# Méthodes – Intégration

**✓ L'intégration par parties**

Donnons trois applications principales de la formule d'intégration par parties. Les deux premières applications ne sont que des extensions de celles vues en 1re année.

## 1 Le calcul intégral

Nous ne détaillons pas ce point, déjà largement abordé par mes collègues de 1re année. Contentons-nous de dire que l'intégration par parties se prête au calcul intégral lorsqu'une fonction est compliquée mais de dérivée simple (en général : est une fraction rationnelle), tandis qu'elle est en facteur d'une fonction facile à intégrer. On est alors ramené à une intégrale de fonction plus simple, qu'on espère savoir calculer.

*Sans que ce ne soit une règle générale*, les fonctions intéressantes à dériver sont le logarithme, l'arc tangente, voire les autres fonctions trigonométriques réciproques. Les fonctions puissances, exponentielles, voire cosinus et sinus, ont l'avantage d'être versatiles, car leurs dérivées et leurs primitives sont (presque) semblablement simples à manipuler.

Une situation standard est le calcul de $\int_I t^n f(t)\mathrm{d}t$, où $f$ est facile à intégrer. En ce cas, on intègre par parties en dérivant à chaque étape la fonction puissance, jusqu'à ce que son degré soit nul. C'est ainsi qu'on calcule $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\mathrm{d}t$ (fonction Gamma d'Euler).

## 2 Les relations de récurrence

C'est lié au dernier paragraphe. Il s'agit de calculer une intégrale de la forme :

$$I_n = \int_J (f(x))^n g(x)\mathrm{d}x$$

à l'aide d'une relation de récurrence.

Il faut donc relier $I_n = \int_J (f(x))^n g(x)\mathrm{d}x$ à $I_{n-1} = \int_J (f(x))^{n-1} g(x)\mathrm{d}x$ (voire $I_{n-2}$, etc., cela dépend du contexte). Pour cela, il faut abaisser la puissance de $f$ dans l'intégrande : cela se fait *via* une intégration par parties en DÉRIVANT $f^n$ (puisque sa dérivée est : $nf'f^{n-1}$, et il apparaît bien $f^{n-1}$). Il reste à espérer que la fonction à intégrer en conséquence, $g$, nous permette d'obtenir $I_{n-1}$ dans la nouvelle intégrale.

Si $I_n$ est plutôt de la forme :

$$I_n = \int_J \frac{g(x)}{(f(x))^n}\mathrm{d}x,$$

alors abaisser la puissance ne se fait pas en dérivant $\frac{1}{f^n}$ (on obtiendrait $-n\frac{f'}{f^{n+1}}$), mais en intégrant... mais dans ce cas, il faut faire apparaître $f'$ au numérateur : on ne sait pas intégrer $\frac{1}{f^n}$ directement, il nous faut $\frac{f'}{f^n}$ (dont une primitive est : $-\frac{1}{n-1}\frac{1}{f^{n-1}}$).

En bref, pour savoir ce qu'il faut dériver et intégrer, pensez à ce que vous désirez : **abaisser la puissance $n$, pour passer de $n$ à $n-1$**. Posé ainsi, le problème ne souffre d'aucune ambiguïté.

Si la nouvelle intégrale obtenue, *via* l'intégration par parties, ne donne pas directement $I_{n-1}$, n'oubliez pas que des manipulations élémentaires du type : $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$, ou des formules de trigonométrie reliant cos et sin, $\cos((n+1)x)$ et $\cos(nx)$, etc., permettent éventuellement de faire apparaître $I_{n-1}$.

**Exercice 1.** Trouvez des relations de récurrence pour les intégrales :

$$\text{(a)} \int_1^e (\ln(x))^n\mathrm{d}x, \quad \text{(b)} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan(x))^n\mathrm{d}x, \quad \text{(c)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(x))^n\mathrm{d}x.$$

Pour en déduire la valeur générale de l'intégrale, vous pourrez avoir besoin de lire le document *Méthodes* sur les suites numériques, section 2. On y apprend comment obtenir la valeur explicite d'une suite vérifiant une relation de récurrence compliquée d'ordre 1.

**Exercice 2.**

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, trouver une relation entre $\displaystyle\int_0^1 t^{n+1} e^t \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^1 t^n e^t \mathrm{d}t$.
2. Montrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\displaystyle\int_0^1 t^n e^t \mathrm{d}t = (-1)^n n! \left( e \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} - 1 \right)$.

## 3 La convergence des intégrales

Lorsqu'il est impossible d'obtenir l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$ d'une fonction de la forme $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x^\alpha}$ *via* les critères de comparaison (en général $\alpha \leqslant 1$ dans ce cas), l'intégration par parties permet de tout de même démontrer la convergence de $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha} \mathrm{d}x$ ainsi : on *augmente l'exposant* $\alpha$ avec une dérivation de $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$, en espérant se ramener à une intégrale de la forme $\displaystyle\int_I \frac{g(x)}{x^{\alpha+1}} \mathrm{d}x$ qui soit convergente : c'est bon si $g$ est bornée, de sorte à ce que l'intégrande soit dominé par la fonction de Riemann $x \mapsto \dfrac{1}{x^{\alpha+1}}$ : si l'exposant est désormais suffisamment élevé, on conclut avec le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives.

**L'exemple $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t$ est extrêmement standard et à savoir faire les yeux fermés.**

Retenez bien dans quel cas de figure penser à l'intégration par parties ! Seulement s'il est impossible d'obtenir une domination par une fonction intégrable. Il n'y a pas d'intérêt à montrer une convergence *via* intégration par parties, si l'on y parvient directement par des moyens plus classiques !

Il faut bien sûr pouvoir s'adapter à la situation. Dans le cas de l'intégrale $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \cos(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x$ , quelle fonction à dériver, à intégrer, permettrait de faire apparaître un facteur $\dfrac{1}{x^\alpha}$ salvateur ? Et pour montrer la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} \mathrm{d}x$, est-il vraiment pertinent de dériver $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ ici ?

Quelques remarques pour conclure :

— lorsqu'on fait l'intégration par parties avec l'intégrale impropre $\displaystyle\int_I f'g$, la vérification préalable de l'existence du crochet $[fg]_a^b$ n'est pas facultative : il arrive parfois que $fg$ ne soit pas de limite finie en $a$ ou $b$ ! Dans ce cas, n'oubliez pas que vous avez le choix de la primitive de $f'$ utilisée : remplacez $f$ par $f - f(a)$ si le problème est en $a$ (par $f - f(b)$ s'il est en $b$), en général vous n'aurez plus une limite infinie (pourquoi ?) ;

— l'intégration par parties permet parfois d'obtenir un équivalent asymptotique d'une intégrale $I_n$ : si cette formule donne $I_n = \alpha_n - J_n$, avec $\alpha_n$ provenant du terme entre crochets, et $J_n$ une intégrale clairement négligeable devant $I_n$ ou $\alpha_n$, alors on obtient $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha_n$.

## Table des matières