MÉTHODES – Espaces préhilbertiens et euclidiens
Utilisation des endomorphismes autoadjoints

Les endomorphismes autoadjoints sont des objets extrêmement riches, bien plus que ne le suggère le temps qu'on y consacre en cours ; ils peuvent donc occuper, dans un sujet de concours, une place non proportionnelle à celle dans le programme de PSI.

Les trois prochaines sections (de *Généraliser des produits scalaires* à *Matrices positives, définies positives*) sont très liées entre elles. Vous êtes très fortement encouragés à les lire à la suite, si vous voulez du recul et une vue d'ensemble parfaite sur ce qui motive *réellement* les endomorphismes autoadjoints.

Le résultat suivant est à savoir démontrer IMPÉRATIVEMENT avant cette lecture, ou elle est inutile :

> La décomposition $\langle f(\vec{x}), \vec{y}\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i y_i$ ou $X^\top AY = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i y_i$ (attention à ne pas retenir bêtement et de travers ce que sont les x_i et y_i ici : CE NE SONT PAS LES COORDONNÉES DE X ET Y DANS LA BASE CANONIQUE).

1 Généraliser des produits scalaires

Si f est un endomorphisme *autoadjoint* d'un espace euclidien $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, et A une matrice *symétrique*, alors :

$$(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \langle \vec{x}, f(\vec{y})\rangle\,, \qquad \text{et } (X, Y) \mapsto X^\top AY$$

sont des formes bilinéaires symétriques sur E et $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ respectivement : pour le cas de l'endomorphisme autoadjoint, c'est essentiellement la définition (qui assure la... symétrie). Pour la matrice symétrique, c'est un exercice.

D'ailleurs, TOUTES les formes bilinéaires symétriques sur $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sont de cette forme :

Exercice 1. Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. On pose $E_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $E_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

1. Vérifier qu'on a, pour tout $(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^4$:

$$\varphi(\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2, \mu_1 E_1 + \mu_2 E_2) = \lambda_1\mu_1\varphi(E_1, E_1) + \lambda_1\mu_2\varphi(E_1, E_2) + \lambda_2\mu_1\varphi(E_2, E_1) + \lambda_2\mu_2\varphi(E_2, E_2).$$

2. On pose : $A = \begin{pmatrix}\varphi(E_1, E_1) & \varphi(E_1, E_2)\\ \varphi(E_2, E_1) & \varphi(E_2, E_2)\end{pmatrix}$. Montrer que A est symétrique, et qu'on a :

$$\forall (X, Y) \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R}), \quad \varphi(X, Y) = X^\top AY.$$

3. Généraliser ce qui précède pour démontrer que toute forme bilinéaire symétrique sur $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est de la forme $(X, Y) \mapsto X^\top AY$ où A est une matrice symétrique réelle d'ordre n.

Pour voir ce qu'il manque à une telle forme bilinéaire symétrique pour être un produit scalaire, voir la section 3 (*Matrices positives, définies positives)*, et plus particulièrement l'exercice 4. → page 3

Une démonstration plus élégante du résultat de cet exercice découle du théorème de représentation de Riesz, appliqué pour tout $\vec{y} \in E$ (fixé) à la forme linéaire $\vec{x} \mapsto \varphi(\vec{x}, \vec{y})$. Je n'en parlerai pas, car là n'est pas ma préoccupation dans cette section.

Une forme bilinéaire symétrique n'est pas tout à fait aussi intéressante qu'un produit scalaire, mais on peut déjà en tirer quelques formules. En effet, les identités *calculatoires* vérifiées par un produit scalaire n'utilisent pas le caractère défini ni positif. On s'en convainc en faisant l'exercice suivant :

Exercice 2. Soit f un endomorphisme autoadjoint de $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Montrer les propriétés suivantes :

1. L'identité du parallélogramme :

$$\forall(\vec{x},\vec{y}) \in E^2, \quad \langle f(\vec{x}+\vec{y}),\vec{x}+\vec{y}\rangle + \langle f(\vec{x}-\vec{y}),\vec{x}-\vec{y}\rangle = 2\left(\langle f(\vec{x}),\vec{x}\rangle + \langle f(\vec{y}),\vec{y}\rangle\right).$$

2. Les identités de polarisation ; pour tout $(\vec{x},\vec{y}) \in E^2$, on a :

$$\langle f(\vec{x}),\vec{y}\rangle = \frac{1}{4}\left(\langle f(\vec{x}+\vec{y}),\vec{x}+\vec{y}\rangle - \langle f(\vec{x}-\vec{y}),\vec{x}-\vec{y}\rangle\right) = \frac{1}{2}\left(\langle f(\vec{x}+\vec{y}),\vec{x}+\vec{y}\rangle - \langle f(\vec{x}),\vec{x}\rangle - \langle f(\vec{y}),\vec{y}\rangle\right).$$

3. Refaire l'exercice en remplaçant l'étude de $(\vec{x},\vec{y}) \mapsto \langle f(\vec{x}),\vec{y}\rangle$ par celle de $(X,Y) \mapsto X^\top AY$ sur $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, où A est une matrice symétrique réelle d'ordre n.

Prenez bien soin d'identifier où sert la propriété d'être symétrique, et si vous avez du temps : déterminer ce que l'on aurait à la place en enlevant cette hypothèse.

Nous utilisons abondamment les identités de polarisation, parce que nous aurons souvent des informations sur les produits scalaires de la forme $\langle f(\vec{x}),\vec{x}\rangle$, au lieu de $\langle f(\vec{x}),\vec{y}\rangle$, et nous voudrons nous y ramener (ce sont en effet ces derniers produits scalaires qui nous permettent de tirer profit de l'orthogonalité, ou d'en déduire la matrice de f dans une base orthonormée) : voir la section *Comment passer de $\langle\vec{x},\vec{z}\rangle = \langle\vec{y},\vec{z}\rangle$ à $\vec{x}=\vec{y}$.*

Culture scientifique. On peut se demander : à quoi bon étudier ces formes bilinéaires symétriques, abstraites et n'ayant même pas l'avantage de l'interprétation géométrique, à l'instar d'un produit scalaire ? En vérité, elles n'ont rien d'abstrait : **dès qu'il apparaît une combinaison linéaire de carrés et de produits de coordonnées, il apparaît une quantité de la forme $\langle\vec{x},f(\vec{y})\rangle$ ou $X^\top AY$.**

Par exemple, si j'écris l'équation d'une ellipse sous la forme :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

je peux la réécrire sous la forme :

$$X^\top AX = 1, \text{ où : } X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \text{ et : } A = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} \end{pmatrix}.$$

On peut de même transformer l'équation d'un certain cône d'axe de révolution (Oz) dans $\mathbb{R}^3$:

$$x^2+y^2=z^2 \Longleftrightarrow x^2+y^2-z^2=0 \Longleftrightarrow X^\top AX = 0, \text{ où : } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ et : } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ce sont donc des sujets d'étude CENTRAUX de la géométrie. D'ailleurs, le théorème spectral, conjointement à la section suivante, permettent de démontrer que toute équation de degré 2 en x et y décrit soit une ellipse, soit une parabole, soit une hyperbole (sauf cas pathologiques : on parle alors de conique *dégénérée*), avec des résultats analogues en dimension 3.

Pour vraiment avoir un produit scalaire (et donc profiter de la positivité, du caractère défini, de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, etc.), il nous faut un endomorphisme ou une matrice avec des valeurs propres *strictement positives* : voir la section 3 (*Matrices positives, définies positives*), et plus particulièrement l'exercice 4. **Mais même si ce n'est pas un produit scalaire, le théorème spectral nous permet d'étudier $(\vec{x},\vec{y}) \mapsto \langle\vec{x},f(\vec{y})\rangle$ ou $(X,Y) \mapsto X^\top AY$ comme si c'en était « presque un »**. C'est l'objet de la section suivante. → page 3

2 ✓ Théorème spectral et produits scalaires

À l'aide du théorème spectral, nous avons démontré dans le cours que si f est un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$, dont $(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$ est une base orthonormée constituée de vecteurs propres de f (respectivement associés à des valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$), alors pour tous vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ de E de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ dans $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$, on a :

$$\langle f(\vec{x}), \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i y_i.$$

C'EST À SAVOIR REDÉMONTRER À CHAQUE FOIS ! En particulier, si $\vec{x} = \vec{y}$, alors : $\langle f(\vec{x}), \vec{x} \rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$. C'est « presque » comme le produit scalaire usuel, et très confortable pour le calcul.

Nous avons une formule analogue pour les matrices, qu'on peut déduire directement de l'expression d'un produit scalaire dans une base orthonormée pour écrire $X^\top AY = \langle f(\vec{x}), \vec{y} \rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i y_i$, mais il est bon de savoir la démontrer directement au lieu de passer systématiquement par un endomorphisme associé. C'EST À SAVOIR REDÉMONTRER À CHAQUE FOIS ! C'est le point de départ de nombreux problèmes sur les endomorphismes et matrices symétriques, il faut y penser et même l'écrire « dans le doute » (au brouillon) quand on ne sait pas répondre à une question.

Le cadre d'application de ces identités est : **dès que vous devez déduire des propriétés des éléments propres de A à partir de produits scalaires, et inversement**. Il s'agit en général d'inégalités. Cela permet aussi de produire des encadrements très efficaces de produits scalaires, à condition de connaître un minimum de choses sur les valeurs propres.

3 Matrices positives, définies positives

Le cours définit la notion de matrice positive, et prouve l'équivalence suivante :

$$\boxed{\forall X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^\top AX \geqslant 0 \iff \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subseteq \mathbb{R}_+ \text{ (matrice \textbf{positive})}.}$$

Notez la ressemblance de la première propriété avec la propriété de positivité du produit scalaire. Nous introduisons aussi la notion de matrice définie positive :

$$\boxed{\forall X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\},\ X^\top AX > 0 \iff \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subseteq \mathbb{R}_+^* \iff A \text{ inversible et } \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subseteq \mathbb{R}_+ \text{ (matrice \textbf{définie positive})}.}$$

Notez la ressemblance de la première propriété avec le caractère défini du produit scalaire. La notion existe aussi pour les endomorphismes.

Exercice 3. Soit f un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

1. Montrer : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \mathbb{R}_+ \iff \forall \vec{x} \in E,\ \langle \vec{x}, f(\vec{x}) \rangle \geqslant 0$. On dit dans ce cas que f est **positif**.
2. Montrer : $\mathrm{Sp}(f) \subseteq \mathbb{R}_+^* \iff \forall \vec{x} \in E \setminus \{\vec{0}\},\ \langle \vec{x}, f(\vec{x}) \rangle > 0$. On dit dans ce cas que f est **défini positif**.

Cet exercice se traite EXACTEMENT de la même manière que dans le cas matriciel : en exprimant $\langle \vec{x}, f(\vec{x}) \rangle$ comme combinaison linéaire dépendant des valeurs propres de f et des coordonnées de $\vec{x}$ au carré.

Absolument TOUT problème de concours sur les endomorphismes autoadjoints utilisera ces équivalences, dans le cas matriciel ou géométrique. Par conséquent :

CES CARACTÉRISATIONS DES ENDOMORPHISMES ET MATRICES (DÉFINIS) POSITIFS SONT À CONNAÎTRE IMPÉRATIVEMENT !

Notez que si vous savez que A est une matrice positive, alors il vient avec d'autres quantités positives :

— la trace (puisque c'est la somme des valeurs propres avec multiplicités, qui sont positives) ;

— le déterminant (puisque c'est le produit des valeurs propres avec multiplicités, qui sont positives) ;

— *certains* coefficients de A (puisque $X^\top AX \geqslant 0$ pour tout X, c'est en particulier si X est le i^{e} vecteur de la base canonique E_i : quel coefficient de A obtient-on alors en calculant $E_i^\top AE_i$?).

Un intérêt de cette notion est partiellement contenu dans l'exercice suivant (justifiant la terminologie) :

Exercice 4.

1. Montrer que si f est un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, et si f est défini positif, alors l'application $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \langle f(\vec{x}), \vec{y} \rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. Montrer que si $A \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ est une matrice définie positive, alors l'application $(X, Y) \mapsto X^\top AY$ est un produit scalaire sur $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

En fait, on peut démontrer que TOUT produit scalaire sur $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est de cette forme (exercice 1). ← page 1

C'est en particulier TRÈS utile pour pouvoir utiliser à nouveau la propriété de positivité ou le caractère défini : vous en déduisez que si $\langle f(\vec{x}), \vec{x} \rangle = 0$ (ou $X^\top AX = 0$), alors $\vec{x} = \vec{0}$ (ou $X = 0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$). Même si f (ou A) n'est pas définie positive, mais seulement positive, alors ce n'est pas inutile pour autant : l'égalité $\langle f(\vec{x}), \vec{x} \rangle = 0$ avec $\vec{x} \neq \vec{0}$ implique que 0 est une valeur propre de f. C'est un des exercices de travaux dirigés.

Ainsi nous en déduisons de nouvelles informations sur ces produits scalaires, sachant que (nous ne le répéterons jamais assez) quand on les évalue en des vecteurs d'une base orthonormée, ils donnent les coefficients de la matrice de f dans cette même base. On peut donc étudier la matrice de f (et f par extension) à l'aide de produits scalaires de la forme $\langle f(\vec{x}), \vec{y} \rangle$ (n'oublions pas les identités de polarisation, au besoin). De même pour A.

Exemple 1. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice définie positive. Montrons qu'alors : $a > 0$ et $ad - bc > 0$. En effet, puisque ses valeurs propres λ_1 et λ_2 sont strictement positives, on a : $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 > 0$. Or $\det(A) = ad - bc$, donc $ad - bc > 0$. De plus, $a = E_1^\top AE_1 > 0$, où $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (on utilise le fait que tous les coefficients d'une matrice puissent s'écrire en termes de produits scalaires : revoir au besoin la section *L'importance des bases orthonormées*), d'où le résultat.

Exercice 5. Montrer que pour une matrice symétrique définie positive, tous les coefficients diagonaux sont strictement positifs, mais que ce n'est pas forcément vrai de tous ses coefficients.

Mais un produit scalaire vérifie bien plus de propriétés que la seule positivité et le caractère défini :

Exercice 6.

1. On suppose que f est un endomorphisme autoadjoint de $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, **positif**.
   (a) Montrer que pour tout $(\vec{x}, \vec{y}) \in E^2$, on a :
   $$(\langle f(\vec{x}), \vec{y} \rangle)^2 \leqslant \langle f(\vec{x}), \vec{x} \rangle \langle f(\vec{y}), \vec{y} \rangle \quad \text{(inégalité de Cauchy-Schwarz).}$$
   (b) Montrer que pour tout $(\vec{x}, \vec{y}) \in E^2$, on a :
   $$\sqrt{\langle f(\vec{x} + y), \vec{x} + \vec{y} \rangle} \leqslant \sqrt{\langle f(\vec{x}), \vec{x} \rangle} + \sqrt{\langle f(\vec{y}), \vec{y} \rangle} \quad \text{(inégalité triangulaire, ou de Minkowski).}$$
   On pourrait facilement adapter la première question à la démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz vérifiée par le coefficient de corrélation, dans le chapitre de probabilités. Pour cela, adaptez-la à l'application $(X, Y) \mapsto \mathrm{E}(XY)$, qui est une forme bilinéaire symétrique positive sur l'espace vectoriel des variables aléatoires réelles discrètes admettant une variance.
2. Soit $A \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ **positive**. Montrer : $\forall (A, B) \in (\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$, $\left| X^\top AY \right| \leqslant \sqrt{X^\top AX \cdot Y^\top AY}$.

Notez qu'on ne dit rien des cas d'égalité (pour cela, il faudrait avoir un produit scalaire, et donc que f et A soient définis positifs d'après l'exercice 4 plus haut).

On en déduit également de nouvelles formes de réduction des matrices, par exemple en orthonormalisant *dans ces nouveaux produits scalaires* des bases qui étaient orthonormées *pour les produits scalaires* *usuels*. Par exemple, toute matrice symétrique A définie positive peut être écrite de manière unique sous la forme $A = T^\top T$, où T est une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs. Mais je n'en parle pas car nous déborderions beaucoup trop du programme de PSI.

3.1 Montrer (ou infirmer) qu'une matrice symétrique est positive ou définie positive

Soit $A \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$. On se demande si A est positive, définie positive, ou ni l'un ni l'autre. Il y a deux façons de l'étudier : soit avec le signe de $X^\top AX$, soit avec le signe des valeurs propres. Nous discutons ici de la méthode à privilégier, sachant qu'il faut avoir en tête que le bon choix à faire dépend de la facilité que l'on a à avoir les valeurs propres.

3.1.1 Cas d'une matrice explicite d'ordre raisonnable (2 ou 3)

Pour une matrice symétrique A d'ordre 2, il est toujours possible d'obtenir ses valeurs propres aisément : cela revient à déterminer les racines de son polynôme caractéristique, qui est de degré 2. C'est donc classique. Si A est d'ordre 3, cela dépend car il est tout à fait possible qu'on ne soit pas en présence de trois racines aisément trouvables.

Si vous avez réussi à trouver les valeurs propres de A, alors il suffit de déterminer leur signe pour en déduire si A est positive ou définie positive.

Si vous voyez que vous peinez à trouver les valeurs propres, alors vous oubliez la caractérisation avec les valeurs propres et montrez que pour tout vecteur colonne X, on a : $X^\top AX \geqslant 0$ (ou $X^\top AX > 0$ pour tout X non nul, si vous voulez montrer que A est définie positive). Pour y parvenir, il suffit de poser $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (ou $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ si A est d'ordre 3), et vous calculez explicitement $X^\top AX$ en fonction de x et y (et z le cas échéant). Il vous suffira alors d'utiliser la méthode de la section *Produits scalaires sur* $\mathbb{R}^n$ *: somme de carrés et produits* pour montrer que c'est positif.

Pour montrer que c'est **défini** positif par cette méthode, privilégiez la contraposée : montrez que si $X^\top AX = 0$, alors $X = 0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. Cela veut bien dire que si X est non nul, alors $X^\top AX > 0$ (en partant du principe que vous avez déjà montré la positivité de cette quantité).

Exemple 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. C'est une matrice symétrique. On se demande si elle est (définie) positive. Je vous laisse vous convaincre (ordinateur à l'appui) que les racines de χ_A ne sont pas simples du tout à expliciter : vous n'y parviendriez certainement pas à la main ! Puisque nous sommes dans l'incapacité d'expliciter les valeurs propres de A à la main, nous allons plutôt passer par le calcul de $X^\top AX$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} X^\top AX = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= 5x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 4xy + 2xz + 4yz \\ &= 5\left(x + \frac{2y}{5} + \frac{z}{5}\right)^2 + \frac{71}{25}y^2 + \frac{99}{25}z^2 + \frac{96}{25}yz \\ &= 5\left(x + \frac{2y}{5} + \frac{z}{5}\right)^2 + \frac{71}{25}\left(y^2 + \frac{96}{71}yz + \frac{99}{71}z^2\right) \\ &= 5\left(x + \frac{2y}{5} + \frac{z}{5}\right)^2 + \frac{71}{25}\left[\left(y + \frac{48}{71}z\right)^2 + \left(99 - \frac{48^2}{71^2}\right)z^2\right]. \end{aligned}$$

Nous avons une somme de carrés (multipliés par des scalaires positifs), donc : $X^\top AX \geqslant 0$. De plus, si $X^\top AX = 0$ alors, une somme de réels positifs étant nul si seulement si chaque terme est nul, on en déduit :

$x + \frac{2y}{5} + \frac{z}{5} = 0$, $y + \frac{48}{71}z = 0$ et $z = 0$. De là il découle aisément : $x = y = z = 0$, donc : $X = 0_{\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$. Par contraposée, si X est non nul, alors : $X^\top AX > 0$, ce qui montre que A est **définie** positive. Nous y sommes parvenus sans calculer les valeurs propres.

3.1.2 Cas d'une matrice d'ordre n

Il est dans ce cas assez rare que le calcul de $X^\top AX$ soit suffisamment simple pour en extraire le signe. Privilégiez la recherche des valeurs propres, en n'oubliant pas que grâce aux méthodes du chapitre de réduction des endomorphismes, on sait parfois trouver toutes les valeurs propres d'une matrice d'ordre n par un usage adéquat du théorème du rang, de la trace, etc. Il vaut mieux, parce que le calcul du polynôme caractéristique d'une matrice d'ordre n n'est pas forcément aisé.

Exemple 3. On veut déterminer si la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est symétrique positive. Si l'on cherche à poser $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et à calculer $X^\top AX$, on trouvera certes l'expression : $X^\top AX = 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j$, mais bon courage pour en trouver le signe... La méthode de la section *Produits scalaires sur* $\mathbb{R}^n$ *: somme de carrés et produits* se met très difficilement en œuvre. En revanche les valeurs propres de A s'obtiennent aisément : en effet $A + \mathrm{I}_n$ est de rang 1 (toutes les colonnes sont proportionnelles à $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$), donc par le théorème du rang : $\dim(\ker(A + \mathrm{I}_n)) = n - 1$. On en déduit que -1 est valeur propre (d'ordre de multiplicité $n-1$), ce qui suffit à démontrer que A n'est pas une matrice positive (elle admet une valeur propre strictement négative).

On peut montrer grâce à la somme des coefficients de chaque ligne, ou à la trace, que la dernière valeur propre de A est $n - 1$. Ainsi A admet une valeur propre de chaque signe, donc elle n'est ni positive, ni négative.

3.1.3 Cas d'une matrice symétrique définie à l'aide d'une autre matrice symétrique (puissances...)

Dans le cas où l'on sait que A est symétrique positive (par exemple), et qu'on nous demande de montrer que B est positive avec $B = A^k$, il devient pertinent de passer par les valeurs propres : en effet, on sait que *via* diagonalisation, les valeurs propres de B s'obtiennent à partir de celles de A à la puissance k. Connaissant le signe des valeurs propres de A, on en déduit le signe des valeurs propres de B.

En revanche, le calcul de $X^\top BX = X^\top A^k X$ ne peut pas se ramener au calcul de $X^\top AX$ aisément : cette approche fait long feu.

Exemple 4. Soit A une matrice symétrique positive. On veut justifier que A^3 est symétrique positive (il est facile de montrer qu'elle est symétrique : nous vous laissons le faire). Pour cela, nous allons exprimer les valeurs propres de A^3 en fonction de celles de A. Par le théorème spectral, il existe P inversible et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_n \end{pmatrix}$ telles que : $A = PDP^{-1}$. Comme A est positive, tous les λ_i sont positifs. Alors :

$$A^3 = PD^3P^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda_1^3 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_n^3 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

On en déduit que les valeurs propres de A^3 sont les λ_i^3 avec $\lambda_i \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$. Or : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_i \geqslant 0$, donc : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_i^3 \geqslant 0$. On en déduit que toutes les valeurs propres de A^3 sont positives. D'où le résultat : A^3 est une matrice symétrique positive.

Exercice 7. Montrer que si A est une matrice symétrique (non nécessairement positive), alors A^k est symétrique positive pour tout entier *pair* k.

Exercice 8. Montrer que si A est une matrice symétrique définie positive, alors A^{-1} l'est aussi.

3.1.4 Cas de matrices non explicites

Je pense par exemple à des exercices qui demandent si AB, ou $A+B$ (ou plus généralement : toute matrice M définie à l'aide de A et B), etc., est positive, sachant que A et B le sont. Dans ces cas-là il n'y a pas de réponse définitive concernant la méthode à adopter. Cela dépend. Néanmoins on retiendra que :

— l'application $M \mapsto X^\top MX$ est linéaire (c'est-à-dire notamment : $X^\top(M+\lambda N)X = X^\top MX + \lambda X^\top NX$), donc si M est définie à l'aide d'une somme de matrices symétriques (disons A et B pour reprendre les notations ci-dessus), on peut aisément ramener l'étude de $X^\top MX$ à celle de $X^\top AX$ et $X^\top BX$;

— en revanche, pour le produit, on voit difficilement comment on exprimerait $X^\top ABX$ en fonction de $X^\top AX$ et $X^\top BX$ (ne parlez *surtout pas* d'écrire quelque chose comme : $X^\top ABX = X^\top AXX^{-1}BX = \cdots$: puisque X n'est pas une matrice carrée, elle n'est pas inversible).

En résumé : pour une SOMME, ou plus généralement une COMBINAISON LINÉAIRE de matrices carrées, il est pertinent d'étudier le caractère défini ou positif *via* le signe de $X^\top MX$. Mais pour le PRODUIT c'est à première vue impossible.

Pour le cas des valeurs propres, il faut être plus nuancé : c'est impossible *en général* (même si on connaît les valeurs propres de A et B, on ne peut en déduire les valeurs propres de $A+B$ ou AB, par exemple parce qu'il n'y a pas de formule exprimant χ_{A+B} ou χ_{AB} en fonction de χ_A et χ_B). Mais *parfois*, le miracle opère : **si A et B sont diagonalisables avec une même matrice de passage** P (c'est le cas si A et B commutent, ce que nous ne démontrerons pas ici : c'est un exercice en soi). Dans ce cas, en effet, les opérations normalement incompatibles avec les éléments propres deviennent agréables. Si $A = PDP^{-1}$ et $B = PD'P^{-1}$ alors D, D' diagonales, et P inversible, alors :

$$A+B = P(D+D')P^{-1}, \quad \text{et :} \quad AB = PDP^{-1}PD'P^{-1} = PDD'P^{-1},$$

où $D+D'$ et DD' sont diagonales : ainsi leurs coefficients diagonaux (qui dépendent de ceux de D et D') donnent les valeurs propres de $A+B$ et AB, et on est donc en mesure de trancher sur leur signe.

Comme on l'a dit plus haut, le cas de la somme s'étudie assez bien si l'on passe par le signe de $X^\top MX$. C'est donc plutôt en cas de produit qu'on songera à ce paragraphe.

4 Utiliser la réduction des endomorphismes autoadjoints pour *d'autres* endomorphismes

La situation très avantageuse des endomorphismes ou matrices symétriques (diagonalisation dans une base orthonormée) permet aussi d'en déduire des résultats très avantageux sur d'autres endomorphismes ou matrices, à condition de pouvoir s'y ramener. Il existe plusieurs façons de se ramener d'une matrice M quelconque à une matrice symétrique, puisqu'en effet :

$$\forall M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}), \quad M^\top M \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R}), \quad M^\top + M \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R}) \quad \text{(c'est quasiment sa projection orthogonale sur } \mathrm{S}_n(\mathbb{R})\text{)}$$

Avant de montrer comment tirer pleinement profit de cette méthode, il faut tout de même écarter les situations où elle N'est PAS intéressante du tout :

— si M est une matrice orthogonale, alors $M^\top M = \mathrm{I}_n$: matrice triviale qui ne nous permettra pas de déduire quoi que ce soit de M ; donc si M est une matrice orthogonale, on passera plutôt par $M + M^\top = M + M^{-1}$;

— si M est une matrice antisymétrique, alors $M^\top + M = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{R})}$: matrice triviale qui ne nous permettra pas de déduire quoi que ce soit de M ; donc si M est une matrice antisymétrique, on passera plutôt par $M^\top M = -M^2$ (ou M^2, cela revient au même) ;

— dans les autres cas, ce n'est d'aucune aide si $M^\top$ ne vérifie rien de spécial (cela dépend donc des hypothèses).

Enfin, ce que nous utiliserons comme propriété dans ces cas-là n'est pas, *en général*, le fait qu'une matrice symétrique réelle soit diagonalisable, mais le résultat moins fort que **toutes ses valeurs propres sont réelles** (le polynôme caractéristique étant scindé sur $\mathbb{R}$). En effet, il n'y a pas (en général) de rapport entre la réduction de M et celle de $M^\top M$ ou $M + M^\top$. Toutefois la relation $M^\top M X = \lambda X$ ou $(M + M^\top)X = \lambda X$ implique bien des relations entre M et λ ou X. On n'en déduit pas forcément des éléments propres de M, mais c'est mieux que rien.

Exercice 9. (application de la méthode aux isométries) Soit f une isométrie d'un espace euclidien E. On suppose que f n'admet pas de vecteur propre.

1. Montrer que pour tout $\vec{x} \in E$ non nul, la famille $(\vec{x}, f(\vec{x}))$ est libre.
2. Rappeler pourquoi une isométrie est inversible, et montrer que $g = f + f^{-1}$ est un endomorphisme autoadjoint.
3. En déduire l'existence de $\vec{x} \in E$ non nul, et de $\lambda \in \mathbb{R}$, tels que : $f^2(\vec{x}) = \lambda f(\vec{x}) - \vec{x}$.
4. Déduire de tout ce qui précède qu'il existe un plan (c'est-à-dire : un sous-espace vectoriel de dimension 2) de E stable par f.

Ce résultat est EXTRÊMEMENT UTILE dans la réduction des isométries, dans le cas où elles n'ont pas de vecteur propre (et donc pas de droite stable). En effet, il nous permet d'étudier l'endomorphisme induit par cette isométrie sur un plan (et on sait que c'est une rotation planaire, grâce à la classification des isométries du plan), et en raisonnant par récurrence sur le supplémentaire orthogonal on en déduit une base de E où la matrice de f est diagonale par blocs, et les blocs diagonaux sont des matrices de rotation.

5. Le démontrer.

En vérité l'existence de plans stables reste vraie pour tout endomorphisme de E, mais la démonstration est plus délicate si l'on reste dans le cadre du programme.

Exercice 10. (application de la méthode aux matrices antisymétriques réelles) Soit M une matrice antisymétrique *réelle*. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de M.

1. Montrer que M^2 est une matrice symétrique réelle.
2. Montrer que λ^2 est une valeur propre de M^2 ; en déduire que les valeurs propres de M sont soit des réels, soit des imaginaires purs.
3. On suppose dans cette question que λ est une valeur propre **réelle** de M. Soit $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé. Montrer : $\lambda^2 \cdot X^\top X = -(MX)^\top MX$, et en déduire : $\lambda = 0$.

Ainsi, toutes les valeurs propres d'une matrice antisymétrique réelle sont des imaginaires purs ! (notons que 0 en est un aussi) Ce résultat sur le spectre d'une matrice antisymétrique réelle est très pratique. Il rend trivial ce grand classique de l'oral :

Exercice 11. Montrer que si $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice antisymétrique réelle, alors $\mathrm{I}_n + M$ est inversible (*on peut aussi faire cet exercice sans* AUCUN *résultat de réduction, mais en montrant que* $(\mathrm{I}_n + M)X = 0$ *implique* $X = 0$ *par des manipulations classiques*).

Mise en garde 1. Attention à ne pas avoir des raisonnements abusifs, et faire dire à cette méthode plus de choses qu'elle n'en promet. Par exemple, **ce serait un raisonnement faux** de dire que si M est antisymétrique (par exemple), alors M^2 est symétrique d'après ce qui précède, donc diagonalisable sur $\mathbb{R}$ d'après le théorème spectral (pour l'instant tout est vrai), et que par conséquent M l'est aussi. En effet, la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ (son polynôme caractéristique n'est même pas scindé), bien que son carré le soit (c'est la matrice $-\mathrm{I}_2$).

Ce n'est donc pas une méthode miracle qui permettrait de réduire n'importe quelle matrice à l'aide des matrices symétriques.

Enfin notons l'exercice intéressant suivant, apparu implicitement en exercice de travaux dirigés :

Exercice 12. Si $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, alors $M^\top M$ est symétrique et à valeurs propres positives ou nulles.

C'est donc un peu mieux que le simple fait d'être symétrique, à la lumière de tout ce qui fut prodigué sur les matrices positives dans la section 3. ← page 3

5 ☢ Utilisation de la racine carrée matricielle

Le résultat suivant est classique : pour toute matrice $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique **positive**, il existe une matrice $R \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique positive telle que : $M = R^2$. **Refaites cet exercice avant de lire cette section**.

L'énoncé est formulé dans le cas plus contraignant de valeurs propres strictement positives, mais en vérité elles ne servent que pour la démonstration de l'unicité.

L'intérêt des racines carrées matricielles apparaît lorsque nous étudions une relation entre deux matrices symétriques positives, **et que nous voulons remplacer l'une d'elles par la matrice identité sans perdre la symétrie de l'autre**. Donnons d'abord un exemple pour que le propos soit plus concret.

Exemple 5. Nous allons démontrer que si A et B sont deux matrices symétriques réelles **définies positives** :

$$\det(A+B) \geqslant \det(A) + \det(B).$$

Pour cela, je vais d'abord démontrer le résultat dans le cas plus simple où A est la matrice identité, c'est-à-dire :

$$\det(\mathrm{I}_n + B) \geqslant \det(\mathrm{I}_n) + \det(B) = 1 + \det(B). \tag{1}$$

Pour la démontrer, on va se ramener au cas favorable d'une matrice diagonale, puisque dans ce cas le déterminant est simplement le produit des termes diagonaux. Or B est symétrique réelle, donc diagonalisable : il existe P inversible et D diagonale telles que $B = PDP^{-1}$, et on en déduit (on écrit $\mathrm{I}_n = P\mathrm{I}_nP^{-1}$) :

$$\det(\mathrm{I}_n + B) = \det\left(P\left(\mathrm{I}_n + D\right)P^{-1}\right) = \det(P)\det\left(\mathrm{I}_n + D\right)\det(P)^{-1} = \det\left(\mathrm{I}_n + D\right).$$

Les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de B, et elles sont strictement positives par hypothèse sur B. Donc :

$$\det\left(\mathrm{I}_n + D\right) = \det\left(\begin{pmatrix} 1+\lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & 1+\lambda_n \end{pmatrix}\right) = \prod_{i=1}^n (1+\lambda_i) = 1 + \prod_{i=1}^n \lambda_i + \textit{etc.},$$

où cette dernière égalité est obtenue en développant le produit : les deux termes isolés sont obtenus par multiplication des 1 de chaque facteur, ou des λ_i de chaque facteur. Tous les autres termes du développement, cachés dans le « etc. », sont des produits des λ_i, donc sont positifs strictement. On en déduit : $\det\left(\mathrm{I}_n + D\right) > 1 + \prod_{i=1}^n \lambda_i = 1 + \det(D)$, ce qu'on voulait démontrer. Le raisonnement vaut pour toute matrice B à valeurs propres strictement positives (précision d'importance pour ce qui suit).

Passons maintenant au cas général $\det(A+B) \geqslant \det(A) + \det(B)$. On l'a vu, il existe une matrice R symétrique réelle définie positive telle que $R^2 = A$. Comme 0 n'en est pas valeur propre, on en déduit que R est inversible, et on peut donc écrire :

$$\begin{aligned}\det(A+B) = \det(R^2+B) = \det\left(R\left(R+R^{-1}B\right)\right) &= \det(R)\det(R+R^{-1}B)\\ &= \det(R)\det\left(\left(\mathrm{I}_n + R^{-1}BR^{-1}\right)R\right)\\ &= \det(R)\det\left(\mathrm{I}_n + R^{-1}BR^{-1}\right)\det(R)\\ &= \det(R)^2\det\left(\mathrm{I}_n + R^{-1}BR^{-1}\right).\end{aligned}$$

Par des manipulations analogues, on a : $\det(A)+\det(B) = \det(R)^2\left(1+\det\left(R^{-1}BR^{-1}\right)\right)$. Ainsi, si on reprend l'inégalité qu'on veut démontrer :

$$\begin{aligned}&\det(A+B) \geqslant \det(A)+\det(B)\\ \Longleftrightarrow\ &\det(R)^2\det\left(\mathrm{I}_n + R^{-1}BR^{-1}\right) \geqslant \det(R)^2\left(1+\det\left(R^{-1}BR^{-1}\right)\right)\\ \Longleftrightarrow\ &\det\left(\mathrm{I}_n + R^{-1}BR^{-1}\right) \geqslant 1+\det\left(R^{-1}BR^{-1}\right), \qquad \text{car } \det(R)^2 > 0\end{aligned}$$

et on peut démontrer que $R^{-1}BR^{-1}$ est une matrice symétrique réelle définie positive (voir exercice ci-bas) ; elle vérifie donc l'inégalité (1) (en remplaçant B par cette matrice). Ainsi cette équivalence est vraie, donc a bien $\det(A+B) \geqslant \det(A)+\det(B)$: d'où le résultat.

Exercice 13. Vérifier le résultat admis : $R^{-1}BR^{-1}$ est symétrique réelle et définie positive ; pour cela, on vérifie que pour tout $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul on a : $X^\top\left(R^{-1}BR^{-1}\right)X > 0$, en utilisant le fait que B soit définie positive.

Si nous voulions nous ramener à la matrice identité sans utiliser la racine carrée, nous écririons : $\det(A+B) = \det\left(\left(A\left(\mathrm{I}_n + A^{-1}B\right)\right)\right) = \det(A)\det\left(\mathrm{I}_n + A^{-1}B\right)$. Effectivement, la matrice identité apparaît, mais on ne peut rien faire de $A^{-1}B$: ce n'est *a priori* pas une matrice symétrique, et en particulier on ne sait pas si elle est diagonalisable ; même si elle était, rien n'assurerait que ses valeurs propres sont positives : elles n'ont pas de rapport *a priori* avec celles de A et de B.

Autre problème : on pourrait se demander pourquoi il ne suffisait pas tout simplement de diagonaliser A et B, de sorte à pouvoir écrire $\det(A+B)$ comme le produit des $\mu_i + \lambda_i$, où les μ_i et λ_i sont les valeurs propres de A et B respectivement. Le problème est qu'*a priori* A et B ne sont pas diagonalisables dans les mêmes bases, et donc pas avec les mêmes matrices de passage : on ne peut donc pas *a priori* écrire $A+B = P(D'+D)P^{-1}$ pour en déduire $\det(A+B) = \det(D'+D) = \prod_{i=1}^{n}(\mu_i+\lambda_i)$. C'est faux en général !

On voit donc qu'en factorisant $\det(A+B)$ à l'aide de $A = R^2$, nous avons non seulement simplifié le problème en nous ramenant à la matrice identité, mais nous n'avons pas « perdu » la symétrie de la seconde matrice, puisque $R^{-1}BR^{-1}$ reste symétrique, réelle, et à valeurs propres positives. C'est pour conserver la symétrie que la racine carrée R a grand intérêt, **en factorisant à gauche et à droite par** R (là est l'astuce).

Exercice 14.

1. Montrer que le résultat reste vrai si B est **positive**, et que $\det(A+B) = \det(A)+\det(B)$ si et seulement si B est la matrice nulle.
2. Montrer que le résultat reste vrai si A et B sont **positives**. Si vous ne voulez pas passer par l'algèbre linéaire, un argument de continuité est possible : voir *Méthodes*, chapitre de topologie, section 7.3.2.

Exercice 15.

1. Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n, définie positive (donc inversible en particulier). Montrer que si on a :
$$\forall X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad X^\top AX > X^\top X,$$

alors :

$$\forall X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad X^\top A^{-1} X < X^\top X$$

(ramener ces inégalités à des inégalités sur les valeurs propres de A).

2. En déduire, en utilisant la question précédente et la racine carrée de A, que si A et B sont deux matrices symétriques réelles d'ordre n, définies positives, telles que :

$$\forall X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad X^\top A X > X^\top B X,$$

alors :

$$\forall X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad X^\top A^{-1} X < X^\top B^{-1} X.$$

Cet exercice généralise l'implication $0 < b < a \Rightarrow 0 < \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ bien connue pour les nombres réels.

En principe, l'existence de racines carrées n'est facile à démontrer **que pour les matrices symétriques positives**. Mais pour toute matrice M (même non symétrique), l'exercice 12 permet d'établir l'existence d'une matrice R symétrique positive telle que $R^2 = M^\top M$. C'est parfois utile. ← page 9

Exercice 16. À l'aide de cette idée, montrer que toute matrice inversible M peut s'écrire de manière unique sous la forme $M = OS$ avec O orthogonale et S symétrique définie positive (*déterminer O et S par analyse et synthèse*).

6 ☢ Étudier les matrices (anti)symétriques à l'aide des endomorphismes (anti)symétriques

Il est conseillé de lire cette section conjointement à la section *Isométries* : il y a plusieurs techniques qui se font écho, et vous pourriez gagner en compréhension en les mettant en parallèle.

La stratégie n'est pas nouvelle : depuis le chapitre de réduction des endomorphismes, nous avons réduit des matrices en passant par leurs endomorphismes associés, et en écrivant leurs matrices dans des bases adaptées à une décomposition en sous-espaces stables (le meilleur cas de figure étant le cas où ces sous-espaces stables sont des sous-espaces propres : la restriction à ces sous-espaces est une homothétie, dont la matrice est diagonale).

La question se pose aussi dans le cas particulier des matrices symétriques et antisymétriques (on pourrait en discuter avec bien d'autres ; notamment les matrices orthogonales, voir section *Isométries.* Mais réduire n'a jamais été aussi souple qu'avec ces endomorphismes : ils vérifient en effet que si un sous-espace est stable, alors le supplémentaire orthogonal est stable aussi (c'est le cours pour les endomorphismes autoadjoints, et l'exercice 17 ci-dessous pour les antisymétriques). Voici alors une stratégie très efficace pour réduire une matrice A de cette nature (je reste dans le vague sur le type de réduction, cela dépend de ce qu'on veut démontrer) :

1. On introduit l'endomorphisme f de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé, et on en détermine un « bon » sous-espace stable F : un sous-espace propre si on en connaît un, ou seulement une droite stable si on ne connaît qu'un vecteur propre ; un plan stable faute de mieux (dans ce cas on doit vous donner des indications). L'endomorphisme induit par f sur F a alors une matrice « simple » que je note M dans une base $\mathcal{B}_0$ de F.
2. L'endomorphisme f laisse aussi stable $F^\perp$, et l'endomorphisme induit par f sur $F^\perp$ vérifie les mêmes propriétés que f ; comme $\dim(F^\perp) = \dim(\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})) - \dim(F) < n$, la dimension de $F^\perp$ est strictement inférieure à celle de l'espace entier, ce qui permet d'en déduire par récurrence forte une base $\mathcal{B}_1$ de $F^\perp$ où la matrice de l'endomorphisme induit, notée N, est « simple ».
3. Dans la base $\mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_1$ adaptée à la décomposition $E = F \oplus F^\perp$, la matrice de f est $\begin{pmatrix} M & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & N \end{pmatrix}$. En utilisant la formule du changement de base, on en déduit que A est semblable à $\begin{pmatrix} M & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & N \end{pmatrix}$.

Voir l'exemple 6 pour une application très concrète de cette méthode. → page 12

Dans ce genre d'exercice, on préfèrera vous embêter avec des matrices autres que symétriques (je parlerai essentiellement des matrices antisymétriques dans cette section). En effet, une matrice symétrique est rendue trop facile à réduire avec le théorème spectral, alors que pour les autres types de matrices vous ne savez rien et tout est à démontrer. C'est d'ailleurs l'occasion de poser des questions de cours déguisées, vu que beaucoup de résultats pour les endomorphismes antisymétriques se démontrent de la même manière que pour les endomorphismes autoadjoints. Nous récapitulons ces démonstrations « communes » dans l'exercice suivant : si vous peinez, reprenez le cours sur les endomorphismes autoadjoints et adaptez-le *mutatis mutandis.*

Exercice 17. Soit f un endomorphisme antisymétrique de E.

1. Montrer que sa matrice relativement à une base orthonormée est antisymétrique.
2. Réciproquement, si $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice antisymétrique, montrer que son endomorphisme canoniquement associé est un endomorphisme antisymétrique de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
3. Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E stable par f, alors $F^\perp$ est aussi stable par f.
4. Montrer que $\ker(f) = \mathrm{im}(f)^\perp$ et $\ker(f)^\perp = \mathrm{im}(f)$.

Dans tout le reste de la section, on considère ces propriétés comme connues (mais elles seraient bien sûr à redémontrer en exercice).

On en déduit une première piste pour réduire des endomorphismes antisymétriques : notons que $\ker(f)$ (et donc $\ker(f)^\perp = \mathrm{im}(f)$) est TOUJOURS un sous-espace stable. **Il ne coûte donc rien de toujours commencer à étudier l'endomorphisme induit par f sur** $\ker(f)^\perp$, ce qui a deux avantages loin d'être négligeables :

— l'endomorphisme induit par f sur $\ker(f)^\perp$ EST TOUJOURS BIJECTIF (en effet, un vecteur de son noyau serait à la fois dans $\ker(f)$ et $\ker(f)^\perp$, or $\ker(f) \cap \ker(f)^\perp = \{\vec{0}\}$), ce qui est intéressant ne serait-ce que pour la non nullité de $f(\vec{x})$ pour tout $\vec{x} \in \ker(f)^\perp$;

— l'image par f de tout vecteur de $\ker(f)$ est nulle (c'est la définition), donc la matrice de l'endomorphisme induit par f sur $\ker(f)$ est la matrice nulle.

L'intérêt de ce dernier point : une fois qu'on a trouvé une « bonne » base de $\ker(f)^\perp$ pour notre réduction, on en déduit une « bonne » base de E en la complétant avec une base de $\ker(f)$ (du fait que $E = \ker(f) \oplus \ker(f)^\perp$). Alors, lorsqu'on écrit la matrice de f dans cette base adaptée, les colonnes correspondant aux images par f des vecteurs de $\ker(f)$ sont toutes nulles. On peut difficilement faire plus simple.

Exemple 6. Posons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Nous allons (un peu) réduire A : soit f l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A.

1. Je détermine d'abord $\ker(f)$; la résolution du système $AX = 0_{\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$ donne : $\ker(f) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.
2. Ensuite, j'étudie l'endomorphisme induit par f sur $\ker(f)^\perp$, qui est le plan de vecteur normal $U_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire le plan d'équation $-x+y+z=0$. Une base de ce plan est $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$; mais je vais privilégier une base orthonormée, de sorte à pouvoir utiliser le fait que f soit de matrice antisymétrique dans une base orthonormée. L'algorithme de Gram-Schmidt permet d'obtenir cette

base orthonormée de $\ker(f)^\perp$:

$$(U_2, U_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

Pour déterminer la matrice de l'endomorphisme induit par f sur $\ker(f)^\perp$ relativement à cette base, exprimons $f(U_2)$ et $f(U_3)$ en fonction de U_2 et U_3 :

$$f(U_2) = AU_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \sqrt{3}U_3, \quad \text{et :} \quad f(U_3) = AU_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = -\sqrt{3}U_2,$$

donc dans la base (U_2, U_3), la matrice de l'endomorphisme induit par f sur $\ker(f)^\perp$ est : $M = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$ (en vérité, en utilisant le fait que M soit antisymétrique d'ordre 2, on savait déjà qu'elle serait de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$: il n'y a donc aucune surprise à trouver $f(U_2)$ proportionnel à U_3, et le calcul de $f(U_3)$ est rendu inutile par l'antisymétrie).

3. Concluons. La concaténation des bases : $\mathcal{B} = (U_1, U_2, U_3)$, est une base de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ du fait que $\ker(f) \oplus \ker(f)^\perp = \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ (elle n'est pas orthonormée à cause du premier vecteur, mais ce n'est pas grave). On a $f(U_1) = 0_{\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$ car $U_1 \in \ker(f)$, et l'étude du point précédent démontre que dans la base $\mathcal{B}$, la matrice de f est : $\begin{pmatrix} 0 & 0_{\mathrm{M}_{1,2}(\mathbb{R})} \\ 0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})} & M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$. Or A est la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}_c$. Par conséquent, si l'on pose $P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{B})$, alors la formule du changement de base implique :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(f) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_c) \iff A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

On a réduit A.

On peut montrer que $\chi_A = X(X^2+3)$ très facilement en passant par la matrice réduite ci-dessus ; il n'est pas scindé, donc A n'est pas diagonalisable (ni trigonalisable) sur $\mathbb{R}$, et la réduction proposée est la meilleure possible (sauf si l'on va dans $\mathbb{C}$).

Cet exemple est un cas simplifié de l'exercice suivant, qui n'est finalement qu'une formalisation matricielle du conseil ci-dessus :

Exercice 18. Soit f un endomorphisme antisymétrique de E. On admet que sa matrice dans toute base orthonormée est antisymétrique : voir l'exercice 17 ci-dessus. ← page 12

1. On suppose dans cette question que f est *bijective*. Soit M sa matrice dans une base orthonormée. En simplifiant $\det(M^\top)$ de deux façons différentes, montrer que la dimension de E est un entier pair.
2. On ne suppose plus que f est bijective. Avec la question précédente et la décomposition $E = \ker(f) \oplus \ker(f)^\perp$, montrer que la dimension de $\ker(f)^\perp$ est un entier pair.
3. En déduire que le rang d'un endomorphisme antisymétrique est toujours un entier pair.
4. Montrer que toute matrice antisymétrique M est semblable à une matrice de la forme (par blocs) $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & N \end{pmatrix}$, où N est une matrice antisymétrique, *inversible*, et de taille paire.

Il reste alors à réduire N pour réduire M.

Culture scientifique. Le contenu de cette section se généraliserait à tout endomorphisme dont la matrice, dans une base orthonormée quelconque, commute avec sa transposée. Un tel endomorphisme est dit *normal.* Les endomorphismes symétriques et antisymétriques, et les isométries, sont des cas particuliers d'endomorphismes normaux.

Exercice 19. Démontrer les affirmations de la dernière phrase.

En voici un cas particulier.

Exercice 20. Soit M une matrice réelle d'ordre 3 telle que : $M^\top M = MM^\top$. On note f l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à M, et g l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à $M^\top$.

1. Montrer que f admet au moins une valeur propre réelle λ (*penser à ce qu'on a établi dans le cours pour la classification des isométries de l'espace*). On pose $E_\lambda = \ker(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$.
2. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $(X, Y) \in (\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R}))^2$, on a : $\langle f(X), Y \rangle = \langle X, g(Y) \rangle$.
3. En déduire que si F est stable par f, alors $F^\perp$ est stable par g (et inversement).
4. Grâce au fait que f et g commutent, montrer que E_λ est stable par g, puis que $E_\lambda^\perp$ est stable par f et g.
5. On suppose que $\dim(E_\lambda) = 2$. Montrer que M est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ dans une base orthonormée.
6. On suppose à présent que $\dim(E_\lambda) = 1$. Si on note $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matrice de l'endomorphisme induit $f_{E_\lambda^\perp}$ dans une base **orthonormée** $\mathcal{B}$ de $E_\lambda^\perp$, montrer que : $\mathrm{M}_\mathcal{B}\left(g_{E_\lambda^\perp}\right) = N^\top$, où $g_{E_\lambda^\perp}$ est l'endomorphisme induit par g sur $E_\lambda^\perp$ (*utiliser la question 2*).
7. Résoudre $N^\top N = NN^\top$, et en déduire que M est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et que dans le premier cas on peut trouver une base orthonormée de vecteurs propres.

Table des matières