Méthodes – Fonctions vectorielles

Utiliser la dérivée des applications linéaires et bilinéaires

Dans toute cette section I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

La dérivation des fonctions vectorielles $f : I \to E$ n'est pas spécialement déroutante, notamment du fait qu'une telle fonction se dérive composante par composante (ce qui nous ramène à dériver des fonctions classiques $f_i : I \to \mathbb{R}$). La subtilité apparaît lorsqu'on n'a pas explicité ses composantes. Il faut alors ajouter ces deux règles de dérivation :

— on peut « rentrer la dérivée dans les applications linéaires » (c'est-à-dire, si L est linéaire : $(L(f))' = L(f')$) ;

— on peut dériver toute « généralisation du produit » (produit matriciel, produit scalaire, produit vectoriel) de la même manière que le produit (c'est-à-dire, si B est bilinéaire : $(\mathrm{B}(f,g))' = \mathrm{B}(f',g) + \mathrm{B}(f,g')$).

De cela, on tire la dérivation d'une norme, puisque c'est la composition de la racine carrée et du produit scalaire : exemple classique qu'il est très important de savoir traiter.

Nous rencontrons en général ces deux situations lorsque nous manipulons des fonctions à valeurs **matricielles** $A : I \to \mathrm{M}_n(K)$ ou $X : I \to \mathrm{M}_{n,1}(K)$, et dérivables. C'est une situation assez banale, puisqu'on étudie beaucoup de telles applications dans le cadre des équations différentielles linéaires. Dans ce cas, avec les applications linéaires les plus courantes, cela donne :

$$\forall t \in I, \quad \begin{array}{l} \left(A^\top\right)'(t) = \left(A'(t)\right)^\top, \quad (\mathrm{tr}(A))'(t) = \mathrm{tr}(A'(t)), \quad \left(PAP^{-1}\right)'(t) = PA'(t)P^{-1} \quad \text{(si } P \text{ matrice constante)} \\ (AX)'(t) = AX'(t) \quad \text{(si } A \text{ matrice constante), etc.} \end{array}$$

Citons aussi le cas des fonctions à valeurs complexes $f : I \to \mathbb{C}$:

$$\forall t \in I, \quad (\mathrm{Re}(f))'(t) = \mathrm{Re}(f'(t)), \quad (\mathrm{Im}(f))'(t) = \mathrm{Im}(f'(t)), \quad \overline{f}'(t) = \overline{f'(t)}.$$

« C'est tout ? C'est si simple ? » Mais oui, c'est si simple ! Avec les applications bilinéaires, on obtient la formule :

$$\forall t \in I, \quad (A \cdot B)'(t) = A'(t)B(t) + A(t)B'(t),$$

où A et B sont deux applications de I dans $\mathrm{M}_n(K)$ et dérivables. On dérive comme on l'imagine.

Exercice 1.

1. On suppose que $A \in \mathrm{M}_p(K)$ est une matrice *nilpotente* (c'est-à-dire : il existe $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que : $A^k = 0_{\mathrm{M}_p(K)}$). Montrer que si $Y : I \to \mathrm{M}_{p,1}(K)$ est une solution du système différentiel $Y' = AY$, alors ses composantes sont des applications polynomiales.
2. Trouver l'unique solution Y au système :
$$Y' = \begin{pmatrix} -5 & 16 & 7 \\ -2 & 10 & 10 \\ 1 & -5 & -5 \end{pmatrix} Y, \quad Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
par cette approche.
3. Retrouver ce résultat par triangulation de la matrice ci-dessus.

Utilisation de la dérivée. Comme pour les fonctions de la variable réelle, la dérivation intervient :

— dans l'étude des équations différentielles ;

— dans le tracé de courbes ; → page ??

— dans la démonstration de nouvelles identités.

Nous illustrerons surtout ce dernier aspect ici, qui se base sur la caractérisation des fonctions dérivables constantes :

$$\forall t \in I, \quad f'(t) = \vec{0} \iff f \text{ est constante sur } I.$$

Dans certaines configurations il est aussi possible d'utiliser le théorème fondamental de l'analyse pour ces identités : si l'on cherche à calculer $f(t)$, on dérive f pour se ramener à une quantité $f'(t)$ plus facile à calculer, et on intègre le résultat obtenu **sans oublier la constante d'intégration**.

À l'inverse, **les données du problème peuvent parfois s'interpréter implicitement comme la constance** d'une certaine application, dont la dérivée est nulle en conséquence. Par exemple, si l'on nous dit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $M(x)^\top M(x) = \mathrm{I}_n$, alors l'application $x \mapsto M(x)^\top M(x)$ est constante. Dire que sa dérivée est nulle permet d'en déduire des propriétés de la matrice $M(x)$ (ou $M'(x)$) pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. Soit $M : I \to \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ une application dérivable telle que : $\forall x \in I,\ M(x)^\top M(x) = \mathrm{I}_3$.

1. Montrer : $\forall x \in I,\ M'(x)^\top M(x) = -M(x)^\top M'(x)$.
2. En déduire que pour tout $x \in I$, $M'(x)$ N'est PAS inversible (*prendre le déterminant dans l'égalité ci-dessus*).

Exercice 3. Soit $M : \mathbb{R} \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une application dérivable telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ M(x)^2 = \mathrm{I}_n$, et : $M(0) = \mathrm{I}_n$.

1. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ M'(x) = -M(x)M'(x)M(x)^{-1}$.
2. En déduire que $x \mapsto \mathrm{tr}(M(x))$ est une application constante, égale à n.
3. Rappeler les valeurs propres possibles d'une matrice de symétrie, et en déduire comment s'exprime sa trace en fonction des dimensions des sous-espaces propres associés.
4. Conclure : montrer qu'on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ M(x) = \mathrm{I}_n$.

Un usage courant de la dérivation, dans ce contexte, est dans la dérivation de déterminants dépendant de variables (ou, s'ils n'en dépendent pas, on peut en ajouter intelligemment), en vertu de la formule (1) ci-dessous. Cette manœuvre permet de se ramener à des déterminants plus simples à calculer, ou bien d'établir une relation de récurrence entre le déterminant d'ordre n et le « même » d'ordre $n-1$ (mais un développement par rapport à une ligne ou colonne est alors nécessaire dans le processus). On dérive le déterminant en tant qu'application multilinéaire (par rapport aux colonnes ou aux lignes), et on a :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}' = \begin{vmatrix} a' & b \\ c' & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b' \\ c & d' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ c' & d' \end{vmatrix} \tag{1}$$

Lignes ou colonnes ? Le choix vous revient. Cette technique est intéressante lorsque la dérivation fait apparaître de nombreux déterminants nuls (pour un déterminant d'ordre n, idéalement au moins $n-1$ d'entre eux).

Mise en garde 1. Attention à ne pas penser que la technique de dérivation « composante par composante » s'applique au déterminant. On n'a pas du tout $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}' = \begin{vmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{vmatrix}$. En effet, a, b, c et d ne sont pas des « composantes » du déterminant (pour qui une telle notion serait curieuse, vu qu'il ne s'agit pas d'un vecteur mais d'un scalaire).

Dériver par rapport aux lignes, ou aux colonnes ? Comment choisir ? Regardez si la dérivée de certaines colonnes donne **une colonne nulle, ou une colonne clairement proportionnelle à une autre** : dans les deux cas, cela donnera **un déterminant nul**. Faites le même examen avec les lignes ; on privilégie alors le choix qui donnera le plus de déterminants nuls dans le calcul de dérivées.

Exemple 1. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Imaginons qu'on veuille calculer ce déterminant par dérivation, sans avoir remarqué qu'il s'agit d'un bête déterminant de Vandermonde (et très facile à calculer par d'autres moyens : c'est pour l'illustration) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Delta(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x+a & x+b \\ x^2 & (x+a)^2 & (x+b)^2 \end{vmatrix}.$$

Pour savoir s'il est préférable de dériver par rapport aux lignes ou aux colonnes, notons qu'en dérivant par rapport aux lignes, nous allons avoir trois simplifications :

— la ligne $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ a pour dérivée une ligne de zéros ;

— la ligne $\begin{pmatrix}x & x+a & x+b\end{pmatrix}$ a pour dérivée $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, qui est colinéaire à la 1re ligne ;

— la ligne $\begin{pmatrix}x^2 & (x+a)^2 & (x+b)^2\end{pmatrix}$ a pour dérivée $\begin{pmatrix}2x & 2(x+a) & 2(x+b)\end{pmatrix}$, qui est colinéaire à la 2e ligne.

Nous aurons trois déterminants nuls, donc $\Delta'(x) = 0$: je maintiens ce choix. On vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Delta'(x) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x & x+a & x+b \\ x^2 & (x+a)^2 & (x+b)^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ x^2 & (x+a)^2 & (x+b)^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x+a & x+b \\ 2x & 2(x+a) & 2(x+b) \end{vmatrix} = 0+0+0 = 0.$$

On en déduit que Δ est une application constante. On l'évalue en $x = 0$, $x = -a$ ou $x = -b$ (au choix), pour en déduire sa valeur, puis après calculs :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x+a & x+b \\ x^2 & (x+a)^2 & (x+b)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & b \\ 0 & a^2 & b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} = ab \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix} = ab(b-a).$$

Exercice 4. (déterminant de Vandermonde « lacunaire ») Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. S'inspirer de cet exemple pour calculer :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Delta(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x+a & x+b & x+c \\ (x+a)^3 & (x+b)^3 & (x+c)^3 \end{vmatrix},$$

et en déduire :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (c-b)(c-a)(b-a)(a+b+c).$$

Vous aurez besoin du « vrai » déterminant de Vandermonde, ou d'imiter l'exemple ci-dessus.