Méthodes – Intégration

✓ Comment vérifier l'hypothèse de domination ?

Dans toute cette section, nous ne nous soucions pas de la vérification des hypothèses de régularité en vue d'appliquer le théorème de convergence dominée et les théorèmes de régularité des intégrales à paramètres. Nous nous concentrons sur la partie difficile, vérifier l'hypothèse de domination, **uniquement ici**. Cela ne veut pas dire que vous devez oublier les autres hypothèses !

On cherche comment obtenir $|f_n(t)| \leqslant \varphi(t)$ (pour le théorème de convergence dominée) ou $|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$ (pour les intégrales à paramètres) avec φ intégrable. **Voyons d'abord ce que vous n'avez PAS le droit de faire** :

1. Puisqu'il faut une **majoration** de **toutes** les fonctions $|f_n|$ (où l'on exclut éventuellement les petites valeurs de n), **sur tout l'intervalle d'intégration**, cela exclut d'emblée l'usage d'équivalents et de développements limités, puisqu'ils ne donnent une estimation que dans un voisinage, et non partout ! Objection analogue s'il faut majorer $|f(x,t)|$.

   Toutefois, ce qui remplace rigoureusement les équivalents et les développements limités, dans les inégalités, est la formule de Taylor avec reste intégral : voir *L'art de la majoration*.

   Bien sûr, **après** avoir produit la fonction de domination φ, rien ne nous interdit de recourir aux équivalents et développements limités, *comme d'habitude*, pour démontrer son intégrabilité.
2. La fonction de domination φ doit être **intégrable** ; par conséquent, **si l'intervalle d'intégration est** $]0,+\infty[$, les fonctions de Riemann ne marchent JAMAIS ! En effet, $t \mapsto \dfrac{1}{t^s}$ a un problème d'intégrabilité soit au voisinage de 0, soit au voisinage de $+\infty$, selon que $s \geqslant 1$ ou $s \leqslant 1$.
3. La fonction de domination φ doit être **explicite** : oubliez toute tentative malhonnête d'incantation du type : « il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable vérifiant $|f_n| \leqslant \varphi$, qu'on obtient aisément en majorant ceci et cela indépendamment de n ».
4. Si vous définissez φ avec des conditions du type « $\varphi(t) = \cdots$ si $t \geqslant n$ », alors elle dépend implicitement de n et ne convient pas.

L'hypothèse de domination ne tolère aucun à-peu-près. **Tout manquement aux commandements ci-dessus et toute tentative d'escroquerie sont soldés de zéro point**.

Même si nous vous donnons des méthodes pour produire cette domination, cela reste un problème difficile. Seule l'expérience vous permettra d'être à l'aise dans cet exercice : exercez-vous autant que possible. Les conseils de *Encadrer explicitement une intégrale* et du document *L'art de la majoration* sont un excellent complément.

1 ✓ Cas du théorème de convergence dominée

Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I.

Pour majorer $|f_n(t)|$ indépendamment de n

1. On ne touche *surtout pas* à ce qui ne dépend pas de n.
2. On majore uniquement, et au mieux, la quantité dépendant de n, en cherchant quelle est la valeur maximale prise quand n parcourt $\mathbb{N}$. Alors ce majorant ne dépend pas de n et nous donne φ.

Plus formellement :

1. On écrit $f_n(t)$ comme un produit ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in I$, $f_n(t) = g(t)h_n(t)$ (ainsi g est la partie qui ne dépend pas de n : *on n'y touche plus*).

2. On cherche à maximiser $|h_n(t)|$, à t *fixé*, quand n parcourt $\mathbb{N}$. En pratique, la suite $(|h_n(t)|)_{n\geqslant 0}$ a souvent une monotonie suffisamment simple pour que le majorant soit évident, ou obtenu pour $n=0$ ou $n \to +\infty$.
   Si ce n'est pas le cas, étudiez les variations de la fonction obtenue en faisant comme si n était une variable réelle $n \in \mathbb{R}_+$ (ce qui permet de dériver par rapport à cette variable). Cela vous donnera un maximum quand n parcourt $\mathbb{R}_+$ (ou $[1,+\infty[$ si $n=0$ est exclu, etc., il faut s'adapter). Ce maximum dépend éventuellement de t, et on le note donc $\phi(t)$: on a alors $|h_n(t)| \leqslant \phi(t)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in I$.
3. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in I$, on a : $|f_n(t)| = |g(t)| \cdot |h_n(t)| \leqslant |g(t)| \cdot \phi(t)$, et le choix $\varphi(t) = |g(t)|\phi(t)$ convient en général : **on vérifie sérieusement que φ est intégrable sur I.** Si la méthode échoue, il faut envisager d'utiliser l'autre théorème d'interversion limite-intégrale (si on est sur un segment : sinon, c'est foutu... ou vous avez fait une erreur dans vos majorations).

Majoration indépendante de n, de t, de x... Si l'on s'y perd, comment savoir : φ ne doit dépendre **que de la variable d'intégration**, et non du paramètre variable. Il serait illogique d'exiger que φ ne dépende pas de la variable d'intégration, vu qu'elle est continue par morceaux et intégrable sur l'intervalle où l'on intègre (donc elle en dépend !). Par conséquent, si la variable d'intégration s'appelle t, alors φ ne dépend que de t.
Cette condition vient du fait que l'hypothèse de domination a été motivée pour empêcher les f_n de produire des pics arbitrairement grands. Donc φ doit majorer *tous* les f_n. Mais si φ dépend aussi de n, il ne peut majorer qu'un f_n à la fois (un différent pour chaque valeur de n), et pas tous en même temps.

Cas particulier fréquent : puissances n^{es}. Si h_n est définie à l'aide de termes à la puissance n (notés a^n dans le reste de cette remarque), n'oubliez pas que vous savez comparer les fonctions puissances sans passer par une étude de variations (*L'art de la majoration*, section 3) :

$$\begin{array}{rcl} 0<a\leqslant 1 & \Longrightarrow & (a^n)_{n\geqslant 0} \text{ décroissante} \Longrightarrow \forall n\in\mathbb{N},\quad 0\leqslant a^n\leqslant a^0=1 \\ a>1 & \Longrightarrow & (a^n)_{n\geqslant 0} \text{ croissante} \Longrightarrow \forall n\in\mathbb{N},\quad 1=a^0\leqslant a^n \text{ (et } (a^n)_{n\geqslant 0} \text{ non majorée)}\end{array}$$

Bien souvent, pour bien conserver l'intégrabilité en majorant – par exemple pour conserver une exponentielle décroissante –, nous aurons besoin d'exclure le cas $n=0$ (voire $n=1$). Ce n'est pas gênant d'exclure de petites valeurs de n (tant qu'elles ne dépendent pas de la variable t), puisque de toute façon on considère la limite quand $n \to +\infty$ (donc n est « grand »). Alors :

$$\begin{array}{c} \text{si } 0<a\leqslant 1 : \\ n\geqslant 1 \Longrightarrow a^n\leqslant a^1=a \\ n\geqslant 2 \Longrightarrow a^n\leqslant a^2 \end{array}$$

Dans tous les cas, vous voyez là comment éliminer la dépendance en n.

Cas particulier fréquent : différences « petites ». N'oublions pas que si h_n est une différence « petite », notamment au voisinage de 0, les méthodes de *L'art de la majoration* vous aideront à la majorer. On en donne une illustration dans la section 1.1 (exemple 4, où la quantité $\cos\left(\frac{t}{n}\right)-1$ est bien une « différence petite » au sens de *L'art de la majoration*). → page 5

Exemple 1. (Illustration du 1er cas particulier) On cherche à calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-t^n}\mathrm{d}t$. On vous laisse étudier la convergence simple et en déduire la limite éventuelle : ici, je me concentre uniquement sur la vérification de l'hypothèse de domination. Pour cela, on note que majorer la valeur absolue de $f_n : t\mapsto e^{-t^n}$ se résume à majorer $-t^n$ pour tous $t\in\mathbb{R}_+$ et $n\in\mathbb{N}$. On y parvient en minorant t^n pour tous $t\in\mathbb{R}_+$ et $n\in\mathbb{N}$. Comme nous l'avons dit ci-dessus : on cherche le minimum de $(t^n)_{n\geqslant 0}$ quand n varie. Or la monotonie de cette suite dépend de t :

— si $t\in[0,1]$, alors la suite $(t^n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante, donc elle est minorée par sa limite : $t^n\geqslant 0$;

— si $t > 1$, alors la suite $(t^n)_{n\geqslant 0}$ est croissante, donc elle est minorée par son premier terme : $t^n \geqslant t^0 = 1$.

On en déduit :

$$\forall (n,t) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R}_+, \quad |f_n(t)| \leqslant \begin{cases} \exp(-0) = 1 & \text{si} \quad t \in [0,1], \\ \exp(-1) & \text{si} \quad t > 1. \end{cases}$$

Problème : c'est très facile de se convaincre que la majoration proposée n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$ (comme toute fonction constante non nulle). On règle ce souci comme suggéré, en commençant l'étude non pas à $n = 0$, mais $n = 1$. Tout ce qui change dans l'étude ci-dessus est la minoration de t^n quand $t > 1$: en minorant par le premier terme, on obtient à présent : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $t^n \geqslant t^1$. Par suite :

$$\forall (n,t) \in (\mathbb{N}\setminus\{0\})\times\mathbb{R}_+, \quad |f_n(t)| \leqslant \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \in [0,1], \\ \exp(-t) & \text{si} \quad t > 1. \end{cases} \qquad \text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION)}$$

La majoration est indépendante de n, et nous savons que l'exponentielle est intégrable au voisinage de $+\infty$: c'est donc gagné.

Exercice 1. Achever l'exemple pour en déduire la valeur de : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-t^n}\,\mathrm{d}t$.

Exemple 2. (Majoration *via* une étude de variations) Reprenons le calcul de :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x\left(1+\sqrt{n}e^{-nx}\right)\mathrm{d}x,$$

Il se traite très simplement en utilisant la convergence uniforme sur un segment, mais nous varions l'approche ici en passant par le théorème de convergence dominée, afin d'illustrer une difficulté inédite et de montrer comment la résoudre à l'aide des conseils ci-dessus.

Si l'on essayait de vérifier l'hypothèse de domination sur $f_n : x \mapsto x(1+\sqrt{n}e^{-nx})$ (qui converge simplement sur $]0,1]$ vers $f : x \mapsto x$), nous serions bien embêtés sans analyse approfondie : la majoration $e^{-nx} \leqslant 1$ nous laisse avec le terme $x(1+\sqrt{n})$, et éliminer $\sqrt{n}$ est impossible puisqu'il est arbitrairement grand quand n varie. Quand des majorations naïves ne fonctionnent pas, on fait une étude de variations, où l'on interprète n comme une variable réelle ; pour éviter de semer le trouble, je vais changer son nom et l'appeler u. À $x \in]0,1]$ fixé, dériver par rapport à u l'application $g : u \mapsto \sqrt{u}e^{-ux}$ (je ne m'intéresse qu'à ce qui dépend de n : d'où l'absence de x et 1) donne pour dérivée : $g' : u \mapsto e^{-ux}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{u}} - x\sqrt{u}\right) = e^{-ux}\dfrac{1-2xu}{2\sqrt{u}}$ (vérifiez-le). On en déduit le tableau de variations :

u	0		$\frac{1}{2x}$		$+\infty$
$g'(u)$		$+$	0	$-$	
g	0	$\nearrow$	$g\left(\frac{1}{2x}\right)$	$\searrow$	0

On en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]0,1]$:

$$|f_n(x)| = x(1+g(n)) \leqslant x\left(1+g\left(\frac{1}{2x}\right)\right) = x\left(1+\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2x}}\right) \qquad \text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION)}$$

et l'application $\varphi : x \mapsto x\left(1+\dfrac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2x}}\right) = x + \sqrt{x}\dfrac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}$ est continue par morceaux sur $]0,1]$, clairement prolongeable par continuité sur le segment $[0,1]$, donc intégrable.

Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée, on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x\left(1+\sqrt{n}e^{-nx}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

1.1 Utiliser des équivalents pour conjecturer φ

Pour avoir une idée de la meilleure domination possible, **et seulement pour avoir une idée (ce n'est pas rigoureux, comme on le rappelle plus haut !)**, par exemple dans l'examen d'un quotient, vous pouvez regarder les termes prépondérants aux extrémités de l'intervalle, en particulier si l'on intègre au voisinage de 0 ou de $+\infty$. Par exemple, si $f_n(t) = \dfrac{t^n + \sqrt{t}}{t^{n+2}+1}$ pour tout $t \in]0,+\infty[$, alors les équivalents $|f_n(t)| \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{\sqrt{t}}{1} = \sqrt{t}$ et $|f_n(t)| \underset{t\to +\infty}{\sim} \dfrac{t^n}{t^{n+2}} = \dfrac{1}{t^2}$ nous enseignent que **si** une fonction de domination φ convient, alors elle devrait être de l'ordre de grandeur de $t \mapsto \sqrt{t}$ quand $t \to 0$, et $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ quand $t \to +\infty$. *A contrario*, cela veut dire qu'on n'a AUCUNE CHANCE d'obtenir une domination pertinente si l'on élimine les termes prépondérants ! Si l'on fait l'erreur d'écrire : $|f_n(t)| \leqslant \dfrac{t^n+\sqrt{t}}{1}$ pour t grand (élimination du terme prépondérant t^{n+2} au dénominateur), on n'a plus du tout une fonction proche de f_n et ce n'est pas une bonne majoration.

Pour passer de la conjecture non rigoureuse à la domination rigoureuse :

(1) L'idée, quand vous conjecturez ce que devrait être φ avec cette approche, **est de factoriser par les termes prépondérants au numérateur et dénominateur**, puis de voir comment majorer leurs facteurs (normalement proches de 1, c'est l'intérêt de factoriser par les termes prépondérants) indépendamment de n.

(2) Si l'équivalent utilisé pour la conjecture provenait d'un développement limité ou d'un équivalent de fonction usuelle (exemples : $e^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$, ou $\cos(u) - 1 \underset{u\to 0}{\sim} -\frac{u^2}{2}$), **on remplace cet équivalent ou développement limité par l'inégalité issue de la formule de Taylor avec reste intégral**, comme expliqué dans *L'art de la majoration*.

Exemple 3. Reprenons l'exemple de : $f_n(t) = \dfrac{t^n+\sqrt{t}}{t^{n+2}+1}$ pour tout $t \in]0,+\infty[$. On avait : $f_n(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{t^n}{t^{n+2}} = \dfrac{1}{t^2}$. Par conséquent, conformément à la méthode proposée ci-dessus, pour tout $t \geqslant 1$, on écrit :

$$|f_n(t)| \overset{(1)}{=} \frac{t^n\left(1+\frac{\sqrt{t}}{t^n}\right)}{t^{n+2}\left(1+\frac{1}{t^{n+2}}\right)} = \frac{1}{t^2}\frac{1+t^{\frac{1}{2}-n}}{1+t^{-n-2}},$$

et on majore au mieux ce qu'il reste. Par exemple, du fait que $t \geqslant 1$ et $\frac{1}{2} - n < 0$, on a $1 + t^{\frac{1}{2}-n} \leqslant 1+1 = 2$ et $1 + t^{-n-2} \geqslant 1 + 0 = 1$. On en déduit que, pour tout $t \geqslant 1$, on a : $|f_n(t)| \leqslant \dfrac{2}{t^2}$. De même, quand $t < 1$, on factorise par les termes prépondérants :

$$|f_n(t)| \overset{(1)}{=} \frac{\sqrt{t}\left(1+\frac{t^n}{\sqrt{t}}\right)}{1+t^{n+2}} = \sqrt{t}\frac{1+t^{n-\frac{1}{2}}}{1+t^{n+2}}.$$

Avec les méthodes de *L'art de la majoration*, on trouve les majorations $\dfrac{1}{1+t^{n+2}} \leqslant 1$ pour $t \in]0,1[$, et $1 + t^{n-\frac{1}{2}} \leqslant 2$, et on en déduit, pour tout $t < 1$: $|f_n(t)| \leqslant 2\sqrt{t}$. Une fonction de domination possible est donc :

$$\varphi : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \left\{\begin{array}{ll} 2\sqrt{t} & \text{si } t \in]0,1[, \\ \frac{2}{t^2} & \text{si } t \in [1,+\infty[, \end{array}\right. \end{array}\right.$$

et nous vous laissons vérifier qu'elle est intégrable sur $]0,+\infty[$. Les équivalents ci-dessus montrent qu'on peut difficilement trouver mieux : si on trouvait φ significativement plus « petit », l'inégalité $|f_n| \leqslant \varphi$ serait contredite par les équivalents de f_n trouvés ci-dessus.

Exemple 4. Calculons : $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 n^2\frac{\cos\left(\frac{t}{n}\right)-1}{t^2}\mathrm{d}t$. Nous vous laissons vérifier que la suite de fonctions de terme général $f_n : \begin{cases}]0,1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & n^2\frac{\cos\left(\frac{t}{n}\right)-1}{t^2}\end{cases}$ converge simplement sur $]0,1]$ vers $f : t \mapsto -\frac{1}{2}$, et nous nous attardons plutôt sur la vérification de l'hypothèse de domination. Pour cela, si l'on fait une conjecture non rigoureuse, portant sur des équivalents, nous avons :

$$\left|n^2\frac{\cos\left(\frac{t}{n}\right)-1}{t^2}\right| \underset{t\to 0}{\sim} \frac{|-n^2(t/n)^2/2|}{t^2} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{2},$$

et nous pouvons donc **conjecturer** qu'une bonne fonction de domination φ devrait être de l'ordre de grandeur de $t \mapsto \frac{1}{2}$. Conformément au conseil (2) ci-dessus, on rend rigoureuse cette domination avec la formule de Taylor avec reste intégral, appliquée au cosinus en 0 et à l'ordre 1. On obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\},\ \forall t \in]0,1], \quad \cos\left(\frac{t}{n}\right) = 1+\left(\frac{t}{n}\right)^2\int_0^1(1-u)\cos''\left(u\frac{t}{n}\right)\mathrm{d}u = 1-\left(\frac{t}{n}\right)^2\int_0^1(1-u)\cos\left(u\frac{t}{n}\right)\mathrm{d}u.$$

Comme $|\cos| \leqslant 1$, on en déduit : $\left|\cos\left(\frac{t}{n}\right)-1\right| \leqslant \left(\frac{t}{n}\right)^2\int_0^1(1-u)\mathrm{d}u = \frac{t^2}{2n^2}$. Par conséquent :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\ \forall t \in]0,1], \quad |f_n(t)| \leqslant \frac{1}{2}. \quad (\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION})$$

Il est évident que $\varphi : t \mapsto \frac{1}{2}$ est intégrable sur $]0,1]$, car continue sur le SEGMENT $[0,1]$. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée (les hypothèses de continuité par morceaux étant évidemment vérifiées), et on en déduit : $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 n^2\frac{\cos\left(\frac{t}{n}\right)-1}{t^2}\mathrm{d}t = \int_0^1\left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}$.

Exercice 2. Pour chacun des exemples ci-dessous, dire quel conseil appliquer ci-dessus pour obtenir une fonction de domination indépendante de n et intégrable sur l'intervalle considéré (cocher une case si elle correspond à un conseil pertinent ; plusieurs conseils peuvent être pertinents, ou aucun si la majoration est triviale). Ensuite, essayer de la produire explicitement. L'enjeu de l'exercice n'est pas le calcul explicite des limites.

$\lim_{n\to+\infty}$ de	Conseils pertinents	Domination φ
$\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan(t))^n\mathrm{d}t$	Majorant pour $n=0$, etc., ou $n\to+\infty$ ☐ Étude de variations ☐ Factorisation par termes prépondérants ☐ Taylor ou acc. finis ☐	
$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^n}$	Majorant pour $n=0$, etc., ou $n\to+\infty$ ☐ Étude de variations ☐ Factorisation par termes prépondérants ☐ Taylor ou acc. finis ☐	
$\int_0^1 e^{t^n}\mathrm{d}t$	Majorant pour $n=0$, etc., ou $n\to+\infty$ ☐ Étude de variations ☐ Factorisation par termes prépondérants ☐ Taylor ou acc. finis ☐	
$\int_0^{+\infty}\frac{t^{-n}+t^n}{t^{2n}+t^{-2n}}\mathrm{d}t$	Majorant pour $n=0$, etc., ou $n\to+\infty$ ☐ Étude de variations ☐ Factorisation par termes prépondérants ☐ Taylor ou acc. finis ☐	
$\int_0^1 nx(1-x)^n\mathrm{d}x$	Majorant pour $n=0$, etc., ou $n\to+\infty$ ☐ Étude de variations ☐ Factorisation par termes prépondérants ☐ Taylor ou acc. finis ☐	
$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^n+e^t}$	Majorant pour $n=0$, etc., ou $n\to+\infty$ ☐ Étude de variations ☐ Factorisation par termes prépondérants ☐ Taylor ou acc. finis ☐	
$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^n)^{\frac{1}{n}}}$	Majorant pour $n=0$, etc., ou $n\to+\infty$ ☐ Étude de variations ☐ Factorisation par termes prépondérants ☐ Taylor ou acc. finis ☐	
$\int_0^{+\infty}\arctan(nt)e^{-t^n}\mathrm{d}t$	Majorant pour $n=0$, etc., ou $n\to+\infty$ ☐ Étude de variations ☐	

	Factorisation par termes prépondérants ☐ Taylor ou acc. finis ☐	
$\displaystyle\int_0^{+\infty} n(\cos(t))^2 e^{-nt}\mathrm{d}t$	Majorant pour $n=0$, etc., ou $n\to+\infty$ ☐ Étude de variations ☐ Factorisation par termes prépondérants ☐ Taylor ou acc. finis ☐	
$\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n}$	Majorant pour $n=0$, etc., ou $n\to+\infty$ ☐ Étude de variations ☐ Factorisation par termes prépondérants ☐ Taylor ou acc. finis ☐	
$\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}\mathrm{d}t$	Majorant pour $n=0$, etc., ou $n\to+\infty$ ☐ Étude de variations ☐ Factorisation par termes prépondérants ☐ Taylor ou acc. finis ☐	
$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(nt)}{(nt+1)(1+t^2)}\mathrm{d}t$	Majorant pour $n=0$, etc., ou $n\to+\infty$ ☐ Étude de variations ☐ Factorisation par termes prépondérants ☐ Taylor ou acc. finis ☐	
$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{n\ln\left(1+\frac{t}{n}\right)}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t$	Majorant pour $n=0$, etc., ou $n\to+\infty$ ☐ Étude de variations ☐ Factorisation par termes prépondérants ☐ Taylor ou acc. finis ☐	

1.2 Exemples concrets de *mauvaises* dominations, et leur résolution

Nous donnons déjà des recommandations sur ce qu'il NE faut PAS faire, au début de la section . Nous vous conseillons fortement, aussi, de lire les *bons* conseils qui suivent (section 1) surtout, dans la mesure où cette section ne fait que les illustrer.

La méthode pour vérifier l'hypothèse de domination, *en théorie*, tient à peu de choses : UNIQUEMENT MAJORER CE QUI DÉPEND DE LA VARIABLE À ÉLIMINER, et ne pas toucher au reste. Seulement, même en connaissant ces recommandations théoriques, il arrive qu'*en pratique* on ne se rende pas compte qu'on tombe dans de mauvais travers. C'est le sens de cette section : lorsque vous peinez à vérifier une hypothèse de domination dans un exercice, pensez à lire ces pages pour déterminer si vous avez fait une erreur analogue. Si oui, regardez la résolution qui est proposée. En pratiquant cette routine régulièrement, vous devriez perdre vos mauvaises habitudes.

Exemple 5. On cherche à calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^ne^t}$. Nous vous laissons étudier la convergence simple et vérifier les hypothèses de régularité : je me concentre sur l'hypothèse de domination.

Pour la vérifier, cela revient à minorer $1+t^ne^t$ pour tout $(n,t)\in\mathbb{N}\times\mathbb{R}_+$, indépendamment de n, et il suffit alors de passer à l'inverse en pensant à renverser l'inégalité. Il semble que l'affaire soit élémentaire : pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $t\in\mathbb{R}_+$ on a : $1+t^ne^t\geqslant 1$, car $t^n\geqslant 0$ et $e^t\geqslant 0$. En passant à l'inverse, on en déduit :

$$\forall (n,t)\in\mathbb{N}\times\mathbb{R}_+,\quad \frac{1}{1+t^ne^t}\leqslant\frac{1}{1}=1.$$

On a éliminé la dépendance en n, mais l'hypothèse de domination n'est pas vérifiée pour autant. En effet, l'application $t\mapsto 1$ n'est manifestement pas intégrable sur $[0,+\infty[$.

Quelle est l'erreur méthodologique ci-dessus ? Le problème est d'avoir cherché le minimum de t^n quand t varie, en disant que le minimum est atteint pour $t=0$ (d'où la minoration $t^n\geqslant 0$). Or il ne faut pas toucher à ce qui ne dépend pas de n (c'est-à-dire : à ce qui ne dépend que de t).

Comment la rectifier ? Dans la quantité t^n, on ne touche donc pas à t, et on regarde le minimum de $(t^n)_{n\geqslant 0}$ *quand n varie*. Or la monotonie de cette suite dépend de t :

— si $t\in[0,1]$, alors la suite $(t^n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante, donc elle est minorée par sa limite : $t^n\geqslant 0$;

— si $t>1$, alors la suite $(t^n)_{n\geqslant 0}$ est croissante, donc elle est minorée par son premier terme : $t^n\geqslant t^0=1$.

On en déduit, pour tout $(n,t)\in\mathbb{N}\times\mathbb{R}_+$:

$$\left|\frac{1}{1+t^ne^t}\right|=\frac{1}{1+t^ne^t}\leqslant\begin{cases}\dfrac{1}{1+0\times e^t}=1 & \text{si}\quad t\in[0,1],\\[2mm] \dfrac{1}{1+e^t} & \text{si}\quad t>1.\end{cases}\qquad\text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION)}$$

Cette fois-ci la majoration est bien intégrable sur $[0,+\infty[$, comme nous vous laissons le vérifier (dominer par $\dfrac{1}{t^2}$ au voisinage de $+\infty$). Mission accomplie.

Exemple 6. On cherche à calculer : $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(\mathrm{ch}(t))^n}$. Nous vous laissons étudier la convergence simple et vérifier les hypothèses de régularité : je me concentre sur l'hypothèse de domination.

Pour la vérifier, on doit majorer $\frac{1}{\mathrm{ch}^n}$, ce qui revient à minorer ch^n (indépendamment de n). Vous auriez sans doute tendance à tenter d'abord l'une de ces deux minorations (correctes), afin de vous ramener à des intégrales de référence : $\forall t\in\mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(t)\geqslant 1$, ou : $\forall t\in\mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(t)=\frac{e^t+e^{-t}}{2}>\frac{e^t}{2}$. On en déduit :

$$\forall (n,t)\in\mathbb{N}\times\mathbb{R}_+,\quad \frac{1}{(\mathrm{ch}(t))^n}\leqslant 1,\qquad \text{ou :}\quad \frac{1}{(\mathrm{ch}(t))^n}\leqslant\frac{2^n}{(e^t)^n}=2^n e^{-tn},$$

selon l'inégalité retenue ci-dessus. Mais ces deux majorations posent problème en vue de vérifier l'hypothèse de domination : la première n'est pas du tout intégrable sur $[0,+\infty[$ (comme toute constante non nulle), et la seconde dépend bien sûr de n (pire : $(2e^{-t})^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$ pour tout $t<\ln(2)$, donc il est impossible d'enlever cette dépendance : ce n'est pas majoré).

Quelle est l'erreur méthodologique ci-dessus ? L'erreur provient du fait que les minorations de $(\mathrm{ch}(t))^n$ ci-dessus ont été faites en regardant le minimum quand t varie (avec ch qui atteint son minimum en $t=0$, qui vaut 1), alors que je vous demande de NE PAS TOUCHER À CE QUI DÉPEND DE t.

Comment la rectifier ? Il faut directement majorer $\frac{1}{(\mathrm{ch}(t))^n}$, ou minorer $(\mathrm{ch}(t))^n$, quand n varie (et non t). Or $((\mathrm{ch}(t))^n)_{n\geqslant 0}$ est une suite géométrique de raison $\mathrm{ch}(t)\geqslant 1$, donc elle est croissante : elle est donc minorée par son premier terme. On a donc : $\forall n\in\mathbb{N}$, $(\mathrm{ch}(t))^n\geqslant 1$, mais nous avons vu ci-dessus que cette minoration pose problème car nous perdons l'intégrabilité. Pas grave : nous avons dit à la page 2 qu'il suffit d'exclure les premières valeurs de n ; ce n'est pas gênant vu qu'on prend $n\to+\infty$, et donc « n grand ». Ainsi, si l'on se restreint à $n\geqslant 1$, minorer la suite $((\mathrm{ch}(t))^n)_{n\geqslant 1}$ par son premier terme donne : $\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, $(\mathrm{ch}(t))^n\geqslant(\mathrm{ch}(t))^1=\mathrm{ch}(t)$. On en déduit :

$$\forall (n,t)\in(\mathbb{N}\setminus\{0\})\times\mathbb{R}_+,\quad \frac{1}{(\mathrm{ch}(t))^n}\leqslant\frac{1}{\mathrm{ch}(t)},\qquad \text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION)}$$

or $t\mapsto\frac{1}{\mathrm{ch}(t)}$ est bien indépendant de n et intégrable sur $[0,+\infty[$, comme nous vous laissons le vérifier. Mission accomplie.

Exercice 3. Achever ces exemples pour en déduire les limites cherchées.

1.3 Que faire, si les bornes d'intégration dépendent de n ?

Pour appliquer le théorème de convergence dominée, les fonctions f_n doivent être définies **sur le même intervalle** I. Par conséquent, si l'on doit calculer une limite de la forme : $\lim_{n\to+\infty}\int_0^n f_n(t)\mathrm{d}t$, alors le théorème de convergence dominée ne peut pas s'appliquer (et encore moins le théorème d'interversion dans le cas d'un segment) parce que l'intervalle d'intégration $[0,n]$ varie quand n varie. Pour y remédier, il y a deux approches, en général guidées dans une épreuve écrite mais pas toujours à l'oral :

1. **Première méthode.** On effectue un changement de variable qui nous ramène à des bornes fixes. Par exemple, en posant $u=\frac{t}{n}$, alors $\mathrm{d}t=n\mathrm{d}u$ et on a : $\int_0^n f_n(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 f_n(nu)\cdot n\mathrm{d}u$. Comme l'intervalle d'intégration est désormais [0,1], donc le même pour tout $n\in\mathbb{N}$, on peut tenter d'appliquer un théorème d'interversion limite-intégrale à cette nouvelle intégrale. Mais alors, on n'étudie plus la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$, mais celle de terme général $g_n : \begin{cases}[0,1] & \to \mathbb{R}\\ u & \mapsto n\cdot f_n(nu)\end{cases}$ (le nouvel intégrande).
2. **Deuxième méthode.** Supposons que pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'intervalle d'intégration soit de la forme $I_n=[a,u_n]$ avec $u_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$ (dans presque tous les cas, vous aurez $I_n=[0,n]$ tout simplement). Pour calculer $\lim_{n\to+\infty}\int_a^{u_n} f_n(t)\mathrm{d}t$, la méthode est tout simplement **de prolonger f_n à $[a,+\infty[$ (intervalle ne dépendant plus de n) en la définissant comme nulle au-delà de I_n.** C'est-à-dire, on pose :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall t\in[a,+\infty[,\quad \tilde{f}_n(t)=\begin{cases}f_n(t) & \text{si } t\in[a,u_n],\\ 0 & \text{si } t\in]u_n,+\infty[,\end{cases}$$

et on a l'égalité : $\int_a^{+\infty} \tilde{f}_n(t)\mathrm{d}t = \int_a^{u_n} f_n(t)\mathrm{d}t$. L'étude de $\lim_{n\to+\infty} \int_a^{u_n} f_n(t)\mathrm{d}t$ équivaut donc à celle de $\lim_{n\to+\infty} \int_a^{+\infty} \tilde{f}_n(t)\mathrm{d}t$, mais cette dernière limite peut être calculée à l'aide du théorème de convergence dominée parce que l'intervalle d'intégration est le même pour chaque fonction !

Le fait que la définition de $\tilde{f}_n(t)$ dépende de la position de t par rapport à u_n ne complique absolument pas l'étude de la convergence simple. En effet, on s'intéresse au comportement de $\tilde{f}_n(t)$ quand $n \to +\infty$ et à $t \in [a, +\infty[$ *fixé*. Or, pour tout n assez grand, on a $t \leqslant u_n$ car $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et donc $\tilde{f}_n(t) = f_n(t)$. Autrement dit : **lorsqu'on étudie la convergence simple sur $[a, +\infty[$, on n'est jamais dans le cas où $\tilde{f}_n(t) = 0$, quitte à prendre n assez grand**.

Ensuite, pour l'hypothèse de domination, il suffit de majorer f_n sur $I_n = [a, u_n]$ indépendamment de n. En effet, la fonction φ qui majore f_n sur cet intervalle, majore aussi $\tilde{f}_n$ sur $[a, +\infty[$: soit $\tilde{f}_n(t) = f_n(t)$, auquel cas $\varphi(t)$ est un majorant par construction ; soit $\tilde{f}_n(t) = 0$, et dans ce cas $\varphi(t)$ est un majorant trivial (vu que la fonction de domination est nécessairement positive). En résumé : **lorsqu'on vérifie l'hypothèse de domination, la seule difficulté est pour majorer f_n sur $[a, u_n]$: la majoration vaudra alors immédiatement sur $[a, +\infty[$.**

La notation « tilde » est en général superflue, car il n'y a pas de f_n définie préalablement dans l'énoncé. Il n'y a donc pas besoin de ce tilde qui servirait à la distinguer. Je ne le mets que pour les besoins de l'exposé.

Il faut beaucoup de recul pour juger laquelle des deux méthodes est la meilleure, selon le cas de figure. Je ne veux pas vous empêtrer dans des considérations loin des méthodes de base : retenez simplement que ces approches existent. La première a le défaut de faire apparaître un facteur n, qui peut compromettre soit la convergence uniforme, soit la vérification de l'hypothèse de domination : dur à dire, cela dépend de la fonction f_n ! Comme $nu \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ quand $n \to +\infty$ (sauf si $u = 0$), notons que le comportement de f_n au voisinage de $+\infty$ est la clé pour savoir que déduire : est-ce que f_n a une limite finie en l'infini ? Un équivalent simple qui compenserait la multiplication par n ? etc.

Exercice 4. Montrer : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \int_0^n \exp\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right) \mathrm{d}x = 1$, avec la première méthode.

Exercice 5. Montrer : $\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \mathrm{d}x = 1$, avec la deuxième méthode (vous pourrez vérifier l'exactitude de votre résultat en déterminant directement une primitive de l'intégrande).

2 ✓ Cas des intégrales à paramètres

Pour majorer $|f(x,t)|$ indépendamment de x, pour tout $(x,t) \in I \times J$

1. **On ne touche *surtout pas* à ce qui ne dépend pas de x.**
2. **On majore uniquement, et au mieux, la quantité dépendant de x sur l'intervalle I.** En pratique, il suffit souvent d'étudier les variations de la quantité en question sur I, afin de déterminer son maximum. La majoration ne dépendra alors plus de x, et nous donnera φ.
3. **Si la majoration obtenue à l'étape précédente n'est pas intégrable**, quoi qu'on y fasse, **on remplace l'étude sur I par une étude sur un segment $[a, b]$ de I.**

Plus formellement :

1. On écrit $f(x,t)$ comme un produit ainsi : $\forall (x,t) \in I \times J$, $f(x,t) = g_1(t) g_2(x,t)$ (ainsi g_1 est la partie qui ne dépend pas de x : *on n'y touche plus*).
2. On étudie les variations (au besoin : parfois une majoration est évidente), pour tout $t \in J$ de $x \mapsto g_2(x,t)$ sur I, afin d'obtenir un majorant sur I dépendant *a priori* de $t \in J$, et qu'on note donc $\phi(t)$: on a alors $|g_2(x,t)| \leqslant \phi(t)$ pour tout $(x,t) \in I \times J$.

3. Alors, pour tout $(x,t) \in I \times J$, on a $|f(x,t)| = |g_1(t)| \cdot |g_2(x,t)| \leqslant |g_1(t)| \cdot \phi(t)$, et le choix $\varphi(t) = |g_1(t)|\phi(t)$ convient en général : **on vérifie sérieusement que φ est intégrable sur J**, parce que la méthode peut échouer à ce stade (auquel cas on se réfère au point suivant), et il ne faut donc pas conclure hâtivement.
4. S'il n'est pas possible de majorer $x \mapsto g_2(x,t)$ sur I, ou si φ n'est pas intégrable sur J, on remplace I par un segment $[a,b] \subseteq I$, et la majoration $\phi(t)$ ci-dessus devient la majoration sur $[a,b]$ de $x \mapsto g_2(x,t)$.

Majoration indépendante de n, de t, de x... Si l'on s'y perd, comment savoir : φ ne doit dépendre **que de la variable d'intégration**, et non du paramètre variable. Il serait illogique d'exiger que φ ne dépende pas de la variable d'intégration, vu qu'elle est continue par morceaux et intégrable sur l'intervalle où l'on intègre (donc elle en dépend !). Par conséquent, si la variable d'intégration s'appelle t, alors φ ne dépend que de t.

Mise en garde 1. Ne prenez pas à la légère le conseil de NE PAS TOUCHER à la partie ne dépendant pas de x. Lorsque vous avez un terme gênant en facteur d'une fonction de Riemann, comme par exemple le logarithme ou l'exponentielle dans les intégrales à paramètres $x \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+(xt)^2}\mathrm{d}t$ et $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$ (c'est la fonction Γ d'Euler, un exemple classique), vous avez souvent tendance à majorer ces termes pour avoir une fonction de Riemann, pensant ainsi en déduire facilement l'intégrabilité. Mais en faisant cela, vous éliminerez très souvent ce qui assure justement cette intégrabilité. Dans le premier cas, majorer $\ln(t)$ par $t-1$ (ou t) donne une majoration par $t \mapsto \dfrac{t}{1+(xt)^2}$ qui n'est plus intégrable au voisinage de $+\infty$ (on a en effet $\dfrac{t}{1+(xt)^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2 t}$, et $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$). En majorant e^{-t} par 1 dans la seconde intégrale, vous obtenez une majoration par $t \mapsto t^{x-1}$ qui n'est JAMAIS intégrable sur $]0,+\infty[$ (problème au voisinage de 0 ou de $+\infty$). En résumé, retenez :

VOUS NE SIMPLIFIEREZ JAMAIS LE PROBLÈME EN MAJORANT CE QUI NE DÉPEND QUE DE LA VARIABLE D'INTÉGRATION.

Vous avez vu comment gérer ces termes « gênants » avec la « méthode $t^\alpha f(t)$ ». Ce n'est donc pas du tout un obstacle théorique à l'intégrabilité. **Ne vous préoccupez que de la majoration des termes dépendant de x** (avec les notations de cette section).

Exemple 7. Montrons que l'intégrale à paramètre $x \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+(xt)^2}\mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Nous vous laissons vérifier les hypothèses de régularité de routine, pour se concentrer uniquement sur l'hypothèse de domination. Vérifiez également que l'entreprise échoue si l'on ne se ramène pas à des segments, ce qui justifie que je m'y ramène : soit $[a,b] \subseteq \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $(x,t) \in [a,b] \times [1,+\infty[$:

ne dépend pas de x :
JE N'Y TOUCHE PAS!

$$\left|\frac{\ln(t)}{1+(xt)^2}\right| = \frac{\ln(t)}{1+(xt)^2} \leqslant \frac{\ln(t)}{1+(at)^2} \qquad \text{(HYPOTHÈSE DE DOMINATION)}$$

et l'application $\varphi : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{1+(at)^2}$ est continue par morceaux et intégrable sur $[1,+\infty[$, car elle est positive, et on a : $\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^{3/2}}\right)$; comme $t \mapsto \dfrac{1}{t^{3/2}}$ est une fonction de Riemann d'exposant $\dfrac{3}{2} > 1$, elle est intégrable sur $[1,+\infty[$, et c'est donc aussi le cas de φ par comparaison de fonctions positives.

Ainsi l'hypothèse de domination est vérifiée.

Exercice 6. Vérifier en toute rigueur la relation de prépondérance $\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^{3/2}}\right)$ utilisée dans cet exemple.

Exemple 8. Bien sûr, s'il est difficile, voire impossible, d'étudier les variations de $x \mapsto g_2(x,t)$ (avec les notations ci-dessus) pour en déduire un majorant sur I, on peut diviser la difficulté du problème en étudiant séparément les variations de chacun de ses facteurs. Prenons l'exemple de l'intégrale à paramètre : $x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{tx-t^2\sqrt{x}}\mathrm{d}t$, dont nous voudrions démontrer la continuité sur $\mathbb{R}_+^*$. Étudier les variations de $x \mapsto e^{tx-t^2\sqrt{x}}$ est déplaisant, mais il est facile d'étudier les variations de $x \mapsto e^{tx}$ (clairement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$), et de $x \mapsto e^{-t^2\sqrt{x}}$ (clairement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$). Ainsi, pour tout segment $[a,b] \subseteq \mathbb{R}_+^*$, et tout $(x,t) \in [a,b]\times]0,+\infty[$, on a :

$$\left|e^{tx-t^2\sqrt{x}}\right| = e^{tx}\cdot e^{-t^2\sqrt{x}} \leqslant e^{tb}\cdot e^{-t^2\sqrt{a}}, \quad (\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION})$$

et nous vous laissons vérifier que $\varphi : t \mapsto e^{tb}\cdot e^{-t^2\sqrt{a}}$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$ (en plus de toutes les autres hypothèses « faciles » du théorème de continuité sous le signe intégrale). Si l'on ne se restreint pas à des segments, l'hypothèse de domination ne peut pas être obtenue : vérifiez-le.

2.1 ✓ Majorer le sinus, l'arc tangente, etc.

Souvenez-vous que selon qu'on soit près de zéro ou non, il peut y avoir des majorations plus pertinentes des fonctions usuelles. C'est intéressant en particulier pour les intégrandes où l'on divise par une puissance de t non intégrable au voisinage de 0 : les majorations $|\sin(t)| \leqslant t$, $|\arctan(t)| \leqslant t$, etc., permettent éventuellement d'abaisser cette puissance pour obtenir une fonction intégrable.

Exemple 9. S'il faut démontrer que l'intégrale à paramètre : $x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{xt}e^{-t}\mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, il s'agit de dominer indépendamment de x l'intégrande : notons que l'exponentielle décroissante $t \mapsto e^{-t}$ va assurer l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$, peu importe qu'on majore l'arc tangente par $\frac{\pi}{2}$ ou par xt : le théorème des croissances comparées permettra en tous les cas de dominer la fonction de domination par $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ qui est intégrable au voisinage de $+\infty$, et donc de conclure par comparaison. Bref, le seul dilemme sur la majoration de l'arc tangente, au moment de vérifier l'hypothèse de domination, est pour assurer l'intégrabilité au voisinage de 0.

Or nous savons que la majoration $|\arctan(xt)| \leqslant xt$ prévaut sur la majoration $|\arctan(xt)| \leqslant \frac{\pi}{2}$ lorsqu'on est près de 0. C'est donc celle que nous allons retenir. Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}_+^*\times]0,+\infty[$:

ne dépend pas de x : JE N'Y TOUCHE PAS!

$$\left|\frac{\arctan(xt)}{xt}e^{-t}\right| \overset{[xt\geqslant 0]}{=} \frac{\arctan(xt)}{xt}e^{-t} \leqslant \frac{xt}{xt}e^{-t} = e^{-t}$$

et l'application $\varphi : t \mapsto e^{-t}$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$ (c'est une fonction de référence), donc aussi sur $]0,+\infty[$: l'hypothèse de domination est vérifiée.

Pour se convaincre que c'était la bonne majoration à utiliser, notons que la majoration par $\frac{\pi}{2}$ aurait donné, pour tout segment $[a,b] \subseteq \mathbb{R}_+^*$, et pour tout $(x,t) \in [a,b]\times]0,+\infty[$ (pourquoi me suis-je ramené à un segment ?) :

ne dépend pas de x : JE N'Y TOUCHE PAS!

$$\left|\frac{\arctan(xt)}{xt}e^{-t}\right| \overset{[xt\geqslant 0]}{=} \frac{\arctan(xt)}{xt}e^{-t} \leqslant \frac{\pi}{2xt}e^{-t} \leqslant \frac{\pi e^{-t}}{2at}$$

(Je sais que plus d'un parmi vous serait tenté, ici, de majorer $\frac{\pi}{2at}$ par $\frac{\pi}{2a}$ pour éliminer le facteur t gênant : je vous laisse vérifier HONNÊTEMENT que ce serait TOTALEMENT FAUX !). Or l'application $\varphi : t \mapsto \frac{\pi e^{-t}}{2at}$ n'est pas intégrable au voisinage de 0, parce qu'elle y est équivalente à $t \mapsto \frac{\pi}{2a}\cdot\frac{1}{t}$ qui est une fonction de Riemann non intégrable sur $]0,1]$. L'hypothèse de domination n'est donc pas vérifiée : ne trichez pas si vous tombez dans cette impasse, et utilisez l'autre majoration.

Exemple 10. S'il faut démontrer que l'intégrale à paramètre : $x \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t^2}\mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, notons qu'on n'intègre pas au voisinage de 0, et par conséquent le recours à l'inégalité $|\arctan(u)| \leqslant u$ ne s'impose pas. Pire : il est fautif. Il nous donnerait ici une majoration par $t \mapsto \frac{xt}{t^2} = \frac{x}{t}$, qui ne peut faire nos affaires (même si l'on se ramène à un segment pour faire disparaître la dépendance en x), parce que l'application $t \mapsto \frac{1}{t}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$. Il est ici plus raisonnable de majorer l'arc tangente par $\frac{\pi}{2}$, et la fonction de domination $\varphi : t \mapsto \frac{\pi}{2t^2}$ devient alors trivialement intégrable sur $[1, +\infty[$: c'est une fonction de Riemann d'exposant $2 > 1$.

2.2 ✓ Que faire, lorsqu'on a à la fois besoin de $|\sin(t)| \leqslant |t|$ et $|\sin(t)| \leqslant 1$?

Le discours ci-dessous vaut bien évidemment pour d'autres fonctions que le sinus. Je le prends en exemple parce qu'il est la fonction la plus fréquemment problématique.

Il peut arriver que peu importe la majoration utilisée, nous ayons un problème. Prenons l'exemple concret :

$$x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t\sqrt{t}}\mathrm{d}t.$$

Si nous voulons démontrer que cette intégrale à paramètre est continue sur $\mathbb{R}_+$, nous sommes amenés à vérifier l'hypothèse de domination avec l'application $(x,t) \mapsto \frac{\sin(xt)}{t\sqrt{t}}$. Le dénominateur ne dépend pas de x : *on n'y touche pas*. Il suffit de majorer $\sin(xt)$ pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$, indépendamment de $x \in \mathbb{R}_+$. Mais nous avons un problème, peu importe la majoration de sinus choisie :

— si l'on choisit la majoration $|\sin(xt)| \leqslant 1$, alors l'intégrande est majoré par $t \mapsto \frac{1}{t\sqrt{t}}$, qui est intégrable au voisinage de $+\infty$ mais ne l'est pas au voisinage de 0, car c'est une fonction de Riemann d'exposant $\frac{3}{2} \geqslant 1$;

— si l'on choisit la majoration $|\sin(xt)| \leqslant |xt|$, alors l'intégrande est dominé par $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$, qui est intégrable au voisinage de 0 mais ne l'est pas au voisinage de $+\infty$, car c'est une fonction de Riemann d'exposant $\frac{1}{2} \leqslant 1$.

Dans ce cas, pour résoudre le problème : il suffit de ne pas choisir entre les deux, et de prendre les deux majorations ! On se souvient que la majoration : $|\sin(u)| \leqslant u$ n'est intéressante qu'au voisinage de 0, et dans le cas contraire on se contente de la majoration : $|\sin(u)| \leqslant 1$. Ainsi, pour la fonction de domination φ, il suffit de la définir autrement sur $]0,1]$ (par exemple : l'important est que ce soit au voisinage de 0) et sur $[1, +\infty[$. Dans cet exemple, on dominerait donc l'intégrande indépendamment de x, pris dans un segment $[a,b] \subseteq \mathbb{R}_+$, par :

$$\varphi : \begin{cases}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \begin{cases} \frac{b}{\sqrt{t}} & \text{si } t \in]0,1] & \text{(obtenue avec la majoration } |\sin(xt)| \leqslant xt \leqslant bt) \\ \frac{1}{t\sqrt{t}} & \text{si } t \in [1,+\infty[& \text{(obtenue avec la majoration } |\sin(xt)| \leqslant 1) \end{cases} \end{cases},$$

et on vérifie qu'il s'agit bien d'une fonction intégrable sur $]0, +\infty[$: c'est une fonction de Riemann d'exposant $\frac{1}{2} < 1$ sur $]0,1]$ et d'exposant $\frac{3}{2} > 1$ sur $[1, +\infty[$, donc l'intégrabilité est assurée sur ces deux intervalles, puis sur $]0, +\infty[$. L'hypothèse de domination est donc vérifiée sur tout segment de $\mathbb{R}_+$.

2.3 ☢ Que faire, si cela ne marche pas, même en tenant compte des conseils précédents ?

Cette situation est rare, et en général on vous donnera des indications.

Ce problème se pose souvent lorsque vous essayez d'obtenir une fonction de domination pour un intégrande NON INTÉGRABLE (mais malgré tout d'intégrale convergente). L'existence d'une fonction de domination contredirait cette non intégrabilité, à cause de la première conclusion du théorème de continuité sous le signe intégrale.

Ces fonctions-là ne font pas florès, mais il est standard de montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ converge, et ne converge pas absolument. C'est donc généralement une intégrale à paramètre faisant intervenir $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ (ou une variante de cette fonction) qui vous conduira à ce cas problématique.

Pour le résoudre, on procède de la même manière que lorsque les critères classiques ne permettent pas d'obtenir l'intégrabilité d'une fonction : on intègre par parties pour faire apparaître une fonction de Riemann d'exposant suffisant, et on essaie d'appliquer le théorème de continuité à la nouvelle intégrale obtenue !

Exercice 7. (Quasiment le seul exemple que vous pouvez rencontrer) On suppose qu'il fut démontré avec succès que pour tout $x > 0$, on a : $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$.

1. Montrer, grâce à une intégration par parties :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad F(x) - F(0) = -x + \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\left(1 - e^{-xt}(1+xt)\right)\mathrm{d}t.$$
2. Montrer que pour tout $(x,t) \in [0{,}1]\times]0,+\infty[$, on a : $|1 - e^{-xt}(1+xt)| \leqslant 1 - e^{-t}(1+t)$. On pourra passer par l'étude des variations de $x \mapsto 1 - e^{-xt}(1+xt)$, à $t \in]0,+\infty[$ fixé.
3. Montrer que l'application $\varphi : t \mapsto \dfrac{1 - e^{-t}(1+t)}{t^2}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.
4. En déduire que l'intégrale à paramètre $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\left(1 - e^{-xt}(1+xt)\right)\mathrm{d}t$ est continue sur $[0{,}1]$ (donc en particulier en 0), puis que F est continue en 0.
5. En déduire : $F(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

Table des matières