **majoration** de **toutes** les fonctions $|f_n|$ (où l'on exclut éventuellement les petites valeurs de n), **sur tout l'intervalle d'intégration**, CELA EXCLUT D'EMBLÉE L'USAGE D'ÉQUIVALENTS ET DE DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS, puisqu'ils ne donnent une estimation que dans un VOISINAGE, et non partout ! Objection analogue s'il faut majorer $|f(x,t)|$.

   Toutefois, ce qui remplace rigoureusement les équivalents et les développements limités, dans les inégalités, est la formule de Taylor avec reste intégral : voir *L'art de la majoration.*

   Bien sûr, **après** avoir produit la fonction de domination φ, rien ne nous interdit de recourir aux équivalents et développements limités, *comme d'habitude*, pour démontrer son intégrabilité.
2. La fonction de domination φ doit être **intégrable** ; par conséquent, **si l'intervalle d'intégration est** $]0,+\infty[$, LES FONCTIONS DE RIEMANN NE MARCHENT JAMAIS ! En effet, $t \mapsto \dfrac{1}{t^s}$ a un problème d'intégrabilité soit au voisinage de 0, soit au voisinage de $+\infty$, selon que $s \geqslant 1$ ou $s \leqslant 1$.
3. La fonction de domination φ doit être **explicite** : oubliez toute tentative malhonnête d'incantation du type : « il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable vérifiant $|f_n| \leqslant \varphi$, qu'on obtient aisément en majorant ceci et cela indépendamment de n ».
4. Si vous définissez φ avec des conditions du type « $\varphi(t) = \cdots$ si $t \geqslant n$ », alors elle dépend implicitement de n et ne convient pas.

L'hypothèse de domination ne tolère aucun à-peu-près. **Tout manquement aux commandements ci-dessus et toute tentative d'escroquerie sont soldés de zéro point**.

Même si nous vous donnons des méthodes pour produire cette domination, cela reste un problème difficile. Seule l'expérience vous permettra d'être à l'aise dans cet exercice : exercez-vous autant que possible. Les conseils de la section 6 et du document *L'art de la majoration*, sont un excellent complément.

5.1 ✓ Cas du théorème de convergence dominée

Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I.

Pour majorer $|f_n(t)|$ indépendamment de n

1. On ne touche *surtout pas* à ce qui ne dépend pas de n.
2. On majore uniquement, et au mieux, la quantité dépendant de n, en cherchant quelle est la valeur maximale prise quand n parcourt $\mathbb{N}$. Alors ce majorant ne dépend pas de n et nous donne φ.

Plus formellement :

1. On écrit $f_n(t)$ comme un produit ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in I$, $f_n(t) = g(t)h_n(t)$ (ainsi g est la partie qui ne dépend pas de n : *on n'y touche plus*).
2. On cherche à maximiser $|h_n(t)|$, à t *fixé*, quand n parcourt $\mathbb{N}$. En pratique, la suite $(|h_n(t)|)_{n\geqslant 0}$ a souvent une monotonie suffisamment simple pour que le majorant soit évident, ou obtenu pour $n = 0$ ou $n \to +\infty$.

   Si ce n'est pas le cas, étudiez les variations de la fonction obtenue en faisant comme si n était une variable réelle $n \in \mathbb{R}_+$ (ce qui permet de dériver par rapport à cette variable). Cela vous donnera un maximum quand n parcourt $\mathbb{R}_+$ (ou $[1, +\infty[$ si $n = 0$ est exclu, etc., il faut s'adapter). Ce maximum dépend éventuellement de t, et on le note donc $\phi(t)$: on a alors $|h_n(t)| \leqslant \phi(t)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in I$.
3. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in I$, on a : $|f_n(t)| = |g(t)| \cdot |h_n(t)| \leqslant |g(t)| \cdot \phi(t)$, et le choix $\varphi(t) = |g(t)|\phi(t)$ convient en général : **on vérifie sérieusement que φ est intégrable sur I.** Si la méthode échoue, il faut envisager d'utiliser l'autre théorème d'interversion limite-intégrale (si on est sur un segment : sinon, c'est foutu... ou vous avez fait une erreur dans vos majorations).

Majoration indépendante de n, de t, de x... Si l'on s'y perd, comment savoir : φ ne doit dépendre **que de la variable d'intégration**, et non du paramètre variable. Il serait illogique d'exiger que φ ne dépende pas de la variable d'intégration, vu qu'elle est continue par morceaux et intégrable sur l'intervalle où l'on intègre (donc elle en dépend !). Par conséquent, si la variable d'intégration s'appelle t, alors φ ne dépend que de t.
Cette condition vient du fait que l'hypothèse de domination a été motivée pour empêcher les f_n de produire des pics arbitrairement grands. Donc φ doit majorer *tous* les f_n. Mais si φ dépend aussi de n, il ne peut majorer qu'un f_n à la fois (un différent pour chaque valeur de n), et pas tous en même temps.

Cas particulier fréquent : puissances n^{es}. Si h_n est définie à l'aide de termes à la puissance n (notés a^n dans le reste de cette remarque), n'oubliez pas que vous savez comparer les fonctions puissances sans passer par une étude de variations (*L'art de la majoration*, section 3) :

$$\begin{array}{rcllcl} 0 < a \leqslant 1 & \Longrightarrow & (a^n)_{n\geqslant 0} \text{ décroissante} & \Longrightarrow & \forall n \in \mathbb{N}, & 0 \leqslant a^n \leqslant a^0 = 1 \\ a > 1 & \Longrightarrow & (a^n)_{n\geqslant 0} \text{ croissante} & \Longrightarrow & \forall n \in \mathbb{N}, & 1 = a^0 \leqslant a^n \text{ (et } (a^n)_{n\geqslant 0} \text{ non majorée)} \end{array}$$

Bien souvent, pour bien conserver l'intégrabilité en majorant – par exemple pour conserver une exponentielle décroissante –, nous aurons besoin d'exclure le cas $n = 0$ (voire $n = 1$). Ce n'est pas gênant d'exclure de petites valeurs de n (tant qu'elles ne dépendent pas de la variable t), puisque de toute façon on considère la limite quand $n \to +\infty$ (donc n est « grand »). Alors :

$$\begin{array}{c} \text{si } 0 < a \leqslant 1 : \\ \begin{array}{rcl} n \geqslant 1 & \Longrightarrow & a^n \leqslant a^1 = a \\ n \geqslant 2 & \Longrightarrow & a^n \leqslant a^2 \end{array} \end{array}$$

Dans tous les cas, vous voyez là comment éliminer la dépendance en n.

Cas particulier fréquent : différences « petites ». N'oublions pas que si h_n est une différence « petite », notamment au voisinage de 0, les méthodes de *L'art de la majoration* vous aideront à la majorer. On en donne une illustration dans la section 5.1.1 (exemple 10, où la quantité $\cos\left(\frac{t}{n}\right) - 1$ est bien une « différence petite » au sens de *L'art de la majoration*). → page 17

Exemple 7. (Illustration du 1er cas particulier) On cherche à calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-t^n}\mathrm{d}t$. On vous laisse étudier la convergence simple et en déduire la limite éventuelle : ici, je me concentre uniquement sur la vérification de l'hypothèse de domination. Pour cela, on note que majorer la valeur absolue de $f_n : t \mapsto e^{-t^n}$ se résume à majorer $-t^n$ pour tous $t \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$. On y parvient en minorant t^n pour tous $t \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$. Comme nous l'avons dit ci-dessus : on cherche le minimum de $(t^n)_{n\geqslant 0}$ quand n varie. Or la monotonie de cette suite dépend de t :

— si $t \in [0,1]$, alors la suite $(t^n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante, donc elle est minorée par sa limite : $t^n \geqslant 0$;

— si $t > 1$, alors la suite $(t^n)_{n\geqslant 0}$ est croissante, donc elle est minorée par son premier terme : $t^n \geqslant t^0 = 1$.

On en déduit :

$$\forall (n,t) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R}_+, \quad |f_n(t)| \leqslant \begin{cases} \exp(-0) = 1 & \text{si} \quad t \in [0,1], \\ \exp(-1) & \text{si} \quad t > 1. \end{cases}$$

Problème : c'est très facile de se convaincre que la majoration proposée n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$ (comme toute fonction constante non nulle). On règle ce souci comme suggéré, en commençant l'étude non pas à $n = 0$, mais $n = 1$. Tout ce qui change dans l'étude ci-dessus est la minoration de t^n quand $t > 1$: en minorant par le premier terme, on obtient à présent : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $t^n \geqslant t^1$. Par suite :

$$\forall (n,t) \in (\mathbb{N}\setminus\{0\})\times\mathbb{R}_+, \quad |f_n(t)| \leqslant \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \in [0,1], \\ \exp(-t) & \text{si} \quad t > 1. \end{cases} \qquad \text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION)}$$

La majoration est indépendante de n, et nous savons que l'exponentielle est intégrable au voisinage de $+\infty$: c'est donc gagné.

Exercice 11. Achever l'exemple pour en déduire la valeur de : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-t^n}\mathrm{d}t$.

Exemple 8. (Majoration *via* une étude de variations) Reprenons le calcul de :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x\left(1+\sqrt{n}e^{-nx}\right)\mathrm{d}x,$$

Il se traite très simplement en utilisant la convergence uniforme sur un segment, mais nous varions l'approche ici en passant par le théorème de convergence dominée, afin d'illustrer une difficulté inédite et de montrer comment la résoudre à l'aide des conseils ci-dessus.

Si l'on essayait de vérifier l'hypothèse de domination sur $f_n : x \mapsto x(1+\sqrt{n}e^{-nx})$ (qui converge simplement sur $]0,1]$ vers $f : x \mapsto x$), nous serions bien embêtés sans analyse approfondie : la majoration $e^{-nx} \leqslant 1$ nous laisse avec le terme $x(1+\sqrt{n})$, et éliminer $\sqrt{n}$ est impossible puisqu'il est arbitrairement grand quand n varie. Quand des majorations naïves ne fonctionnent pas, on fait une étude de variations, où l'on interprète n comme une variable réelle ; pour éviter de semer le trouble, je vais changer son nom et l'appeler u. À $x \in]0,1]$ fixé, dériver par rapport à u l'application $g : u \mapsto \sqrt{u}e^{-ux}$ (je ne m'intéresse qu'à ce qui dépend de n : d'où l'absence de x et 1) donne pour dérivée : $g' : u \mapsto e^{-ux}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{u}} - x\sqrt{u}\right) = e^{-ux}\dfrac{1-2xu}{2\sqrt{u}}$ (vérifiez-le). On en déduit le tableau de variations :

u	0		$\frac{1}{2x}$		$+\infty$
$g'(u)$		$+$	0	$-$	
g	0	$\nearrow$	$g\left(\frac{1}{2x}\right)$	$\searrow$	0

On en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]0,1]$:

$$|f_n(x)| = x(1 + g(n)) \leqslant x\left(1 + g\left(\frac{1}{2x}\right)\right) = x\left(1 + \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2x}}\right) \quad \text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION)}$$

et l'application $\varphi : x \mapsto x\left(1 + \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2x}}\right) = x + \sqrt{x}\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}$ est continue par morceaux sur $]0,1]$, clairement prolongeable par continuité sur le segment $[0,1]$, donc intégrable.

Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x\left(1 + \sqrt{n}e^{-nx}\right) \mathrm{d}x = \int_0^1 x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

5.1.1 Utiliser des équivalents pour conjecturer φ

Pour avoir une idée de la meilleure domination possible, **et seulement pour avoir une idée (ce n'est pas rigoureux, comme on le rappelle plus haut !)**, par exemple dans l'examen d'un quotient, vous pouvez regarder les termes prépondérants aux extrémités de l'intervalle, en particulier si l'on intègre au voisinage de 0 ou de $+\infty$. Par exemple, si $f_n(t) = \dfrac{t^n + \sqrt{t}}{t^{n+2} + 1}$ pour tout $t \in]0, +\infty[$, alors les équivalents $|f_n(t)| \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{\sqrt{t}}{1} = \sqrt{t}$ et $|f_n(t)| \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{t^n}{t^{n+2}} = \dfrac{1}{t^2}$ nous enseignent que **si** une fonction de domination φ convient, alors elle devrait être de l'ordre de grandeur de $t \mapsto \sqrt{t}$ quand $t \to 0$, et $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ quand $t \to +\infty$. *A contrario*, cela veut dire qu'on n'a AUCUNE CHANCE d'obtenir une domination pertinente si l'on élimine les termes prépondérants ! Si l'on fait l'erreur d'écrire : $|f_n(t)| \leqslant \dfrac{t^n + \sqrt{t}}{1}$ pour t grand (élimination du terme prépondérant t^{n+2} au dénominateur), on n'a plus du tout une fonction proche de f_n et ce n'est pas une bonne majoration.

Pour passer de la conjecture non rigoureuse à la domination rigoureuse :

(1) L'idée, quand vous conjecturez ce que devrait être φ avec cette approche, **est de factoriser par les termes prépondérants au numérateur et dénominateur**, puis de voir comment majorer leurs facteurs (normalement proches de 1, c'est l'intérêt de factoriser par les termes prépondérants) indépendamment de n.

(2) Si l'équivalent utilisé pour la conjecture provenait d'un développement limité ou d'un équivalent de fonction usuelle (exemples : $e^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$, ou $\cos(u) - 1 \underset{u\to 0}{\sim} -\frac{u^2}{2}$), **on remplace cet équivalent ou développement limité par l'inégalité issue de la formule de Taylor avec reste intégral**, comme expliqué dans *L'art de la majoration*.

Exemple 9. Reprenons l'exemple de : $f_n(t) = \dfrac{t^n + \sqrt{t}}{t^{n+2} + 1}$ pour tout $t \in]0, +\infty[$. On avait : $f_n(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{t^n}{t^{n+2}} = \dfrac{1}{t^2}$. Par conséquent, conformément à la méthode proposée ci-dessus, pour tout $t \geqslant 1$, on écrit :

$$|f_n(t)| \overset{(1)}{=} \frac{t^n\left(1 + \frac{\sqrt{t}}{t^n}\right)}{t^{n+2}\left(1 + \frac{1}{t^{n+2}}\right)} = \frac{1}{t^2}\frac{1 + t^{\frac{1}{2}-n}}{1 + t^{-n-2}},$$

et on majore au mieux ce qu'il reste. Par exemple, du fait que $t \geqslant 1$ et $\frac{1}{2} - n < 0$, on a $1 + t^{\frac{1}{2}-n} \leqslant 1 + 1 = 2$ et $1 + t^{-n-2} \geqslant 1 + 0 = 1$. On en déduit que, pour tout $t \geqslant 1$, on a : $|f_n(t)| \leqslant \dfrac{2}{t^2}$. De même, quand $t < 1$, on factorise par les termes prépondérants :

$$|f_n(t)| \overset{(1)}{=} \frac{\sqrt{t}\left(1 + \frac{t^n}{\sqrt{t}}\right)}{1 + t^{n+2}} = \sqrt{t}\frac{1 + t^{n-\frac{1}{2}}}{1 + t^{n+2}}.$$

Avec les méthodes de *L'art de la majoration*, on trouve les majorations $\dfrac{1}{1 + t^{n+2}} \leqslant 1$ pour $t \in]0,1[$, et $1 + t^{n-\frac{1}{2}} \leqslant 2$, et on en déduit, pour tout $t < 1$: $|f_n(t)| \leqslant 2\sqrt{t}$. Une fonction de domination possible est donc :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \begin{cases} 2\sqrt{t} & \text{si } t \in]0,1[, \\ \frac{2}{t^2} & \text{si } t \in [1, +\infty[, \end{cases} \end{cases}$$

et nous vous laissons vérifier qu'elle est intégrable sur $]0, +\infty[$. Les équivalents ci-dessus montrent qu'on peut difficilement trouver mieux : si on trouvait φ significativement plus « petit », l'inégalité $|f_n| \leqslant \varphi$ serait contredite par les équivalents de f_n trouvés ci-dessus.

Exemple 10. Calculons : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 n^2 \frac{\cos\left(\frac{t}{n}\right) - 1}{t^2} \mathrm{d}t$. Nous vous laissons vérifier que la suite de fonctions de terme général $f_n : \begin{cases}]0,1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & n^2 \frac{\cos\left(\frac{t}{n}\right)-1}{t^2} \end{cases}$ converge simplement sur $]0,1]$ vers $f : t \mapsto -\frac{1}{2}$, et nous nous attardons plutôt sur la vérification de l'hypothèse de domination. Pour cela, si l'on fait une conjecture non rigoureuse, portant sur des équivalents, nous avons :

$$\left| n^2 \frac{\cos\left(\frac{t}{n}\right) - 1}{t^2} \right| \underset{t\to 0}{\sim} \frac{|-n^2(t/n)^2/2|}{t^2} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{2},$$

et nous pouvons donc **conjecturer** qu'une bonne fonction de domination φ devrait être de l'ordre de grandeur de $t \mapsto \frac{1}{2}$. Conformément au conseil (2) ci-dessus, on rend rigoureuse cette domination avec la formule de Taylor avec reste intégral, appliquée au cosinus en 0 et à l'ordre 1. On obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\},\ \forall t \in]0,1], \quad \cos\left(\frac{t}{n}\right) = 1 + \left(\frac{t}{n}\right)^2 \int_0^1 (1-u)\cos''\left(u\frac{t}{n}\right) \mathrm{d}u = 1 - \left(\frac{t}{n}\right)^2 \int_0^1 (1-u)\cos\left(u\frac{t}{n}\right) \mathrm{d}u.$$

Comme $|\cos| \leqslant 1$, on en déduit : $\left|\cos\left(\dfrac{t}{n}\right) - 1\right| \leqslant \left(\dfrac{t}{n}\right)^2 \displaystyle\int_0^1 (1-u)\mathrm{d}u = \dfrac{t^2}{2n^2}$. Par conséquent :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \forall t \in]0,1], \quad |f_n(t)| \leqslant \frac{1}{2}. \quad \text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION)}$$

Il est évident que $\varphi : t \mapsto \frac{1}{2}$ est intégrable sur $]0,1]$, car continue sur le SEGMENT $[0,1]$. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée (les hypothèses de continuité par morceaux étant évidemment vérifiées), et on en déduit : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 n^2 \frac{\cos\left(\frac{t}{n}\right) - 1}{t^2} \mathrm{d}t = \int_0^1 \left(-\frac{1}{2}\right) \mathrm{d}t = -\frac{1}{2}$.

Exercice 12. Pour chacun des exemples ci-dessous, dire quel conseil appliquer ci-dessus pour obtenir une fonction de domination indépendante de n et intégrable sur l'intervalle considéré (cocher une case si elle correspond à un conseil pertinent ; plusieurs conseils peuvent être pertinents, ou aucun si la majoration est triviale). Ensuite, essayer de la produire explicitement. L'enjeu de l'exercice n'est pas le calcul explicite des limites.

$\lim\limits_{n\to+\infty}$ de	Conseils pertinents	Domination φ
$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan(t))^n \mathrm{d}t$	Majorant pour $n = 0$, etc., ou $n \to +\infty$ ☐ Étude de variations ☐	

	Factorisation par termes prépondérants ☐	Taylor ou acc. finis ☐	
$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n}$	Majorant pour $n=0$, etc., ou $n\to+\infty$ ☐ Factorisation par termes prépondérants ☐	Étude de variations ☐ Taylor ou acc. finis ☐	
$\displaystyle\int_0^{1} e^{t^n}\mathrm{d}t$	Majorant pour $n=0$, etc., ou $n\to+\infty$ ☐ Factorisation par termes prépondérants ☐	Étude de variations ☐ Taylor ou acc. finis ☐	
$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{-n}+t^n}{t^{2n}+t^{-2n}}\mathrm{d}t$	Majorant pour $n=0$, etc., ou $n\to+\infty$ ☐ Factorisation par termes prépondérants ☐	Étude de variations ☐ Taylor ou acc. finis ☐	
$\displaystyle\int_0^{1} nx(1-x)^n\mathrm{d}x$	Majorant pour $n=0$, etc., ou $n\to+\infty$ ☐ Factorisation par termes prépondérants ☐	Étude de variations ☐ Taylor ou acc. finis ☐	
$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^n+e^t}$	Majorant pour $n=0$, etc., ou $n\to+\infty$ ☐ Factorisation par termes prépondérants ☐	Étude de variations ☐ Taylor ou acc. finis ☐	
$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)\,(1+x^n)^{\frac{1}{n}}}$	Majorant pour $n=0$, etc., ou $n\to+\infty$ ☐ Factorisation par termes prépondérants ☐	Étude de variations ☐ Taylor ou acc. finis ☐	
$\displaystyle\int_0^{+\infty} \arctan(nt)e^{-t^n}\mathrm{d}t$	Majorant pour $n=0$, etc., ou $n\to+\infty$ ☐ Factorisation par termes prépondérants ☐	Étude de variations ☐ Taylor ou acc. finis ☐	
$\displaystyle\int_0^{+\infty} n(\cos(t))^2e^{-nt}\mathrm{d}t$	Majorant pour $n=0$, etc., ou $n\to+\infty$ ☐ Factorisation par termes prépondérants ☐	Étude de variations ☐ Taylor ou acc. finis ☐	
$\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n}$	Majorant pour $n=0$, etc., ou $n\to+\infty$ ☐ Factorisation par termes prépondérants ☐	Étude de variations ☐ Taylor ou acc. finis ☐	
$\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}\mathrm{d}t$	Majorant pour $n=0$, etc., ou $n\to+\infty$ ☐ Factorisation par termes prépondérants ☐	Étude de variations ☐ Taylor ou acc. finis ☐	
$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(nt)}{(nt+1)(1+t^2)}\mathrm{d}t$	Majorant pour $n=0$, etc., ou $n\to+\infty$ ☐ Factorisation par termes prépondérants ☐	Étude de variations ☐ Taylor ou acc. finis ☐	
$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{n\ln\left(1+\frac{t}{n}\right)}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t$	Majorant pour $n=0$, etc., ou $n\to+\infty$ ☐ Factorisation par termes prépondérants ☐	Étude de variations ☐ Taylor ou acc. finis ☐	

5.1.2 Exemples concrets de *mauvaises* dominations, et leur résolution

Nous donnons déjà des recommandations sur ce qu'il NE faut PAS faire, au début de la section 5. Nous vous conseillons fortement, aussi, de lire les *bons* conseils qui suivent (section 5.1) surtout, dans la mesure où cette section ne fait que les illustrer.

La méthode pour vérifier l'hypothèse de domination, *en théorie*, tient à peu de choses : UNIQUEMENT MAJORER CE QUI DÉPEND DE LA VARIABLE À ÉLIMINER, et ne pas toucher au reste. Seulement, même en connaissant ces recommandations théoriques, il arrive qu'*en pratique* on ne se rende pas compte qu'on tombe dans de mauvais travers. C'est le sens de cette section : lorsque vous peinez à vérifier une hypothèse de domination dans un exercice, pensez à lire ces pages pour déterminer si vous avez fait une erreur analogue. Si oui, regardez la résolution qui est proposée. En pratiquant cette routine régulièrement, vous devriez perdre vos mauvaises habitudes.

Exemple 11. On cherche à calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^ne^t}$. Nous vous laissons étudier la convergence simple et vérifier les hypothèses de régularité : je me concentre sur l'hypothèse de domination.

Pour la vérifier, cela revient à minorer $1+t^ne^t$ pour tout $(n,t)\in\mathbb{N}\times\mathbb{R}_+$, indépendamment de n, et il suffit alors de passer à l'inverse en pensant à renverser l'inégalité. Il semble que l'affaire soit élémentaire : pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $t\in\mathbb{R}_+$ on a : $1+t^ne^t\geqslant 1$, car $t^n\geqslant 0$ et $e^t\geqslant 0$. En passant à l'inverse, on en déduit :

$$\forall (n,t)\in\mathbb{N}\times\mathbb{R}_+,\quad \frac{1}{1+t^ne^t}\leqslant\frac{1}{1}=1.$$

On a éliminé la dépendance en n, mais l'hypothèse de domination n'est pas vérifiée pour autant. En effet, l'application $t \mapsto 1$ n'est manifestement pas intégrable sur $[0, +\infty[$.

Quelle est l'erreur méthodologique ci-dessus ? Le problème est d'avoir cherché le minimum de t^n quand t varie, en disant que le minimum est atteint pour $t = 0$ (d'où la minoration $t^n \geqslant 0$). Or il ne faut pas toucher à ce qui ne dépend pas de n (c'est-à-dire : à ce qui ne dépend que de t).

Comment la rectifier ? Dans la quantité t^n, on ne touche donc pas à t, et on regarde le minimum de $(t^n)_{n\geqslant 0}$ *quand n varie*. Or la monotonie de cette suite dépend de t :

— si $t \in [0,1]$, alors la suite $(t^n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante, donc elle est minorée par sa limite : $t^n \geqslant 0$;

— si $t > 1$, alors la suite $(t^n)_{n\geqslant 0}$ est croissante, donc elle est minorée par son premier terme : $t^n \geqslant t^0 = 1$.

On en déduit, pour tout $(n, t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+$:

$$\left|\frac{1}{1+t^n e^t}\right| = \frac{1}{1+t^n e^t} \leqslant \begin{cases} \dfrac{1}{1+0\times e^t} = 1 & \text{si} \quad t \in [0,1], \\ \dfrac{1}{1+e^t} & \text{si} \quad t > 1. \end{cases} \qquad \text{(hypothèse de domination)}$$

Cette fois-ci la majoration est bien intégrable sur $[0, +\infty[$, comme nous vous laissons le vérifier (dominer par $\dfrac{1}{t^2}$ au voisinage de $+\infty$). Mission accomplie.

Exemple 12. On cherche à calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(\mathrm{ch}(t))^n}$. Nous vous laissons étudier la convergence simple et vérifier les hypothèses de régularité : je me concentre sur l'hypothèse de domination.

Pour la vérifier, on doit majorer $\dfrac{1}{\mathrm{ch}^n}$, ce qui revient à minorer ch^n (indépendamment de n). Vous auriez sans doute tendance à tenter d'abord l'une de ces deux minorations (correctes), afin de vous ramener à des intégrales de référence : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(t) \geqslant 1$, ou : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(t) = \frac{e^t+e^{-t}}{2} > \frac{e^t}{2}$. On en déduit :

$$\forall (n, t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+, \quad \frac{1}{(\mathrm{ch}(t))^n} \leqslant 1, \quad \text{ou :} \quad \frac{1}{(\mathrm{ch}(t))^n} \leqslant \frac{2^n}{(e^t)^n} = 2^n e^{-tn},$$

selon l'inégalité retenue ci-dessus. Mais ces deux majorations posent problème en vue de vérifier l'hypothèse de domination : la première n'est pas du tout intégrable sur $[0, +\infty[$ (comme toute constante non nulle), et la seconde dépend bien sûr de n (pire : $(2e^{-t})^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ pour tout $t < \ln(2)$, donc il est impossible d'enlever cette dépendance : ce n'est pas majoré).

Quelle est l'erreur méthodologique ci-dessus ? L'erreur provient du fait que les minorations de $(\mathrm{ch}(t))^n$ ci-dessus ont été faites en regardant le minimum quand t varie (avec ch qui atteint son minimum en $t = 0$, qui vaut 1), alors que je vous demande de ne pas toucher à ce qui dépend de t.

Comment la rectifier ? Il faut directement majorer $\dfrac{1}{(\mathrm{ch}(t))^n}$, ou minorer $(\mathrm{ch}(t))^n$, quand n varie (et non t). Or $((\mathrm{ch}(t))^n)_{n\geqslant 0}$ est une suite géométrique de raison $\mathrm{ch}(t) \geqslant 1$, donc elle est croissante : elle est donc minorée par son premier terme. On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(\mathrm{ch}(t))^n \geqslant 1$, mais nous avons vu ci-dessus que cette minoration pose problème car nous perdons l'intégrabilité. Pas grave : nous avons dit à la page 14 qu'il suffit d'exclure les premières valeurs de n ; ce n'est pas gênant vu qu'on prend $n \to +\infty$, et donc « n grand ». Ainsi, si l'on se restreint à $n \geqslant 1$, minorer la suite $((\mathrm{ch}(t))^n)_{n\geqslant 1}$ par son premier terme donne : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $(\mathrm{ch}(t))^n \geqslant (\mathrm{ch}(t))^1 = \mathrm{ch}(t)$. On en déduit :

$$\forall (n, t) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}_+, \quad \frac{1}{(\mathrm{ch}(t))^n} \leqslant \frac{1}{\mathrm{ch}(t)}, \quad \text{(hypothèse de domination)}$$

or $t \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}(t)}$ est bien indépendant de n et intégrable sur $[0, +\infty[$, comme nous vous laissons le vérifier. Mission accomplie.

Exercice 13. Achever ces exemples pour en déduire les limites cherchées.

5.1.3 Que faire, si les bornes d'intégration dépendent de n ?

Pour appliquer le théorème de convergence dominée, les fonctions f_n doivent être définies **sur le même intervalle** I. Par conséquent, si l'on doit calculer une limite de la forme : $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^n f_n(t)\mathrm{d}t$, alors le théorème de convergence dominée ne peut pas s'appliquer (et encore moins le théorème d'interversion dans le cas d'un segment) parce que l'intervalle d'intégration $[0,n]$ varie quand n varie. Pour y remédier, il y a deux approches, en général guidées dans une épreuve écrite mais pas toujours à l'oral :

1. **Première méthode.** On effectue un changement de variable qui nous ramène à des bornes fixes. Par exemple, en posant $u=\frac{t}{n}$, alors $\mathrm{d}t=n\mathrm{d}u$ et on a : $\displaystyle\int_0^n f_n(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 f_n(nu)\cdot n\mathrm{d}u$. Comme l'intervalle d'intégration est désormais [0,1], donc le même pour tout $n\in\mathbb{N}$, on peut tenter d'appliquer un théorème d'interversion limite-intégrale à cette nouvelle intégrale. Mais alors, on n'étudie plus la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$, mais celle de terme général $g_n:\begin{cases}[0{,}1] & \to & \mathbb{R}\\ u & \mapsto & n\cdot f_n(nu)\end{cases}$ (le nouvel intégrande).
2. **Deuxième méthode.** Supposons que pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'intervalle d'intégration soit de la forme $I_n=[a,u_n]$ avec $u_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$ (dans presque tous les cas, vous aurez $I_n=[0,n]$ tout simplement). Pour calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_a^{u_n} f_n(t)\mathrm{d}t$, la méthode est tout simplement **de prolonger f_n à $[a,+\infty[$ (intervalle ne dépendant plus de n) en la définissant comme nulle au-delà de I_n**. C'est-à-dire, on pose :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall t\in[a,+\infty[,\quad \tilde{f}_n(t)=\begin{cases}f_n(t) & \text{si } t\in[a,u_n],\\ 0 & \text{si } t\in]u_n,+\infty[,\end{cases}$$

et on a l'égalité : $\displaystyle\int_a^{+\infty}\tilde{f}_n(t)\mathrm{d}t=\int_a^{u_n}f_n(t)\mathrm{d}t$. L'étude de $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_a^{u_n}f_n(t)\mathrm{d}t$ équivaut donc à celle de $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_a^{+\infty}\tilde{f}_n(t)\mathrm{d}t$, mais cette dernière limite peut être calculée à l'aide du théorème de convergence dominée parce que l'intervalle d'intégration est le même pour chaque fonction !

Le fait que la définition de $\tilde{f}_n(t)$ dépende de la position de t par rapport à u_n ne complique absolument pas l'étude de la convergence simple. En effet, on s'intéresse au comportement de $\tilde{f}_n(t)$ quand $n\to+\infty$ et à $t\in[a,+\infty[$ *fixé*. Or, pour tout n assez grand, on a $t\leqslant u_n$ car $u_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$, et donc $\tilde{f}_n(t)=f_n(t)$. Autrement dit : **lorsqu'on étudie la convergence simple sur $[a,+\infty[$, on n'est jamais dans le cas où $\tilde{f}_n(t)=0$, quitte à prendre n assez grand**.

Ensuite, pour l'hypothèse de domination, il suffit de majorer f_n sur $I_n=[a,u_n]$ indépendamment de n. En effet, la fonction φ qui majore f_n sur cet intervalle, majore aussi $\tilde{f}_n$ sur $[a,+\infty[$: soit $\tilde{f}_n(t)=f_n(t)$, auquel cas $\varphi(t)$ est un majorant par construction ; soit $\tilde{f}_n(t)=0$, et dans ce cas $\varphi(t)$ est un majorant trivial (vu que la fonction de domination est nécessairement positive). En résumé : **lorsqu'on vérifie l'hypothèse de domination, la seule difficulté est pour majorer f_n sur $[a,u_n]$: la majoration vaudra alors immédiatement sur $[a,+\infty[$.**

La notation « tilde » est en général superflue, car il n'y a pas de f_n définie préalablement dans l'énoncé. Il n'y a donc pas besoin de ce tilde qui servirait à la distinguer. Je ne le mets que pour les besoins de l'exposé.

Il faut beaucoup de recul pour juger laquelle des deux méthodes est la meilleure, selon le cas de figure. Je ne veux pas vous empêtrer dans des considérations loin des méthodes de base : retenez simplement que ces approches existent. La première a le défaut de faire apparaître un facteur n, qui peut compromettre soit la convergence uniforme, soit la vérification de l'hypothèse de domination : dur à dire, cela dépend de la fonction f_n ! Comme $nu\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$ quand $n\to+\infty$ (sauf si $u=0$), notons que le comportement de f_n au voisinage de $+\infty$ est la clé pour savoir que déduire : est-ce que f_n a une limite finie en l'infini ? Un équivalent simple qui compenserait la multiplication par n ? etc.

Exercice 14. Montrer : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^n \exp\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)\mathrm{d}x=1$, avec la première méthode.

Exercice 15. Montrer : $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^n\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n\mathrm{d}x=1$, avec la deuxième méthode (vous pourrez vérifier l'exactitude de votre résultat en déterminant directement une primitive de l'intégrande).

5.2 ✓ Cas des intégrales à paramètres

Pour majorer $|f(x,t)|$ indépendamment de x, pour tout $(x,t)\in I\times J$

1. **On ne touche *surtout pas* à ce qui ne dépend pas de x.**
2. **On majore uniquement, et au mieux, la quantité dépendant de x sur l'intervalle I.** En pratique, il suffit souvent d'étudier les variations de la quantité en question sur I, afin de déterminer son maximum. La majoration ne dépendra alors plus de x, et nous donnera φ.
3. **Si la majoration obtenue à l'étape précédente n'est pas intégrable**, quoi qu'on y fasse, **on remplace l'étude sur I par une étude sur un segment $[a,b]$ de I.**

Plus formellement :

1. On écrit $f(x,t)$ comme un produit ainsi : $\forall(x,t)\in I\times J$, $f(x,t)=g_1(t)g_2(x,t)$ (ainsi g_1 est la partie qui ne dépend pas de x : *on n'y touche plus*).
2. On étudie les variations (au besoin : parfois une majoration est évidente), pour tout $t\in J$ de $x\mapsto g_2(x,t)$ sur I, afin d'obtenir un majorant sur I dépendant *a priori* de $t\in J$, et qu'on note donc $\phi(t)$: on a alors $|g_2(x,t)|\leqslant\phi(t)$ pour tout $(x,t)\in I\times J$.
3. Alors, pour tout $(x,t)\in I\times J$, on a $|f(x,t)|=|g_1(t)|\cdot|g_2(x,t)|\leqslant|g_1(t)|\cdot\phi(t)$, et le choix $\varphi(t)=|g_1(t)|\phi(t)$ convient en général : **on vérifie sérieusement que φ est intégrable sur** J, parce que la méthode peut échouer à ce stade (auquel cas on se réfère au point suivant), et il ne faut donc pas conclure hâtivement.
4. S'il n'est pas possible de majorer $x\mapsto g_2(x,t)$ sur I, ou si φ n'est pas intégrable sur J, on remplace I par un segment $[a,b]\subseteq I$, et la majoration $\phi(t)$ ci-dessus devient la majoration sur $[a,b]$ de $x\mapsto g_2(x,t)$.

Majoration indépendante de n, de t, de x... Si l'on s'y perd, comment savoir : φ ne doit dépendre **que de la variable d'intégration**, et non du paramètre variable. Il serait illogique d'exiger que φ ne dépende pas de la variable d'intégration, vu qu'elle est continue par morceaux et intégrable sur l'intervalle où l'on intègre (donc elle en dépend !). Par conséquent, si la variable d'intégration s'appelle t, alors φ ne dépend que de t.

Mise en garde 1. Ne prenez pas à la légère le conseil de NE PAS TOUCHER à la partie ne dépendant pas de x. Lorsque vous avez un terme gênant en facteur d'une fonction de Riemann, comme par exemple le logarithme ou l'exponentielle dans les intégrales à paramètres $x\mapsto\int_1^{+\infty}\dfrac{\ln(t)}{1+(xt)^2}\mathrm{d}t$ et $x\mapsto\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$ (c'est la fonction Γ d'Euler, un exemple classique), vous avez souvent tendance à majorer ces termes pour avoir une fonction de Riemann, pensant ainsi en déduire facilement l'intégrabilité. Mais en faisant cela, vous éliminerez très souvent ce qui assure justement cette intégrabilité. Dans le premier cas, majorer $\ln(t)$ par $t-1$ (ou t) donne une majoration par $t\mapsto\dfrac{t}{1+(xt)^2}$ qui n'est plus intégrable au voisinage de $+\infty$ (on a en effet $\dfrac{t}{1+(xt)^2}\underset{t\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{x^2t}$, et $t\mapsto\dfrac{1}{t}$ n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$). En majorant e^{-t} par 1 dans la seconde intégrale, vous obtenez une majoration par $t\mapsto t^{x-1}$ qui n'est JAMAIS intégrable sur $]0,+\infty[$ (problème au voisinage de 0 ou de $+\infty$). En résumé, retenez :

VOUS NE SIMPLIFIEREZ JAMAIS LE PROBLÈME EN MAJORANT CE QUI NE DÉPEND QUE DE LA VARIABLE D'INTÉGRATION.

Vous avez vu comment gérer ces termes « gênants » avec la « méthode $t^\alpha f(t)$ ». Ce n'est donc pas du tout un obstacle théorique à l'intégrabilité. **Ne vous préoccupez que de la majoration des termes dépendant de** x (avec les notations de cette section).

Exemple 13. Montrons que l'intégrale à paramètre $x \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+(xt)^2}\mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Nous vous laissons vérifier les hypothèses de régularité de routine, pour se concentrer uniquement sur l'hypothèse de domination. Vérifiez également que l'entreprise échoue si l'on ne se ramène pas à des segments, ce qui justifie que je m'y ramène : soit $[a,b] \subseteq \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $(x,t) \in [a,b] \times [1,+\infty[$:

ne dépend pas de x : JE N'Y TOUCHE PAS!

$$\left|\frac{\ln(t)}{1+(xt)^2}\right| = \frac{\ln(t)}{1+(xt)^2} \leqslant \frac{\ln(t)}{1+(at)^2} \qquad \text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION)}$$

et l'application $\varphi : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{1+(at)^2}$ est continue par morceaux et intégrable sur $[1,+\infty[$, car elle est positive, et on a : $\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^{3/2}}\right)$; comme $t \mapsto \dfrac{1}{t^{3/2}}$ est une fonction de Riemann d'exposant $\dfrac{3}{2} > 1$, elle est intégrable sur $[1,+\infty[$, et c'est donc aussi le cas de φ par comparaison de fonctions positives.

Ainsi l'hypothèse de domination est vérifiée.

Exercice 16. Vérifier en toute rigueur la relation de prépondérance $\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^{3/2}}\right)$ utilisée dans cet exemple.

Exemple 14. Bien sûr, s'il est difficile, voire impossible, d'étudier les variations de $x \mapsto g_2(x,t)$ (avec les notations ci-dessus) pour en déduire un majorant sur I, on peut diviser la difficulté du problème en étudiant séparément les variations de chacun de ses facteurs. Prenons l'exemple de l'intégrale à paramètre : $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{tx-t^2\sqrt{x}}\mathrm{d}t$, dont nous voudrions démontrer la continuité sur $\mathbb{R}_+^*$. Étudier les variations de $x \mapsto e^{tx-t^2\sqrt{x}}$ est déplaisant, mais il est facile d'étudier les variations de $x \mapsto e^{tx}$ (clairement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$), et de $x \mapsto e^{-t^2\sqrt{x}}$ (clairement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$). Ainsi, pour tout segment $[a,b] \subseteq \mathbb{R}_+^*$, et tout $(x,t) \in [a,b] \times]0,+\infty[$, on a :

$$\left|e^{tx-t^2\sqrt{x}}\right| = e^{tx} \cdot e^{-t^2\sqrt{x}} \leqslant e^{tb} \cdot e^{-t^2\sqrt{a}}, \qquad \text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION)}$$

et nous vous laissons vérifier que $\varphi : t \mapsto e^{tb} \cdot e^{-t^2\sqrt{a}}$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$ (en plus de toutes les autres hypothèses « faciles » du théorème de continuité sous le signe intégrale). Si l'on ne se restreint pas à des segments, l'hypothèse de domination ne peut pas être obtenue : vérifiez-le.

5.2.1 ✓ Majorer le sinus, l'arc tangente, etc.

Souvenez-vous que selon qu'on soit près de zéro ou non, il peut y avoir des majorations plus pertinentes des fonctions usuelles. C'est intéressant en particulier pour les intégrandes où l'on divise par une puissance de t non intégrable au voisinage de 0 : les majorations $|\sin(t)| \leqslant t$, $|\arctan(t)| \leqslant t$, etc., permettent éventuellement d'abaisser cette puissance pour obtenir une fonction intégrable.

Exemple 15. S'il faut démontrer que l'intégrale à paramètre : $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{xt} e^{-t}\mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, il s'agit de dominer indépendamment de x l'intégrande : notons que l'exponentielle décroissante $t \mapsto e^{-t}$ va assurer l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$, peu importe qu'on majore l'arc tangente par $\dfrac{\pi}{2}$ ou par xt : le théorème des croissances comparées permettra en tous les cas de dominer la fonction de domination par $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ qui est intégrable au voisinage de $+\infty$, et donc de conclure par comparaison. Bref, le seul dilemme sur la majoration de l'arc tangente, au moment de vérifier l'hypothèse de domination, est pour assurer l'intégrabilité au voisinage de 0.

Or nous savons que la majoration $|\arctan(xt)| \leqslant xt$ prévaut sur la majoration $|\arctan(xt)| \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ lorsqu'on est près de 0. C'est donc celle que nous allons retenir. Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times]0,+\infty[$:

ne dépend pas de x :
JE N'Y TOUCHE PAS!

$$\left|\frac{\arctan(xt)}{xt}e^{-t}\right| \overset{[xt\geqslant 0]}{=} \frac{\arctan(xt)}{xt}e^{-t} \leqslant \frac{xt}{xt}e^{-t} = e^{-t}$$

et l'application $\varphi : t \mapsto e^{-t}$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$ (c'est une fonction de référence), donc aussi sur $]0,+\infty[$: l'hypothèse de domination est vérifiée.

Pour se convaincre que c'était la bonne majoration à utiliser, notons que la majoration par $\frac{\pi}{2}$ aurait donné, pour tout segment $[a,b] \subseteq \mathbb{R}_+^*$, et pour tout $(x,t) \in [a,b]\times]0,+\infty[$ (pourquoi me suis-je ramené à un segment ?) :

ne dépend pas de x :
JE N'Y TOUCHE PAS!

$$\left|\frac{\arctan(xt)}{xt}e^{-t}\right| \overset{[xt\geqslant 0]}{=} \frac{\arctan(xt)}{xt}e^{-t} \leqslant \frac{\pi}{2xt}e^{-t} \leqslant \frac{\pi e^{-t}}{2at}$$

(Je sais que plus d'un parmi vous serait tenté, ici, de majorer $\frac{\pi}{2at}$ par $\frac{\pi}{2a}$ pour éliminer le facteur t gênant : je vous laisse vérifier HONNÊTEMENT que ce serait TOTALEMENT FAUX !). Or l'application $\varphi : t \mapsto \frac{\pi e^{-t}}{2at}$ n'est pas intégrable au voisinage de 0, parce qu'elle y est équivalente à $t \mapsto \frac{\pi}{2a}\cdot\frac{1}{t}$ qui est une fonction de Riemann non intégrable sur]0,1]. L'hypothèse de domination n'est donc pas vérifiée : ne trichez pas si vous tombez dans cette impasse, et utilisez l'autre majoration.

Exemple 16. S'il faut démontrer que l'intégrale à paramètre : $x \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t^2}\mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, notons qu'on n'intègre pas au voisinage de 0, et par conséquent le recours à l'inégalité $|\arctan(u)| \leqslant u$ ne s'impose pas. Pire : il est fautif. Il nous donnerait ici une majoration par $t \mapsto \frac{xt}{t^2} = \frac{x}{t}$, qui ne peut faire nos affaires (même si l'on se ramène à un segment pour faire disparaître la dépendance en x), parce que l'application $t \mapsto \frac{1}{t}$ n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$. Il est ici plus raisonnable de majorer l'arc tangente par $\frac{\pi}{2}$, et la fonction de domination $\varphi : t \mapsto \frac{\pi}{2t^2}$ devient alors trivialement intégrable sur $[1,+\infty[$: c'est une fonction de Riemann d'exposant $2 > 1$.

5.2.2 ✓ Que faire, lorsqu'on a à la fois besoin de $|\sin(t)| \leqslant |t|$ et $|\sin(t)| \leqslant 1$?

Le discours ci-dessous vaut bien évidemment pour d'autres fonctions que le sinus. Je le prends en exemple parce qu'il est la fonction la plus fréquemment problématique.

Il peut arriver que peu importe la majoration utilisée, nous ayons un problème. Prenons l'exemple concret :

$$x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t\sqrt{t}}\mathrm{d}t.$$

Si nous voulons démontrer que cette intégrale à paramètre est continue sur $\mathbb{R}_+$, nous sommes amenés à vérifier l'hypothèse de domination avec l'application $(x,t) \mapsto \frac{\sin(xt)}{t\sqrt{t}}$. Le dénominateur ne dépend pas de x : *on n'y touche pas*. Il suffit de majorer $\sin(xt)$ pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$, indépendamment de $x \in \mathbb{R}_+$. Mais nous avons un problème, peu importe la majoration de sinus choisie :

— si l'on choisit la majoration $|\sin(xt)| \leqslant 1$, alors l'intégrande est majoré par $t \mapsto \frac{1}{t\sqrt{t}}$, qui est intégrable au voisinage de $+\infty$ mais ne l'est pas au voisinage de 0, car c'est une fonction de Riemann d'exposant $\frac{3}{2} \geqslant 1$;

— si l'on choisit la majoration $|\sin(xt)| \leqslant |xt|$, alors l'intégrande est dominé par $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$, qui est intégrable au voisinage de 0 mais ne l'est pas au voisinage de $+\infty$, car c'est une fonction de Riemann d'exposant $\frac{1}{2} \leqslant 1$.

Dans ce cas, pour résoudre le problème : il suffit de ne pas choisir entre les deux, et de prendre les deux majorations ! On se souvient que la majoration : $|\sin(u)| \leqslant u$ n'est intéressante qu'au voisinage de 0, et dans le cas contraire on se contente de la majoration : $|\sin(u)| \leqslant 1$. Ainsi, pour la fonction de domination φ, il suffit de la définir autrement sur $]0,1]$ (par exemple : l'important est que ce soit au voisinage de 0) et sur $[1,+\infty[$. Dans cet exemple, on dominerait donc l'intégrande indépendamment de x, pris dans un segment $[a,b] \subseteq \mathbb{R}_+$, par :

$$\varphi : \begin{cases}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \begin{cases} \frac{b}{\sqrt{t}} & \text{si } t \in]0,1] & \text{(obtenue avec la majoration } |\sin(xt)| \leqslant xt \leqslant bt) \\ \frac{1}{t\sqrt{t}} & \text{si } t \in [1,+\infty[& \text{(obtenue avec la majoration } |\sin(xt)| \leqslant 1) \end{cases} \end{cases},$$

et on vérifie qu'il s'agit bien d'une fonction intégrable sur $]0,+\infty[$: c'est une fonction de Riemann d'exposant $\dfrac{1}{2} < 1$ sur $]0,1]$ et d'exposant $\dfrac{3}{2} > 1$ sur $[1,+\infty[$, donc l'intégrabilité est assurée sur ces deux intervalles, puis sur $]0,+\infty[$. L'hypothèse de domination est donc vérifiée sur tout segment de $\mathbb{R}_+$.

5.2.3 ☢ Que faire, si cela ne marche pas, même en tenant compte des conseils précédents ?

Cette situation est rare, et en général on vous donnera des indications.

Ce problème se pose souvent lorsque vous essayez d'obtenir une fonction de domination pour un intégrande NON INTÉGRABLE (mais malgré tout d'intégrale convergente). L'existence d'une fonction de domination contredirait cette non intégrabilité, à cause de la première conclusion du théorème de continuité sous le signe intégrale.

Ces fonctions-là ne font pas florès, mais il est standard de montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ converge, et ne converge pas absolument. C'est donc généralement une intégrale à paramètre faisant intervenir $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ (ou une variante de cette fonction) qui vous conduira à ce cas problématique.

Pour le résoudre, on procède de la même manière que lorsque les critères classiques ne permettent pas d'obtenir l'intégrabilité d'une fonction : on intègre par parties pour faire apparaître une fonction de Riemann d'exposant suffisant, et on essaie d'appliquer le théorème de continuité à la nouvelle intégrale obtenue !

Exercice 17. (Quasiment le seul exemple que vous pouvez rencontrer) On suppose qu'il fut démontré avec succès que pour tout $x > 0$, on a : $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$.

1. Montrer, grâce à une intégration par parties :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad F(x) - F(0) = -x + \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\left(1 - e^{-xt}(1+xt)\right)\mathrm{d}t.$$
2. Montrer que pour tout $(x,t) \in [0,1] \times]0,+\infty[$, on a : $|1 - e^{-xt}(1+xt)| \leqslant 1 - e^{-t}(1+t)$. On pourra passer par l'étude des variations de $x \mapsto 1 - e^{-xt}(1+xt)$, à $t \in]0,+\infty[$ fixé.
3. Montrer que l'application $\varphi : t \mapsto \dfrac{1 - e^{-t}(1+t)}{t^2}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.
4. En déduire que l'intégrale à paramètre $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\left(1 - e^{-xt}(1+xt)\right)\mathrm{d}t$ est continue sur $[0,1]$ (donc en particulier en 0), puis que F est continue en 0.
5. En déduire : $F(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

6 ☢ Limites et développements limités, asymptotiques d'intégrales

6.1 Encadrer explicitement une intégrale

Cette méthode est utile notamment lorsqu'il s'agit de déterminer la limite d'une suite d'intégrales, avec le théorème des gendarmes. Exemples : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\mathrm{d}x = 0$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)} = +\infty$.

Il n'existe pas de primitive simple pour ces intégrandes, et c'est ce qui rend le calcul compliqué. **Il n'est pas possible de simplement rentrer la limite dans l'intégrale**. Nous avons tout de même deux théorèmes de passage à la limite sous le signe intégrale (dont le *théorème de convergence dominée*), mais il est parfois possible de procéder directement : dans l'intégrande, on remplace la quantité qui nous empêche d'avoir une primitive simple (*en général un dénominateur*) par son maximum ou son minimum sur l'intervalle d'intégration, grâce à la croissance de l'intégrale. On obtient ainsi une majoration ou minoration par une quantité constante, qu'on sort de l'intégrale, et l'intégrande s'en trouve simplifié.

Exemple 17. Montrons : $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n}{1-x}\mathrm{d}x=0$. On a :

$$0\leqslant\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n}{1-x}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n}{1-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x=2\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\frac{1}{2}}.$$

Partant de là, il est très facile de montrer que la limite du membre de droite est 0 quand $n\to+\infty$, et on conclut avec le théorème des gendarmes.

Bien sûr, il s'agit d'être au point sur la majoration des quantités simples, en particulier s'il apparaît des quotients et des signes moins... Certains parmi vous n'auraient-ils pas été tentés d'écrire la majoration fausse $\frac{1}{1-x}\leqslant 1$ sous prétexte que $x\geqslant 0$? Pour ne pas vous tromper, partez de l'hypothèse sur la variable d'intégration x (à savoir ici : $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$) et, par opérations élémentaires (sommes, multiplications, passage à l'inverse) arrivez à la quantité que vous souhaitez encadrer. Voir aussi les conseils du document *L'art de la majoration.*

Exercice 18. Redémontrer : $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n}{1-x}\mathrm{d}x=0$, mais en majorant autrement l'intégrande.

Exemple 18. De la même manière, on a :

$$\int_x^{2x}\frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}\geqslant\frac{1}{\ln(2x)}\int_x^{2x}\mathrm{d}t=\frac{x}{\ln(2x)}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty.$$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{2x}\frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}=+\infty$.

La partie qui pose problème, dans ces raisonnements, est de correctement choisir ce qu'on majore (ou minore) dans l'intégrande, et ce qu'on laisse tel quel. Deux conseils :

— 1° plus vous effectuez de majorations, plus vous vous éloignez de l'intégrale de départ, et moins la majoration est bonne : touchez donc au moins de facteurs possibles de l'intégrande ;

— 2° identifiez ce qui rend l'intégrale « petite » (si vous voulez montrer une convergence vers 0) ou « grande » (si vous voulez une divergence vers $+\infty$), et N'Y TOUCHEZ PAS.

Par exemple, dans le cas de $\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$, c'est le terme x^n qui est de plus en plus petit sur $[0,1[$: si vous le majorez par 1, vous perdez ce qui contrôlait la taille de l'intégrale et ne pouvez pas conclure.

Au contraire, un facteur « proche » de 1 peut souvent (mais pas toujours) être retiré sans douleur, puisque multiplier par 1 ne change pas la valeur d'un réel. Par exemple, si l'on étudie le comportement de $\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt$ quand $x\to 0$, notons que $e^t\approx e^0=1$ quand $t\in[x,2x]$ et $x\to 0$, donc il ne coûte pas grand'chose de s'en débarrasser *a priori* : cela nous encourage à utiliser l'encadrement $e^x\leqslant e^t\leqslant e^{2x}$ pour sortir le terme exponentiel « qui ne compte pas » de l'intégrale, et se ramener à l'intégrale $\int_x^{2x}\frac{\mathrm{d}t}{t}$ facile à calculer (et égale à $\ln(2)$).

Exercice 19. Achever ce raisonnement pour en déduire : $\lim\limits_{x\to 0}\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}\mathrm{d}t=\ln(2)$.

Bien sûr, si l'on vous donne des outils de passage à la limite dans l'intégrale, c'est parce qu'il y a une raison : la méthode ci-dessus échoue dans bien des cas. Vous ne parviendrez pas à démontrer ainsi que la limite de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(x))^n \mathrm{d}x$ est 0 quand $n \to +\infty$, sauf à faire un découpage epsilonesque fin, bien que ce soit assez naturel (l'intégrande est un réel positif strictement inférieur à 1 élevé à la puissance n, sauf en $\frac{\pi}{2}$, donc il devient de plus en plus petit).

Ne vous acharnez donc pas si aucun encadrement ne fonctionne.

6.2 Développements limités et asymptotiques

Il est difficile en général d'obtenir un développement limité ou asymptotique d'une intégrale. Les trois cas les plus favorables sont lorsque :

— on peut utiliser le **théorème d'intégration des relations de comparaison** (ce qui est déjà foutu si la variable x qui tend vers 0 ou l'infini est dans l'intégrande et non les bornes de l'intégrale) ;

— on peut **calculer explicitement l'intégrale**, pour l'exprimer à l'aide de fonctions usuelles et faire leurs développements limités ;

— un **théorème d'interversion s'applique**, par exemple pour montrer : $\displaystyle\int_I f_n(t)\mathrm{d}t = \frac{\ell}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$, en montrant le résultat équivalent : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_I n f_n(t)\mathrm{d}t = \ell$.

Le cas le plus simple, pour trouver un équivalent grâce au théorème d'intégration des relations de comparaison, est lorsqu'on cherche un équivalent de $\displaystyle\int_a^x f$ (ou $\displaystyle\int_x^b f$) avec f de la forme : $f = u'v$. Si l'on parvient à écrire : $f \underset{a}{\sim} u'v + uv' > 0$, avec uv' CLAIREMENT négligeable devant $u'v$, il ne reste plus qu'à intégrer cet équivalent pour conclure. L'intérêt de la manœuvre est que l'intégrale de $u'v + uv'$ se simplifie immédiatement puisqu'on connaît une primitive (à savoir uv). Cela donne un équivalent explicite. On l'illustre dans le premier exemple ci-dessous.

Notez que ces trois approches ont l'avantage de ne pas nécessiter d'idée *a priori* de ce que l'on veut. Une quatrième situation est aussi agréable, mais elle nécessite plus de finesse :

— quand la **formule de l'intégration par parties** donne un terme entre crochets CLAIREMENT prépondérant devant la nouvelle intégrale obtenue (par CLAIREMENT, on veut dire : on parvient à le démontrer par une majoration triviale de l'intégrale ou avec le théorème d'intégration des relations de comparaison). Cela nécessite un bon choix de fonction à intégrer et dériver, et donc de la finesse dans l'appréciation des ordres de grandeur.

Quand on n'est pas dans l'un de ces quatre cas de figure, on essaie de s'y ramener dans la mesure du possible, **souvent avec un changement de variable** (par exemple pour avoir une intégrale sans variable dans l'intégrande, mais dans la borne, afin d'utiliser le théorème d'intégration des relations de comparaison ; ou encore, pour appliquer le théorème de convergence dominée, là où l'intégrale initiale ne le permettait pas). Mais ce n'est pas toujours suffisant et nous y revenons après ces quelques exemples :

Exemple 19. (Illustration élémentaire du 1$^{\text{er}}$ cas) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On cherche un équivalent quand $x \to +\infty$ de l'intégrale $\displaystyle\int_0^x t^a e^t \mathrm{d}t$. Pour cela, il suffit de remarquer que l'on a :

$$t^a e^t \underset{t\to+\infty}{\sim} t^a e^t + a t^{a-1} e^t > 0.$$

(Objectif de la manœuvre : on pense avoir reconnu uv', on essaie de faire apparaître $u'v$ de manière licite ; pour cela, il faut que ce soit négligeable devant le uv' candidat et c'est bien le cas ici). Or $t \mapsto t^a e^t + a t^{a-1} e^t$ n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$, puisqu'une primitive (qu'on sait calculer immédiatement, et pour cause : on a fait en sorte de faire apparaître la dérivée d'un produit, c'est l'intérêt de la manœuvre !) est $t \mapsto t^a e^t$, qui admet une limite infinie en l'infini. Par le théorème d'intégration des équivalents :

$$\int_0^x t^a e^t \mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_0^x \left(t^a e^t + a t^{a-1} e^t\right) \mathrm{d}t = \left[t^a e^t\right]_0^x = x^a e^x.$$

Exercice 20. (Illustration du 2e cas) Lorsque a est un entier naturel, retrouver l'équivalent de cet exemple en passant par un calcul explicite de l'intégrale.

Exemple 20. (Illustration plus fine du 1er cas) On cherche un équivalent quand $n \to +\infty$ de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan(nx)}{x}\mathrm{d}x$. Le théorème d'intégration des relations de comparaison ne semble pas s'appliquer. En revanche, si l'on fait le changement de variable : $u = nx$, on a : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan(nx)}{x}\mathrm{d}x = \int_0^n \frac{\arctan(u)}{u}\mathrm{d}u$, et on a : $\displaystyle\frac{\arctan(u)}{u} \underset{u\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2u} > 0$. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u}$ diverge et donc, par le théorème d'intégration des équivalents : $\displaystyle\int_1^n \frac{\arctan(u)}{u}\mathrm{d}u \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}\int_1^n \frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{\pi}{2}\ln(n)$. Comme $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan(u)}{u}\mathrm{d}u$ est évidemment négligeable devant une quantité qui tend vers l'infini, on conclut :

$$\int_0^1 \frac{\arctan(nx)}{x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\arctan(u)}{u}\mathrm{d}u + \int_1^n \frac{\arctan(u)}{u}\mathrm{d}u \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_1^n \frac{\arctan(u)}{u}\mathrm{d}u \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}\ln(n).$$

Exemple 21. (Illustration du 3e cas) On cherche un équivalent quand $n \to +\infty$ de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t$. On pose $u = t^n$ afin de reconnaître une des situations favorables décrites ci-dessus, et on a : $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{u^{\frac{1}{n}}}{1+u^{\frac{1}{n}}}\mathrm{d}u$. En appliquant le théorème de convergence dominée avec cette intégrale (une fonction de domination étant $u \mapsto 1$), on obtient : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{u^{\frac{1}{n}}}{1+u^{\frac{1}{n}}}\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{1}{2}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}$. On en déduit :

$$\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

Exemple 22. (Illustration du 4e cas) On reprend l'exemple précédent. Nous allons obtenir un équivalent sans utiliser le théorème de convergence dominée. Une intégration par parties, où l'on dérive $t \mapsto \dfrac{1}{1+t}$ et intègre $t \mapsto t^n$, donne : $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2}\mathrm{d}t$. Or le théorème de convergence dominée (avec la fonction de domination $t \mapsto 1$) donne facilement : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2}\mathrm{d}t = 0$. On retrouve donc : $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2(n+1)} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$.

Exercice 21. Compléter les détails qui ont été omis dans chacun des trois exemples.

Exercice 22. Obtenir un terme supplémentaire dans le développement asymptotique de l'intégrale des exemples 21 et 22.

Si les quatre approches ci-dessus échouent et qu'on ne parvient pas à s'y ramener par un simple changement de variable ou une intégration par parties : c'est là qu'il faut commencer à tâtonner et avoir le « sens de l'Analyse » cher à Jean Dieudonné. C'est-à-dire : étant donnée une intégrale $\displaystyle\int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ dépendant d'un paramètre x au voisinage de 0 ou $+\infty$, on essaie de montrer qu'elle est « proche » d'une autre intégrale :

$$\int_I g(x,t)\mathrm{d}t,$$

qui aurait le bon goût de pouvoir s'étudier grâce aux quatre approches ci-dessus. Pour trouver la bonne fonction g, il faut analyser, quand $x \to 0$ ou $x \to +\infty$, quelles sont les quantités prépondérantes dans $\displaystyle\int_I f(x,t)\mathrm{d}t$, *et les garder* ; il ne faut pas oublier d'avoir en tête OÙ elles sont prépondérantes (en général c'est au voisinage d'une extrémité de l'intervalle I ; mais laquelle ?) ; appelons a l'extrémité où elles sont prépondérantes. On approche ensuite les quantités négligeables (qui *a priori* ne contribuent donc pas significativement à la valeur de $\displaystyle\int_I f(x,t)\mathrm{d}t$), en les remplaçant par leur valeur au voisinage de a. Une fois que vous aurez fait cela, vous aurez votre intégrale $\displaystyle\int_I g(x,t)\mathrm{d}t$ qui, on l'espère, est plus simple à étudier (dans les cas idéaux, elle est explicitement calculable).

On prendra garde, pour ne pas avoir une « mauvaise fonction » g :

— à ne PAS remplacer x par zéro, même si $x \to 0$ (cela vaut aussi, souvent, pour une fonction qui s'annulerait en a) ;

— à ne PAS faire apparaître une intégrale divergente : tout ce que cela vous enseignerait, ce serait que $\displaystyle\int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ tend vraisemblablement vers l'infini : intéressant, mais ce n'est pas ce qu'on cherche ici.

Tout cela est très bien, mais une fois qu'on a obtenu un équivalent ou développement de $\displaystyle\int_I g(x,t)\mathrm{d}t$: que fait-on ? On étudie $\displaystyle\int_I f(x,t)\mathrm{d}t - \int_I g(x,t)\mathrm{d}t = \int_I (f(x,t) - g(x,t))\mathrm{d}t$ et on essaie :

— soit des encadrements visant à démontrer que cette intégrale est négligeable devant $\displaystyle\int_I g(x,t)\mathrm{d}t$ (de sorte que l'équivalent de $\displaystyle\int_I g(x,t)\mathrm{d}t$ trouvé donne aussi un équivalent de $\displaystyle\int_I f(x,t)\mathrm{d}t = \int_I (f(x,t) - g(x,t))\mathrm{d}t + \int_I g(x,t)\mathrm{d}t)$;

— soit les quatre méthodes ci-dessus (qui peuvent parfois s'appliquer à cette intégrale même si elles ne s'appliquaient pas à $\displaystyle\int_I f(x,t)\mathrm{d}t$! c'est le cas en particulier si la différence ci-avant supprime une discontinuité en une extrémité et facilite la vérification d'une hypothèse de domination).

Vous aurez souvent à majorer des « différences petites » au sens de *L'art de la majoration*, pour justement quantifier l'écart entre les fonctions de l'intégrande initial et leurs approximations en ce qu'on a appelé a. Utilisez dans ce cas l'inégalité des accroissements finis, ou la formule de Taylor à un ordre k si vous avez besoin de k termes dans le développement limité (ou asymptotique) de votre intégrale.

Exemple 23. On cherche un équivalent quand $x \to 0$ de : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{ch}(t)}{(t+x)\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t$. Une *bêtise* serait de faire le raisonnement suivant : quand $x \to 0$, on a : $t + x \approx t$, donc : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{ch}(t)}{(t+x)\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t \approx \int_0^1 \frac{\mathrm{ch}(t)}{t\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t$. Après, qu'importe si vous faites d'autres analogues qualitatives vous avez là une intégrale divergente et vous êtes bien avancés.

En revanche, une conjecture pertinente est la suivante : lorsque $x \to 0$, $\frac{1}{t+x}$ devient très grand au voisinage de $t = 0$, et c'est ce terme qui contribue en majorité à la valeur de l'intégrale. Puisque c'est la valeur au voisinage de $t = 0$ qui contribue le plus, on ne perd rien à faire les approximations suivantes : $\mathrm{ch}(t) \approx \mathrm{ch}(0) = 1$, et : $\sqrt{1-t} \approx \sqrt{1} = 1$. Ainsi $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{ch}(t)}{(t+x)\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t$ devrait être proche de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t+x}\mathrm{d}t$ quand $x \to 0$. Or cette intégrale est très facile à calculer, puisque l'on a :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t+x}\mathrm{d}t = [\ln(t+x)]_0^1 = \ln(1+x) - \ln(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln(x),$$

et on peut donc conjecturer : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{ch}(t)}{(t+x)\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t \underset{x\to 0}{\sim} -\ln(x)$. Montrons-le :

$$\left|\int_0^1 \frac{\mathrm{ch}(t)}{(t+x)\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t+x}\mathrm{d}t\right| = \int_0^1 \frac{\mathrm{ch}(t) - \sqrt{1-t}}{(t+x)\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{ch}(t) - \sqrt{1-t}}{t\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t.$$

Cette intégrale converge, le plus technique à vérifier étant l'équivalent : $\mathrm{ch}(t) - \sqrt{1-t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t}{2}$. Une fois qu'on l'a, le reste de la vérification est trivial. En particulier : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{ch}(t)}{(t+x)\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t+x}\mathrm{d}t = \underset{x\to 0}{O}(1) = \underset{x\to 0}{o}(\ln(x))$, et on en déduit :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{ch}(t)}{(t+x)\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t+x}\mathrm{d}t + \underset{x\to 0}{o}(\ln(x)) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln(x).$$

Exercice 23. Compléter ce qui a été omis dans cet exemple.

Si vous voulez augmenter la précision de votre développement limité ou asymptotique :

— soit vous avez utilisé l'inégalité des accroissements finis, ou la formule de Taylor à un certain ordre ; auquel cas, il suffit de le pousser à un ordre plus élevé ;

— soit vous refaites le même raisonnement que ci-dessus, mais avec l'intégrale $\int_I (f(x,t) - g(x,t))\mathrm{d}t$; et ainsi de suite.

On remarquera une similarité entre le discours de cette partie et celui de la section 7.2 : presque tous les conseils qui y sont formulés s'appliquent aussi à cette situation.

7 Étude des intégrales de la forme $\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\mathrm{d}t$

Lorsqu'on vous demande d'étudier des intégrales de la forme $F : x \mapsto \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\mathrm{d}t$, comme par exemple :

$$x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}, \quad x \mapsto \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\mathrm{d}t, \quad x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{e^t}{e^t - 1}\mathrm{d}t, \quad x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{e^{-t}}{\sin(t)(1-t)}\mathrm{d}t,$$

deux questions peuvent principalement vous être posées :

— quelles sont les variations de cette fonction F ?

— quelles sont ses limites aux extrémités de son intervalle de définition ?

Pour que la seconde question ait de l'intérêt, il faut qu'une extrémité soit $\pm\infty$, ou un réel où l'intégrande f n'est pas continu.

7.1 Étudier les variations

C'est facile si l'on est méthodique.

1. Si f est continue, elle admet une primitive ; notons-la ψ dans ce qui suit.
2. D'après le théorème fondamental de l'analyse, on a alors $F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\mathrm{d}t = [\psi(t)]_{\alpha(x)}^{\beta(x)} = \psi(\beta(x)) - \psi(\alpha(x))$. Il reste à dériver ces fonctions qui sont des compositions :
$$F'(x) = \beta'(x)\psi'(\beta(x)) - \alpha'(x)\psi'(\alpha(x)) = \beta'(x)f(\beta(x)) - \alpha'(x)f(\alpha(x)).$$
3. Il reste à étudier le signe de F' pour en déduire les variations de F.

7.2 ☢ Calculer sa limite aux extrémités

Il est indispensable de lire cette section en complément de la section 6. Les conseils qui y sont formulés restent valables, mais sont ici affinés.

Cas d'une limite où les bornes $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ tendent vers un même réel a. Nous proposons deux méthodes. La première est beaucoup moins technique que la seconde. Néanmoins la seconde est conceptuellement plus riche d'enseignements, et peut réussir là où la première échoue. *L'idée, dans les deux cas, est de « remplacer » f par un équivalent plus simple, de sorte à se ramener à une intégrale calculable et dont la limite devient facile à obtenir.*

Méthode 1.

1. On commence par CONJECTURER (rien de rigoureux !) la limite éventuelle en a, en trouvant un équivalent asymptotique simple de $f(t)$ quand $t \to a$: notons-le $g(t)$ dans ce qui suit.

2. On calcule explicitement $\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} g(t)\mathrm{d}t$, puis $\lim_{x\to\bigstar} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} g(t)\mathrm{d}t$.
   C'est l'intérêt de se ramener à un équivalent asymptotique simple : avoir une intégrale calculable explicitement. Notons L cette limite dans ce qui suit.
3. On montre que l'application $t \mapsto f(t) - g(t)$ se prolonge par continuité en a.
   Cela revient à démontrer que $f-g$ admet une limite finie en a : on y parvient en général en effectuant un développement limité de f. *Cette étape peut échouer ! si le prolongement par continuité est faux, il faut recourir à la seconde méthode ci-dessous.*
4. Voyons comment en déduire : $\lim_{x\to\bigstar} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} (f(t)-g(t))\mathrm{d}t = 0$. Comme $f-g$ est continue sur un intervalle contenant a, elle admet une primitive φ, qui est elle aussi continue en a (car dérivable en ce point). Il est inutile de vouloir l'expliciter. On a en effet :

$$\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} (f(t)-g(t))\mathrm{d}t = [\varphi(t)]_{\alpha(x)}^{\beta(x)} = \varphi(\beta(x)) - \varphi(\alpha(x)) \underset{x\to\bigstar}{\longrightarrow} \varphi(a) - \varphi(a) = 0.$$

5. On en déduit : $\lim_{x\to\bigstar} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to\bigstar} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} g(t)\mathrm{d}t = L$.

Méthode 1 pour calculer $\lim_{x\to\bigstar} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\mathrm{d}t$

(1) Trouver un équivalent asymptotique simple de f en a (on le note g ci-dessous).

(2) Calculer $\lim_{x\to\bigstar} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} g(t)\mathrm{d}t$.

(3) Montrer que $\lim_a (f-g) < +\infty$: en déduire que $f-g$ se prolonge par continuité en a.

(4) En déduire $\lim_{x\to\bigstar} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} (f(t)-g(t))\mathrm{d}t = 0$, puis $\lim_{x\to\bigstar} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to\bigstar} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} g(t)\mathrm{d}t$.

Exemple 24. Calculons : $\lim_{x\to 1} \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$. On a classiquement : $\frac{1}{\ln(t)} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{1}{t-1}$ (1), et facilement :

$$\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t-1} = [\ln(|t-1|)]_x^{x^2} = \ln\left(\left|\frac{x^2-1}{x-1}\right|\right) = \ln(|x+1|) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} \ln(2) \quad (2).$$

Ainsi on peut conjecturer que : $\lim_{x\to 1} \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)} = \ln(2)$, ce que nous allons démontrer en poursuivant la méthode ci-dessus.

Vérifions que l'application $t \mapsto \frac{1}{\ln(t)} - \frac{1}{t-1}$, continue sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$, se prolonge par continuité en 1.

On a, pour tout t au voisinage de 1, le développement limité usuel : $\ln(t) = (t-1) - \frac{(t-1)^2}{2} + \underset{t\to 1}{o}((t-1)^2)$. Donc :

$$\frac{1}{\ln(t)} - \frac{1}{t-1} = \frac{(t-1)-\ln(t)}{\ln(t)(t-1)} = \frac{\frac{(t-1)^2}{2} + \underset{t\to 1}{o}((t-1)^2)}{\ln(t)(t-1)} \underset{t\to 1}{\sim} \frac{\cancel{(t-1)^2}}{2\cancel{(t-1)^2}} \underset{t\to 1}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

Ainsi $t \mapsto \frac{1}{\ln(t)} - \frac{1}{t-1}$ admet une limite finie en 1 (égale à $\frac{1}{2}$), donc elle se prolonge par continuité en 1, puis sur $]0,+\infty[$ (3). On en déduit, par le raisonnement détaillé ci-dessus (qui serait à reproduire dans une copie), que : $\lim_{x\to 1} \int_x^{x^2} \left(\frac{1}{\ln(t)} - \frac{1}{t-1}\right) \mathrm{d}t = 0$ (4). En conclusion :

$$\lim_{x\to 1} \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)} \overset{(4)}{=} \lim_{x\to 1} \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t-1} = \ln(2).$$

Exercice 24. Calculer les limites quand $x \to 0$ de $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{e^t}{e^t-1}\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{e^{-t}}{\sin(t)(1-t)}\mathrm{d}t$ avec cette méthode.

Exercice 25. Montrer que cette méthode peut échouer, en étudiant $\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_x^{2x}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}+\ln(t)\right)\mathrm{d}t$ (qu'on saurait très bien calculer directement, ceci dit...).

Méthode 2. Il suffit de reproduire à l'identique le plan de la première méthode, mais en modifiant uniquement la troisième étape (celle susceptible d'échouer). Pour ce faire, au lieu de montrer que $f-g$ se prolonge par continuité en a :

— *on majore $|f-g|$ en remplaçant les équivalents ou développements limités utilisés (pour obtenir g) par l'emploi de la formule de Taylor avec reste intégral*, et on injecte ce majorant dans l'intégrale $\displaystyle\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}(f-g)$: voir *L'art de la majoration*, cinquième section, pour des détails concernant un bon emploi de cette formule de Taylor ;

— on en déduit un encadrement de $\displaystyle\left|\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}(f(t)-g(t))\mathrm{d}t\right|$ par deux termes qui tendent vers 0 (le minorant est 0), et on en déduit par le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{x\to\bigstar}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}(f(t)-g(t))\mathrm{d}t=0$.

Comme dit plus haut, on conclut ensuite comme dans la première méthode.

Exemple 25. Reprenons la limite de l'exemple 24, mais en montrant cette fois-ci que :

$$\lim_{x\to 1^+}\int_x^{x^2}\left(\frac{1}{\ln(t)}-\frac{1}{t-1}\right)\mathrm{d}t=0$$

avec la méthode ci-dessus. Pour tout $t>1$, on a :

$$\frac{1}{\ln(t)}-\frac{1}{t-1}=\frac{(t-1)-\ln(t)}{\ln(t)(t-1)}.$$

Or, d'après la formule de Taylor avec reste intégral, appliquée au logarithme, à l'ordre 1 en 1, on a pour tout $t>1$:

$$\ln(t)=t-1+(t-1)^2\int_0^1(1-u)\ln''(1+u(t-1))\mathrm{d}u=t-1-(t-1)^2\int_0^1\frac{1-u}{(1+u(t-1))^2}\mathrm{d}u$$

Or : $\forall u\in[0,1]$, $\forall t>1$, $0\leqslant \dfrac{1}{(1+u(t-1))^2}\leqslant 1$. On en déduit :

$$\forall t>1,\quad (t-1)^2\int_0^1(1-u)\mathrm{d}u\geqslant (t-1)-\ln(t)\geqslant 0 \iff \forall t>1,\quad \frac{(t-1)^2}{2}\geqslant (t-1)-\ln(t)\geqslant 0.$$

Ainsi :

$$\forall t>1,\quad 0\leqslant\frac{(t-1)-\ln(t)}{\ln(t)(t-1)}\leqslant\frac{t-1}{2\ln(t)}.$$

Alors, pour tout $x>1$, on a :

$$0\leqslant\int_x^{x^2}\left(\frac{1}{\ln(t)}-\frac{1}{t-1}\right)\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{2}\int_x^{x^2}\frac{t-1}{\ln(t)}\mathrm{d}t.$$

Il est facile de démontrer que $t\mapsto\dfrac{t-1}{2\ln(t)}$ se prolonge en une application continue sur $]0,+\infty[$; si on en note F une primitive, alors :

$$\int_x^{x^2}\frac{t-1}{2\ln(t)}\mathrm{d}t=F(x^2)-F(x)\underset{x\to 1}{\longrightarrow}F(1)-F(1)=0.$$

Par conséquent, d'après le théorème des gendarmes : $\lim_{x\to 1^+} \int_x^{x^2} \left(\frac{1}{\ln(t)} - \frac{1}{t-1}\right) \mathrm{d}t = 0$. C'est ce qu'il fallait démontrer. L'étude est analogue pour $x \to 1^-$.

La deuxième méthode a aussi l'avantage de pouvoir s'adapter à la recherche d'équivalents (dans le cas où $\lim_{x\to\bigstar} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\mathrm{d}t$ est nulle ou infinie), puisqu'elle peut parfois fournir un encadrement de l'intégrale par deux quantités équivalentes.

Cas d'une limite infinie. Pour les limites en $+\infty$, cela dépend de ce qu'on veut montrer. Il faut d'abord conjecturer la limite (si le résultat n'est pas donné) en regardant si l'intégrande a tendance à être « gros » ou « petit » sur l'intervalle d'intégration quand $x \to +\infty$, mais cela peut être plus subtil selon la longueur de l'intervalle, comme nous le verrons (par exemple, la variation du logarithme n'est pas significative sur un intervalle de la forme $[x,2x]$, donc bien qu'il tende vers l'infini ce peut être compensé par d'autres variations). Une fois la conjecture établie :

1. On ne touche pas à la quantité qui « dicte la taille » (i.e. si on veut montrer que la limite est infinie, on conserve la fonction prépondérante qui tend vers l'infini ; et inversement si la limite est nulle).
2. On encadre l'intégrale **en encadrant les quantités de l'intégrande** qui sont soit proches de 1 (chose indolore peu importe ce qu'on veut démontrer), soit négligeables devant la quantité prépondérante trouvée à l'étape ci-dessus, **par leurs valeurs aux extrémités de l'intervalle** (si elles sont monotones ; sinon, calculer leurs extremums). **Ces valeurs-là ne dépendent pas de la variable d'intégration, et on peut donc les sortir de l'intégrale.**
3. Si l'étape précédente est bien conduite, les deux extrémités de l'encadrement proposé sont des intégrales faciles à calculer. On peut alors conclure avec le théorème des gendarmes.

Si l'on veut trouver une limite infinie, nul besoin d'un encadrement : une minoration suffit.

Exemple 26. Calculons : $\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x^2} \frac{e^t}{e^t-1}\mathrm{d}t$. Il est raisonnable de conjecturer que l'on a :

$$\int_x^{x^2} \frac{e^t}{e^t-1}\mathrm{d}t \approx \int_x^{x^2} \frac{\cancel{e^t}}{\cancel{e^t}}\mathrm{d}t = x^2 - x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

lorsque $x \to +\infty$. Vérifions-le ; conformément au conseil ci-dessus, la quantité $\frac{e^t}{e^t-1}$ est proche de 1 quand $x \to +\infty$ et il est donc indolore de la minorer par son minimum sur $[x, x^2]$ (afin de la sortir de l'intégrale). Pour faciliter la minoration, on écrit : $\frac{e^t}{e^t-1} = 1 + \frac{1}{e^t-1} \geqslant 1 + \frac{1}{e^{x^2}-1}$, de sorte que :

$$\forall x > 1, \quad \int_x^{x^2} \frac{e^t}{e^t-1}\mathrm{d}t \geqslant \int_x^{x^2} \left(1 + \frac{1}{e^{x^2}-1}\right) \mathrm{d}t = \underbrace{(x^2-x)}_{\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{e^{x^2}-1}\right)}_{\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

donc d'après le théorème des gendarmes : $\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x^2} \frac{e^t}{e^t-1}\mathrm{d}t = +\infty$.

Exercice 26. Montrer plus précisément que l'on a : $\int_x^{x^2} \frac{e^t}{e^t-1}\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$.

8 Sommes de Riemann

On rappelle le résultat essentiel à connaître sur les sommes de Riemann. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une application continue sur $[a,b]$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

C'est là une version simplifiée de l'énoncé au programme. On peut en effet changer le pas de la subdivision associée à la somme de Riemann de f.

Cet énoncé permet de calculer des limites de suites de sommes, à condition de pouvoir les écrire sous la forme du membre de gauche.

Cette section concerne le calcul effectif de limites grâce aux sommes de Riemann. Pour leur emploi plus théorique dans les approximations d'intégrales, on consultera la section 9 plus loin. → page 35

8.1 Comment les reconnaître ?

On *peut* penser à reconnaître une somme de Riemann dans un exercice, lorsqu'on nous demande de calculer la limite quand $n \to +\infty$, d'une somme **finie** (dont le nombre de termes dépend de n), dont le terme général dépend de l'indice de sommation k **et** de n. C'est-à-dire, lorsqu'on nous demande de calculer une limite de la forme :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (\text{quantité dépendant de } k \text{ et } n), \text{ ou } \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{2^n} (\text{quantité dépendant de } k \text{ et } n), \text{ etc.}$$

Par exemple :

$$\lim_{n\to+\infty} 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^n} \frac{1}{4k^2+2^n}, \quad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}, \quad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{n^2} \cos\left(\frac{k\pi}{n^2}\right)$$

peuvent faire penser à des sommes de Riemann.

Il existe des cas où l'on peut y penser même quand le terme général ne dépend pas de n, mais c'est plus subtil : on s'y ramène en « ajoutant les termes manquants » pour reconnaître une somme de Riemann (en multipliant et divisant par n par exemple).

Votre souci est alors : comment reconnaître la fonction f ? L'intervalle $[a, b]$? La quantité $a + \frac{k}{n}(b-a)$? Cela semble difficile, d'autant plus que les sommes en question ne sont pas directement mises sous la forme classique d'une somme de Riemann.

Voici quelques pistes :

1. Tout d'abord, ne vous focalisez pas sur l'intervalle $[a, b]$: vous pouvez TOUJOURS le prendre égal à $[0,1]$. Ce qui simplifie l'énoncé à reconnaître :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$$

   On peut remplacer n par n'importe quelle quantité dépendant de n et tendant vers $+\infty$. De plus, il n'est pas gênant si la somme ne va pas jusqu'à $n-1$, mais n, $n+1$... (De même pour l'indice de départ.)

2. Pour transformer votre somme afin qu'elle soit sous la forme $\displaystyle\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$, vous essayez de faire apparaître des termes en $\dfrac{k}{n}$, quitte à faire des factorisations, divisions, etc., par n.

   Une fois que vous avez fait ceci, vous remplacez tous ces $\dfrac{k}{n}$ par des x, et vous appelez $f(x)$ la quantité ainsi obtenue : c'est la fonction f dont vous étudiez la somme de Riemann.
   Il est important qu'il ne reste AUCUN terme en k « isolé » (c'est-à-dire : non divisé par n). Si ce n'est pas possible, alors ce n'est pas une somme de Riemann.

   Encore une fois, si la somme n'a pas n termes, mais (disons) α_n, on s'adapte : on fait apparaître $\dfrac{k}{\alpha_n}$ au lieu de $\dfrac{k}{n}$.

3. Si vous avez bien suivi les étapes ci-dessus, alors la somme que vous étudiez est de la forme $\displaystyle\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$, et vous savez donc que sa limite quand $n \to +\infty$ est $\displaystyle\int_0^1 f$: il ne reste plus qu'à calculer cette intégrale.

S'il manque le $\dfrac{1}{n}$ en facteur, rien de grave : on multiplie et divise par n pour le faire apparaître.

Reconnaître une somme de Riemann

(1) Faire apparaître du $\frac{k}{n}$ dans la somme, et remplacer les $\frac{k}{n}$ par x : cela définit la fonction f dont vous avez besoin.

(2) La somme étudiée est alors $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$, ou une variante : sa limite est $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.

Exemple 27. Calculons : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2^{n+1}\sum_{k=0}^{2^n}\frac{1}{4k^2+2^n}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, on a :

$$2^{n+1}\sum_{k=0}^{2^{n-1}}\frac{1}{4k^2+2^{2n}} \overset{(1)}{=} 2^{n+1}\sum_{k=0}^{2^{n-1}}\frac{1}{2^{2n}}\cdot\frac{1}{\frac{k^2}{2^{2n-2}}+1} = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{2^{n-1}}\frac{1}{\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right)^2+1}$$

Posons : $\forall x\in[0,1],\ f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ (1). Alors, pour tout $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, on a d'après les calculs ci-dessus :

$$2^{n+1}\sum_{k=0}^{2^{n-1}}\frac{1}{4k^2+2^{2n}} = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{2^{n-1}} f\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right).$$

C'est la somme de Riemann de f de pas 2^{n-1}, associée à la subdivision : $0=\frac{0}{2^{n-1}}\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}\leqslant\frac{2}{2^{n-1}}\leqslant\cdots\leqslant\frac{k}{2^{n-1}}\leqslant\cdots\leqslant\frac{2^{n-1}}{2^{n-1}}=1$.

En vérité il y a un terme en trop dans la somme ci-dessus, mais il n'affecte pas du tout la limite des sommes de Riemann. Comme f est continue sur $[0,1]$, on sait que :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{2^{n-1}} f\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = [\arctan(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4}, \qquad (2)$$

donc finalement : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2^{n+1}\sum_{k=0}^{2^{n-1}}\frac{1}{4k^2+2^{2n}}=\frac{\pi}{4}$.

Exercice 27. Étudier de même le comportement quand $n\to+\infty$ de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n+k}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{n^2}\cos\left(\frac{k\pi}{n^2}\right)$.

8.2 Cas d'une limite de produits

Il est aussi possible de recourir aux sommes de Riemann pour calculer des limites de suites de produits de la forme :

$$\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=0}^{n}(\text{quantité dépendant de } k \text{ et } n)^{(\text{puissance dépendant de } n)}.$$

Par exemple : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Il est possible de calculer ces limites grâce aux sommes de Riemann. Pour cela :

— il suffit de prendre le logarithme (si les termes du produit sont bien strictement positifs), afin de transformer le produit en somme ;

— on calcule la nouvelle limite étudiée grâce aux sommes de Riemann ;

— on revient à la limite de départ par composition avec la fonction exponentielle.

Exercice 28. Appliquer cette méthode pour montrer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{4}{e}$.

9 ☢ Les différentes techniques d'approximation des intégrales

Ces techniques d'approximation sont en général utilisés dans un cadre *théorique* (fonctions non définies explicitement). On vous demande parfois (ou pire : on ne vous demande rien et vous devez y penser de vous-mêmes) de démontrer un résultat concernant $\int_I f$ en introduisant :

— un **segment** $J \subseteq I$ tel que : $\left|\int_I f - \int_J f\right| \leqslant \varepsilon$ (**approximation de l'intervalle d'intégration**) ;

— une fonction en escalier ou polynomiale φ telle que : $\|f-\varphi\|_\infty \leqslant \varepsilon$ (**approximation de l'intégrande**) ;

— une somme de Riemann $S_n(f)$ telle que : $\left|\int_I f - S_n(f)\right| \leqslant \varepsilon$ (**approximation de l'intégrale**).

Je n'inclus pas la comparaison entre séries et intégrales qui, pour moi, est d'une nature assez différente. J'en parle assez longuement dans la section 3.

Je discute ici des mérites comparés de ces trois approches et des cadres *où l'on peut y penser*, mais il faut tout de même accepter l'idée que la question de l'approximation est subtile et que je ne donnerai pas d'approche systématique.

À chaque approximation, l'idée sous-jacente est : on sait démontrer le résultat de l'exercice en changeant légèrement les données : l'intervalle d'intégration, la régularité de l'intégrande, ou en remplaçant l'intégrale par une somme. On essaie alors de s'y ramener.

À noter que ces idées se combinent. Il n'est pas rare de *d'abord* approcher l'intervalle d'intégration par un segment, pour *ensuite* approcher l'intégrande par densité.

9.1 Quand se ramener à un segment ?

Les segments permettent d'utiliser les deux théorèmes d'approximation des fonctions suivants :

— la densité des fonctions en escalier ;

— la densité des fonctions polynomiales ;

mais aussi ces différents résultats valables uniquement sur des segments, sauf hypothèses supplémentaires (limites finies en $\pm\infty$ par exemple) :

— les fonctions continues (par morceaux) sont bornées sur tout segment ;

— les fonctions continues sur un segment sont uniformément continues (théorème de Heine) ;

— il arrive parfois qu'une suite de fonctions converge uniformément sur tout segment sans converger uniformément sur tout l'intervalle.

L'uniforme continuité est particulièrement importante dans l'étude d'intégrales, en général lorsqu'on étudie une différence entre une intégrale et une somme de Riemann (parce que c'est le cadre naturel où il apparaît des différences de la forme $|f(x) - f(a_i)|$ avec trop de a_i distincts pour que la continuité suffise à avoir un module commun de continuité), mais pas seulement. C'est le cadre le plus naturel où il faut penser à l'uniforme continuité sans hésiter.

Pour le reste, cela dépend du contexte de l'exercice. À vous de juger si vous parvenez dans un premier temps à traiter l'exercice en remplaçant l'intégrande par une fonction en escalier ou une fonction polynomiale, ou en supposant qu'il est borné, etc. Si c'est le cas, vous pouvez PEUT-ÊTRE envisager d'étendre votre raisonnement à un intervalle quelconque en approchant votre intégrale par une intégrale par un segment.

9.2 Quand se ramener à une somme de Riemann ?

Le cadre le plus naturel est celui où les hypothèses du problème se traduisent plus naturellement avec des sommes finies : la convexité et la linéarité par exemple. Les sommes de Riemann permettent, par passage à la limite (et s'il y a continuité), d'écrire cette même propriété avec des intégrales.

Exemple 28. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application $\mathbb{R}$-linéaire et continue (cette dernière précision est superflue quand on sait que toute application linéaire définie sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie est continue). On veut montrer que pour toute fonction continue $g : [a, b] \to \mathbb{C}$, on a :

$$f\left(\int_a^b g(x)\cos(x)\mathrm{d}x\right) = \int_a^b f(g(x))\cos(x)\mathrm{d}x.$$

Comme la linéarité s'exprime volontiers avec des sommes, on s'y ramène et on regarde ce qu'il se passe au niveau des sommes de Riemann. Posons donc : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_{k,n} = a + \dfrac{k(b-a)}{n}$, et : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $S_n = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} g(a_{k,n})\cos(a_{k,n})$. On a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_a^b g(x)\cos(x)\mathrm{d}x$, donc par continuité de f on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f(S_n) = f\left(\int_a^b g(x)\cos(x)\mathrm{d}x\right)$. Mais on a aussi, cette fois-ci par $\mathbb{R}$-linéarité :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad f(S_n) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\cos(a_{k,n}) f(g(a_{k,n})).$$

On reconnaît une somme de Riemann associée à $f \circ g \cdot \cos$, qui est continue. Donc : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f(S_n) = \int_a^b f(g(x))\cos(x)\mathrm{d}x$. Par unicité de la limite, on a démontré le résultat voulu.

Nous donnons une autre situation où l'on peut se ramener à une somme de Riemann : lorsqu'on veut intégrer par parties alors qu'il n'y a pas de fonction de classe C^1 en jeu. À la place : on approche l'intégrale par une somme, avec laquelle on effectue une transformation d'Abel (qui est l'analogue discret de l'intégration par parties et a l'avantage de ne pas nécessiter d'hypothèse de régularité). On en parle plus amplement dans la section 8.4 du document *Méthodes* du chapitre sur les séries numériques.

9.3 Fonctions en escalier, ou applications polynomiales : que choisir ?

Lorsque vous êtes sur un segment et que les hypothèses sur f sont trop restrictives pour vous permettre d'effectuer un raisonnement qui aboutit, vous pouvez regarder ce qu'il en est si l'on remplace f par une fonction en escalier ou polynomiale (cependant le topologue le sait bien : cette tentative n'a aucun intérêt si l'ensemble des fonctions à vérifier l'objet de l'exercice *n'est pas un fermé*). C'est d'ailleurs ainsi qu'en 1re année, vous avez démontré toutes les propriétés de base de l'intégrale (linéarité, relation de Chasles, croissance...). Vous les avez démontrées pour des fonctions en escalier, où l'affaire était triviale, puis par passage à la limite vous les avez étendues à toute fonction continue par morceaux.

On peut se demander par quoi approcher f : par des fonctions en escalier, ou des fonctions polynomiales ? En fait le premier choix est presque toujours le meilleur dans un contexte d'intégration, parce qu'une fonction en escalier est une combinaison linéaire de fonctions indicatrices, c'est-à-dire de fonctions constantes par morceaux : y a-t-il plus simple à intégrer ? De plus l'approximation par des fonctions en escalier est moins gourmand en hypothèses : il suffit d'avoir la continuité *par morceaux*.

Ainsi, lorsqu'on veut montrer qu'un résultat est vrai pour toute fonction en escalier, on commence par le montrer par une fonction indicatrice (égale à 1 sur un segment et nulle ailleurs : cela rend le calcul trivial). Par linéarité de l'intégrale, on a le résultat pour toute fonction en escalier, et on espère en déduire le résultat pour toute fonction continue par morceaux par densité.

Mais dans ce cas, quand est-il préférable d'utiliser la densité des applications polynomiales ? Lorsqu'une hypothèse de l'énoncé fait intervenir une égalité vraie pour toute application polynomiale. On peut être même moins exigeant. On peut penser aux applications polynomiales dès qu'une hypothèse de l'énoncé :

— concerne **toute fonction puissance** (des puissances entières suffisent), puisque la linéarité de l'intégrale permet de l'étendre à tout polynôme ;

— plus généralement, donne une égalité intégrale vraie pour **toute puissance de n'importe quelle fonction**, puisque la formule du changement de variable permet de se ramener au cas précédent.

Un exemple concret permettra d'y voir clair.

Exemple 29. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ et négligeable devant $x \mapsto e^{-x}$ au voisinage de $+\infty$. On suppose que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)e^{-nx}\mathrm{d}x = 0$, et on veut démontrer que f est nulle. Pour cela, on note qu'en faisant le changement de variable $u = e^{-x}$, cette égalité équivaut à : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{e^{-1}} u^{-1}f(-\ln(u))u^n\mathrm{d}u = 0$. Comme $(u \mapsto u^n)_{n\in\mathbb{N}}$ engendre l'espace des applications polynomiales, par linéarité de l'intégrale on a aussi l'égalité : $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $\displaystyle\int_0^1 u^{-1}f(-\ln(u))P(u)\mathrm{d}u = 0$. Or $g : u \mapsto u^{-1}f(-\ln(u))$ se prolonge en une application continue sur [0,1] (pourquoi ?), donc par le théorème d'approximation de Weierstraß il existe une suite d'applications polynomiales $(P_n)_{n\geqslant 0}$ convergeant uniformément sur [0,1] vers g. Comme $(P_ng)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur [0,1] vers g^2, l'égalité ci-dessus donne, quand on l'évalue en $P = P_n$ et qu'on passe à la limite : $\displaystyle\int_0^1 (g(u))^2\mathrm{d}u = 0$. Une application continue, positive et d'intégrale nulle est identiquement nulle, donc : $g = 0$. On en déduit : $f = 0$.

Exercice 29. Compléter les détails omis ci-dessus :

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)e^{-nx}\mathrm{d}x$ converge.
2. Justifier la continuité sur [0,1] de $g : u \mapsto u^{-1}f(-\ln(u))$.
3. Vérifier que $(P_ng)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur [0,1] vers g.
4. Vérifier que $g = 0$ implique $f = 0$.

On se convaincra qu'ici, l'approximation par des fonctions en escalier n'aurait pas apporté grand'chose.

9.4 Fonctions en escalier, ou sommes de Riemann : que choisir ?

Il semble que cela revienne au même : une somme de Riemann est en effet l'intégrale d'une fonction en escalier bien choisie. En vérité, c'est plutôt si l'on a une intégrale de la forme : $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$, que la question se pose : veut-on approcher par une somme de Riemann associée à la fonction fg, ou veut-on approcher uniquement f ou g par une fonction en escalier ?

Pour savoir si une approximation prévaut sur l'autre, méditez sur le point suivant, qui n'a cependant rien d'une règle absolue : si g est explicite et le calcul de $\displaystyle\int_a^b g$ facile : **approchez uniquement f par une fonction en escalier**.

Pour l'illustrer : si l'on vous demande de démontrer un résultat concernant l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\cos(xt)\mathrm{d}t$, et que vous choisissez de raisonner par approximation, on conviendra que la somme de Riemann $\displaystyle\frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{xk\pi}{n}\right)$ est bien plus pénible à étudier que l'intégrale où l'on a approché f par une fonction en escalier : $\displaystyle\int_0^{\pi}\sum_{i=0}^{p} c_i\mathbb{1}_{[a_i,b_i]}(t)\cos(xt)\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{p} c_i\frac{\sin(xb_i)-\sin(xa_i)}{x}$.

Dans les autres cas, vous choisirez en général d'approcher par une somme de Riemann. Celles-ci ont un autre intérêt : son terme général dépend très explicitement des fonctions en jeu. Si on a des hypothèses sur ces fonctions (uniforme continuité, monotonie...), elles sont donc en quelque sorte préservées dans les sommes de Riemann. Dans une approximation par une fonction en escalier non explicite, on n'en sait rien.

On lira cette section en complément de la suivante.

9.5 Quand n'est-il PAS pertinent de raisonner par densité ?

Ne perdez pas de vue que la convergence uniforme est une notion exigeante : ce N'est PAS parce que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers f que :

— f et les f_n partagent les mêmes propriétés ;
— les suites $(f'_n)_{n\geqslant 0}$, $(F_n)_{n\geqslant 0}$ (primitives de f), $(f_n^{-1})_{n\geqslant 0}$ (réciproques), convergent uniformément vers f', F (primitive de f) et f^{-1} respectivement (il n'est même pas certain que f_n^{-1} existe même si f^{-1} existe).

Par conséquent, si une identité à démontrer implique non seulement une fonction f, mais aussi sa dérivée, ou une de ses primitives, ou sa bijection réciproque (comme dans l'égalité de Young), etc., il y a très peu de chance qu'un raisonnement par densité vous le permette : même si vous démontrez le résultat pour f_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, vous ne pourrez pas passer à la limite pour tout exprimer en fonction de f.

C'est une autre piste qui peut éventuellement vous aiguiller vers les sommes de Riemann plutôt que les fonctions en escalier.

FIGURE 5 – Intégrabilité des fonctions puissances selon leur position par rapport à $t \mapsto \frac{1}{t}$.

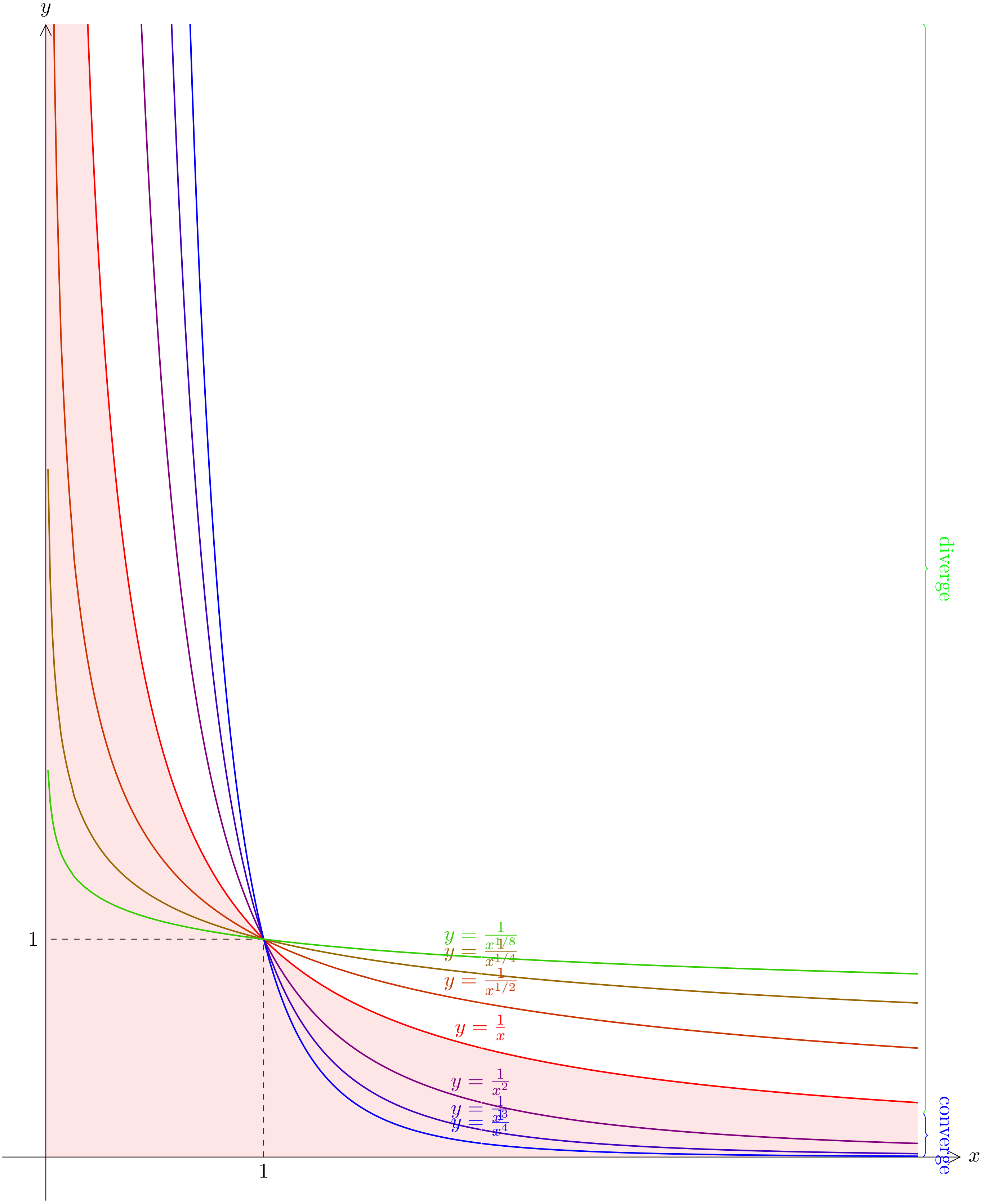


Table des matières

Table des figures