MÉTHODES – Espaces préhilbertiens et euclidiens

✓ Produit scalaire, et norme euclidienne

1 ✓ Montrer qu'une application est un produit scalaire

Nous nous attardons **uniquement** sur le caractère défini, mais les autres propriétés sont aussi à savoir démontrer.

1.1 ✓ Produits scalaires sur $\mathbb{R}^n$: somme de carrés et produits

Ils sont souvent définis concrètement :

$$\varphi_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ ((x_1, y_1), (x_2, x_2)) & \mapsto & x_1 x_2 + 2y_1 y_2 - x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{cases},$$

$$\varphi_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ ((x_1, y_1), (x_2, x_2)) & \mapsto & 12x_1 x_2 + x_2 y_1 + x_1 y_2 + 9y_1 y_2 \end{cases}.$$

S'ils sont définis abstraitement, alors il y a fort à parier qu'ils sont définis à partir d'un endomorphisme autoadjoint, et dans ce cas ses valeurs propres sont nécessaires pour montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire : nous n'en parlerons pas ici, et vous renvoyons à la section *Utilisation des endomorphismes autoadjoints* pour les détails.

Montrer la bilinéarité est une affaire de routine. Pour la symétrie, faites bien attention : il faut que le coefficient en facteur de $x_1 y_2$ (par exemple) soit le même que celui en facteur de $x_2 y_1$, et de même s'il y a d'autres termes « croisés » (ce qui n'est pas le cas sur $\mathbb{R}^2$). Par exemple, l'application :

$$\psi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ ((x_1, y_1), (x_2, x_2)) & \mapsto & 3x_1 x_2 - 2y_1 y_2 + 2x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{cases}$$

n'est pas bilinéaire, puisque par exemple : $\psi((1{,}0), (0{,}1)) = 2$, alors que $\psi((0{,}1), (1{,}0)) = -1$, si bien que $\psi((1{,}0), (0{,}1)) \neq \psi((0{,}1), (1{,}0))$.

Mais la vraie difficulté est pour la positivité et le caractère défini, qui se traitent à peu près en même temps. Pour cela, vous utilisez le résultat suivant, **à citer tel quel quand vous en avez besoin** :

Une somme de réels positifs est nulle si et seulement si chaque terme de la somme est nul.

Cela tombe bien : quand vous évaluez ces formes bilinéaires en deux fois le même vecteur, il apparaît une somme de carrés, qui sont donc positifs. Mais le problème est qu'il y a d'autres termes dont on ne connaît pas le signe ! Par exemple, pour φ_1 définie ci-dessus :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi_1((x, y), (x, y)) = x^2 + 2y^2 - 2xy.$$

On ne connaît pas le signe de x et de y, donc on ne connaît pas le signe de $-2xy$. On ne peut pas en déduire que chaque terme est nul.

La méthode pour y remédier est : ajouter et enlever un carré convenable pour pouvoir « éliminer » le terme problématique en reconnaissant une identité remarquable :

$$ax^2 + bxy = a\left(x^2 + \frac{b}{a}xy\right) = a\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}xy + \left(\frac{by}{2a}\right)^2 - \left(\frac{by}{2a}\right)^2\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}y\right)^2 - \frac{b^2 y^2}{4a}.$$

Il n'y a plus le terme problématique bxy : il n'y a plus que des carrés, dont on connaît le signe. On recommence au besoin (si on n'est pas sur $\mathbb{R}^2$) jusqu'à n'avoir plus que des carrés.

Exemple 1. Montrons que φ_1, définie ci-dessus, est définie positive. Appliquer cette méthode donne :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi_1((x,y),(x,y)) = x^2 - 2xy + 2y^2 = x^2 - 2xy + y^2 + y^2 = (x+y)^2 + y^2 \geqslant 0,$$

donc φ_1 est positive. De plus, une somme de termes **positifs** est nulle si et seulement si chaque terme est nul, donc l'égalité $\varphi_1((x,y),(x,y)) = 0$ implique $(x+y)^2 = 0$ et $y^2 = 0$. De là on déduit immédiatement $x = y = 0$, donc $\varphi_1((x,y),(x,y)) = 0$ si et seulement si $(x,y) = (0,0)$. L'application φ_1 est définie positive, en plus d'être une forme bilinéaire symétrique : c'est donc un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 1. Montrer de même que φ_2 est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

1.2 ✓ Produits scalaires sur $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Les produits scalaires sur $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sont toujours, implicitement ou non, de la forme :

$$(X,Y) \mapsto X^\top AY$$

avec A une matrice symétrique. Voir *Utilisation des endomorphismes autoadjoints* pour en savoir plus.

Si vous devez montrer que c'est un produit scalaire **avec n petit et A explicite**, alors la méthode est la même que pour les produits scalaires sur $\mathbb{R}^n$, car tout produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ peut être écrit sous la forme $X^\top AY$ quitte à identifier $\mathbb{R}^n$ et $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, alors pour tous $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$:

$$X^\top AY = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ay_1 + by_2 \\ by_1 + cy_2 \end{pmatrix} = ax_1y_1 + b\left(x_1y_2 + x_2y_1\right) + cx_2y_2.$$

Faites le calcul vous-mêmes pour vous en convaincre. Comme pour les produits scalaires sur $\mathbb{R}^n$, on démontre le caractère défini en faisant apparaître une somme de carrés.

En revanche, si ce n'est pas explicite, il y a deux complications :

— **la symétrie** : elle n'est vraie que si A est symétrique, et pour la justifier sans calcul vous suivez cette démarche : comme $X^\top AY$ est une matrice d'ordre 1 (identifiée à un réel), elle est nécessairement symétrique (on a $(a)^\top = (a)$ pour tout $(a) \in \mathrm{M}_1(\mathbb{R})$), donc :

$$X^\top AY = \left(X^\top AY\right)^\top = Y^\top A^\top \left(X^\top\right)^\top \overset{[A \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})]}{=} Y^\top AX,$$

donc $(X,Y) \mapsto X^\top AY$ est symétrique ;

— **la positivité et le caractère défini** : en général, c'est lié à un problème de valeurs propres, comme nous le disons ci-dessous ; mais sinon, ne perdez pas de vue que $X^\top AX$ *est le produit scalaire usuel de X par AX* : selon les hypothèses, vous pourrez peut-être le simplifier ou voir à quelle condition sur X il est nul.

Nous parlons plus en détails des produits scalaires sur $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dans la section *Utilisation des endomorphismes autoadjoints* : $(X,Y) \mapsto X^\top AY$ est un produit scalaire si et seulement si A est symétrique et définie positive. **C'est un exercice très important**. C'est votre principal recours si A est définie abstraitement.

1.3 ✓ Cas particulier fréquent dans les espaces de fonctions

Les produits scalaires sur les espaces de fonctions sont souvent définis avec une intégrale :

$$(f,g) \mapsto \int_I fg.$$

Lorsque les fonctions ont une régularité (classe C^1), voire lorsqu'elles vérifient une équation différentielle, on peut privilégier des intégrales où apparaissent leurs dérivées :

$$\varphi_1 : \begin{cases} \mathrm{C}^1([0,1]) \times \mathrm{C}^1([0,1]) & \to & \mathbb{R} \\ (f,g) & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 (fg + f'g') \end{cases}, \quad \varphi_2 : \begin{cases} \mathrm{C}^1([0,1]) \times \mathrm{C}^1([0,1]) & \to & \mathbb{R} \\ (f,g) & \mapsto & f(0)g(0) + \displaystyle\int_0^1 f'g' \end{cases}.$$

Le caractère défini se démontre semblablement dans tous les cas : on se retrouve avec une fonction (ou une somme de fonctions) à valeurs réelles et au carré. Elle est donc positive. Si une fonction **positive** et **continue** est **d'intégrale nulle**, alors elle est elle-même nulle par séparation de l'intégrale.

Citez très soigneusement ces hypothèses, on vous note PRÉCISÉMENT là-dessus !

Si ce n'est pas f qu'on intègre mais f', f'', etc., alors la continuité de ces dérivées découle de la classe de f : la vérifier soigneusement. Si vous en déduisez que $f' = 0$ ou $f'' = 0$ par exemple, ce n'est pas encore suffisant pour conclure : intégrez ces relations pour en arriver à f, *sans oublier les constantes d'intégration*, et utilisez les autres quantités du produit scalaire pour en déduire que $f = 0$.

Exercice 2. Montrer que les deux applications ci-dessus sont des produits scalaires.

Si ces produits scalaires sont définis sur $\mathbb{R}[X]$ ou $\mathbb{R}_n[X]$, **on n'oublie pas de passer des applications polynomiales aux polynômes** : le fait que $P(x) = 0$ pour tout $x \in I$ signifie que x est une racine de P pour tout $x \in I$. Cela fournit une infinité de racines de P, donc $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$. **Cette étape n'est pas facultative**.

1.4 ✓ Produits scalaires dans $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}[X]$: raisonnements sur les racines

Outre le cas des produits scalaires avec intégrales (voir ci-dessus), vous aurez souvent à étudier des produits scalaires sur $\mathbb{R}[X]$ ou $\mathbb{R}_n[X]$ qui s'obtiennent en sommant différentes évaluations des polynômes, ou de leurs dérivées successives. Exemples :

$$\varphi_1 : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R} \\ (P,Q) & \mapsto & \sum\limits_{i=0}^{n} P(i)Q(i) \end{cases}, \quad \varphi_2 : \begin{cases} \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R} \\ (P,Q) & \mapsto & \sum\limits_{i=0}^{+\infty} P^{(i)}(2)Q^{(i)}(2) \end{cases},$$

$$\varphi_3 : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R} \\ (P,Q) & \mapsto & P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P(1)Q(1) \end{cases}.$$

Quand les produits scalaires sont définis à l'aide des dérivées successives, il n'est pas rare d'avoir une somme infinie : il n'y a pourtant aucun problème de convergence, car les dérivées sont nulles à partir d'un certain rang et la somme est en vérité finie.

Pour démontrer le caractère défini, on utilise d'abord le fait qu'une somme de termes positifs soit nulle si et seulement si chaque terme est nul, nous ramenant à plusieurs égalités de la forme : $P^{(k)}(a) = 0$. Ces égalités permettent d'invoquer trois résultats essentiels sur les racines :

— $P(a) = 0$ si et seulement si a est racine de P ;

— plus généralement, $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(k)}(a) = 0$ si et seulement si a est racine de P d'ordre de multiplicité au moins $k + 1$ (et non k, attention : regardez pour $k = 1$ ce que cela donnerait) ;

— seul le polynôme nul a strictement plus de racines (comptées avec multiplicités) que son degré ;

La connaissance du degré des polynômes est essentielle. Si l'on est sur $\mathbb{R}[X]$ au lieu de $\mathbb{R}_n[X]$, on n'a pas de borne sur le degré. Néanmoins, dans ces cas-là, nous arrivons souvent à démontrer qu'il existe une infinité de racines (ou une racine d'ordre arbitrairement élevé), ce qui permet à coup sûr de dépasser le degré.

Exercice 3. Montrer que les trois applications proposées ci-dessus sont des produits scalaires. Raisonnez sur les racines y compris pour φ_3, ou vous ne tirerez aucun enseignement de l'exercice.

En revanche, vous OUBLIEZ cette méthode lorsque les évaluations des dérivées de P n'ont pas de rapport avec les évaluations de P. Par exemple, pour vérifier le caractère défini du produit scalaire défini sur $\mathbb{R}_1[X]$ par $(P,Q) \mapsto P(0)Q(0) + P'(1)Q'(1)$, le fait $P'(1) = 0$ n'apporterait AUCUNE information sur les racines de P, et certainement pas le fait que 1 soit racine de P (certes, cela nous dit que 1 est racine de P', mais cela n'implique pas que c'est une racine de P). Plus généralement, pour que l'information $P^{(k)}(a) = 0$ ait une influence sur les racines, il faut AUSSI $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(k-1)}(a) = 0$!
Dans ce cas-là, vous devez utiliser d'autres choses sur $P^{(k)}$: son degré, son coefficient dominant ou constant, etc.

Exercice 4. Les méthodes de la section ne s'appliquent pas à l'application $(P,Q) \mapsto \sum\limits_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(k)Q^{(k)}(k)$ (chaque dérivée successive est évaluée en un autre réel). Démontrer malgré tout le caractère défini en explicitant le terme de la somme correspondant à $k = \deg(P)$ (si P est un polynôme non nul).

2 ✓ Calculs de produits scalaires et (surtout) de normes euclidiennes

Dans cette section je ne parle pas de calculs « savants » avec les normes euclidiennes :

— pour les inégalités entre normes et produits scalaires, voir section 3 ; → page 6

— pour le calcul des normes impliquées dans les calculs de distance, voir section *Minimisation de distance*.

Pour les inégalités sur les normes utilisant des endomorphismes autoadjoints ou antisymétriques, vous tirerez plus d'enseignements des sections *L'importance des bases orthonormées* et *Utilisation des endomorphismes autoadjoints*. Ici je ne parle que :

— des conseils généraux sur les calculs ;

— des calculs de normes dans $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (avec $X^\top Y$) ou $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ (avec $\mathrm{tr}(A^\top B)$) ;

— des inégalités basiques sur les normes (valant pour tous vecteurs, sans trop d'hypothèses).

Lorsqu'on nous demande de calculer une norme, nous vous recommandons de plutôt calculer **la norme au carré**. C'est plus pratique afin d'utiliser :

— les identités remarquables suivantes :

$$\|\vec{x} \pm \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 \pm 2\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle + \|\vec{y}\|^2, \quad \|\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}\|^2 = \alpha^2\|\vec{x}\|^2 + 2\alpha\beta\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle + \beta^2\|\vec{y}\|^2;$$

— le théorème de Pythagore s'il y a des relations d'orthogonalité : **parfois, un dessin vous fera réaliser des relations d'orthogonalité que vous n'aviez pas aperçues**.

Le seul cas où je vous *déconseille* cette élévation au carré est lorsque *vous avez à majorer la norme d'une somme de nombreux vecteurs*. Dans ce cas, même avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz, majorer les produits scalaires apparaissant dans le développement est pénible, alors qu'avec l'inégalité triangulaire c'est immédiat.

Exercice 5. Montrer :

$$\forall(\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}) \in E^4, \quad \|\vec{b}-\vec{a}\|^2 + \|\vec{c}-\vec{b}\|^2 + \|\vec{d}-\vec{c}\|^2 + \|\vec{a}-\vec{d}\|^2 = \|\vec{c}-\vec{a}\|^2 + \|\vec{d}-\vec{b}\|^2 + \|\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}-\vec{d}\|^2.$$

2.1 ✓ Produit scalaire et norme euclidienne sur $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$

Pour la norme euclidienne sur $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, je veux simplement attirer l'attention sur le fait que... Souvent vous ne la reconnaissez pas. Et c'est ainsi que vous bloquez bêtement dès que vous êtes en présence d'un produit matriciel tel que $X^\top Y$ ou $X^\top X$.

On a tout simplement $X^\top Y = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$ et $X^\top X = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$: c'est le même produit scalaire que sur $\mathbb{R}^n$!

Souvent dans ces cas-là, après avoir simplifié du mieux possible en développant : *il n'y a pas d'autre choix que d'écrire explicitement les coordonnées pour poursuivre.*

Les calculs de normes sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ sont plus subtils. Pour rappel, il y a deux façons d'écrire le produit scalaire et la norme euclidienne usuels :

	Version abstraite	Version concrète
$\langle A, B\rangle$	$\operatorname{tr}(A^\top B)$	$\sum\limits_{i=1}^n \sum\limits_{j=1}^n a_{i,j} b_{i,j}$
$\lVert A\rVert^2$	$\operatorname{tr}(A^\top A)$	$\sum\limits_{i=1}^n \sum\limits_{j=1}^n (a_{i,j})^2$

Comme on le voit, ils ont une expression explicite très proche du produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$: c'est simplement la somme des produits des coefficients !

Vous allez privilégier la « version concrète » pour le calcul **explicite** (matrices dont on connaît les coefficients), et la « version abstraite » pour des matrices **dont la transposée vérifie des propriétés spéciales**. En particulier :

— si A est symétrique ou antisymétrique (vu que $A^\top = \pm A$ dans ce cas) ;

— si A est orthogonale (vu que $A^\top = A^{-1}$ dans ce cas).

Plus particulièrement dans le cas **symétrique**, vous pouvez de plus simplifier le calcul **en vous souvenant que** $A = PDP^{-1}$ **avec** D **diagonale et** P **orthogonale**. C'est le théorème spectral.

Exemple 2. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{pmatrix}$, alors :

$$\lVert A\rVert^2 = 1^2+(-2)^2+3^2+(-4)^2+5^2+(-6)^2+7^2+(-8)^2+9^2 = \sum_{k=1}^{9} k^2 = \frac{9\cdot 10\cdot 19}{6} = 3\cdot 5\cdot 19 = 15\cdot 19 = 285.$$

Cela se fait de tête : $15 \cdot 19 = 15 \cdot 20 - 15$. Vous auriez bien sûr songé à simplifier la fraction avant de multiplier comme des cochons, n'est-ce pas ? Remarquez que je ne m'embête pas à calculer $A^\top A$ puis sa trace.

Mise en garde 1. Lorsque vous faites du calcul de produits scalaires ou de normes avec des matrices explicites :

NE CALCULEZ PAS $A^\top B$ OU $A^\top A$ POUR EN PRENDRE ENSUITE LA TRACE ! VOUS PERDEZ DU TEMPS !

Perte de temps d'autant plus bête que vous calculez n^2 coefficients pour finalement n'en retenir que n.

2.2 ✓ Inégalités basiques sur les normes

Lorsque vous devez démontrer une inégalité avec des normes, souvent :

— soit vous avez **un produit de normes dans le majorant** : songez à l'inégalité de Cauchy-Schwarz ;

— soit vous avez **une somme de normes, ou une norme de sommes** : songez à l'inégalité triangulaire.

Si vous n'êtes pas dans ces cas-là, essayez de développer une norme au carré pour faire apparaître des simplifications. Les produits scalaires qui apparaissent dans le développement s'encadrent avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz (**pas systématiquement** : analysez prudemment, au brouillon, par quoi vous devez majorer ces produits scalaires, pour voir s'il n'y a pas une autre approche plus maligne).

S'il apparaît également un endomorphisme dans l'inégalité (isométrie, projecteur orthogonal, etc.), les conseils de la page 9 (*Quand penser à l'inégalité de Cauchy-Schwarz : cas abstrait*) restent valables ici. → page 9

Si l'on vous demande de comparer des normes de différences ou sommes, par exemple :

$$\forall(\vec{x},\vec{y},\vec{z}) \in E^3, \quad \|\vec{x}-\vec{z}\| \leqslant \|\vec{x}-\vec{y}\| + \|\vec{y}-\vec{z}\|.$$

Vous aurez souvent besoin de « l'astuce » d'ajouter et soustraire le vecteur qui vous manque dans le membre de gauche, afin de faire apparaître celui de droite. Puis vous utilisez l'inégalité triangulaire. Ainsi :

$$\forall(\vec{x},\vec{y},\vec{z}) \in E^3, \quad \|\vec{x}-\vec{z}\| = \|(\vec{x}-\vec{y}) + (\vec{y}-\vec{z})\| \leqslant \|\vec{x}-\vec{y}\| + \|\vec{y}-\vec{z}\|.$$

Exemple 3. Soit $(\vec{x},\vec{y},\vec{z}) \in E^3$. Nous allons combiner plusieurs des principes plus haut pour démontrer :

$$\|\vec{x}-\vec{z}\|^2 \leqslant 2\left(\|\vec{x}-\vec{y}\|^2 + \|\vec{y}-\vec{z}\|^2\right).$$

Comme plus haut nous allons faire apparaître $\vec{x}-\vec{y}$ et $\vec{y}-\vec{z}$ dans le membre de gauche, puis nous allons développer le carré de la norme à l'aide d'une « identité remarquable ». Notons qu'on veut avoir $\|\vec{x}-\vec{y}\|^2$ et $\|\vec{y}-\vec{z}\|^2$ dans le membre de droite : ce serait donc contre-productif de développer ces deux normes au carré, et nous les laisserons ainsi. Ceci étant dit :

$$\begin{aligned}
\|\vec{x}-\vec{z}\|^2 = \|(\vec{x}-\vec{y}) + (\vec{y}-\vec{z})\|^2 &= \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 + 2\langle \vec{x}-\vec{y}, \vec{y}-\vec{z}\rangle + \|\vec{y}-\vec{z}\|^2 \\
&\leqslant \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 + 2\|\vec{x}-\vec{y}\|\|\vec{y}-\vec{z}\| + \|\vec{y}-\vec{z}\|^2 && \text{(inégalité de Cauchy-Schwarz)} \\
&\leqslant \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 + \left(\|\vec{x}-\vec{y}\|^2 + \|\vec{y}-\vec{z}\|^2\right) + \|\vec{y}-\vec{z}\|^2. && \text{(inégalité } 2ab \leqslant a^2+b^2\text{)}
\end{aligned}$$

L'inégalité $2ab \leqslant a^2+b^2$ se démontre à partir de : $(a-b)^2 \geqslant 0$, et en développant. Il reste à regrouper les termes. Notons qu'on peut aussi démontrer cette inégalité avec l'identité du parallélogramme : comment ?

Exercice 6. Démontrer de même : $\forall(\vec{x},\vec{y}) \in E^2$, $2 + \|\vec{x}+\vec{y}\|^2 \leqslant 2\left(1+\|\vec{x}\|^2\right)\left(1+\|\vec{y}\|^2\right)$.

3 ✓ Reconnaître et utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz

Rappelons l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $\forall(\vec{x},\vec{y}) \in E^2$, $|\langle\vec{x},\vec{y}\rangle| \leqslant \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$. Dans le cas de $\mathbb{R}^n$ et des espaces de fonctions, cela donne :

$$\forall(a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{R}^n,\ \forall(b_1,\ldots,b_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \left|\sum_{i=1}^n a_i b_i\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2}, \tag{1}$$

$$\forall f,g \in \mathrm{L}^2(I,\mathbb{R}) \cap \mathrm{C}^0(I,\mathbb{R}), \quad \left|\int_I fg\right| \leqslant \sqrt{\int_I f^2 \int_I g^2}. \tag{2}$$

On note que dans chacun des cas, il apparaît un carré dans la définition des normes, et donc dans le majorant de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Cela va nous aider à savoir quand la reconnaître dans un exercice, et comment déterminer les deux vecteurs à utiliser.

3.1 Quand penser à l'inégalité de Cauchy-Schwarz : cas concret

S'il n'apparaît pas explicitement des normes ou produits scalaires, on y pense **lorsqu'il apparaît une inégalité entre des sommes ou des intégrales, avec la présence de carrés ou de racines carrées** (à l'intérieur ou à l'extérieur des sommes ou intégrales, peu importe). Dans le cas des matrices, on remplace les sommes ou intégrales par des traces. Alors, pour trouver *comment* l'appliquer :

1. Identifiez le produit scalaire usuel ressemblant le plus aux forces en présence.
2. Dans votre analyse *au brouillon* : comparez ce que vous voulez et ce que vous savez, et « identifiez ».
3. Dans votre synthèse au propre : écrivez l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec les vecteurs trouvés au brouillon.

Un conseil très important pour « l'identification » : ne raisonnez pas sur le produit scalaire (minorant), mais les normes (majorant). Pour une raison très simple : trouver les bons réels x, x' vérifiant $x^2 = y$ et $x'^2 = y'$ est immédiat : on a $x = \pm\sqrt{y}$ et $x' = \pm\sqrt{y'}$. Trouver des réels x, x' vérifiant $xx' = z$ est voué à l'échec : il y a trop de solutions. Or c'est le genre d'identification que vous serez amenés à faire, selon que vous regardiez le minorant ou le majorant.

Exemple 4. On veut montrer que pour tous réels $x_1, \dots, x_n$, on a :

$$\left|\sum_{k=1}^n k^2 x_k^3\right| \leqslant \sqrt{\left(\sum_{k=1}^n k^2 x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n k^2 x_k^4\right)}.$$

Au vu de la majoration à démontrer, il ne fait aucun doute qu'il s'agit d'utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec des vecteurs $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$ et $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)$ de $\mathbb{R}^n$, mais lesquels ? Il faudrait $a_k b_k = k^2 x_k^3$, mais il y a plein de façons de définir a_k et b_k pour que cette égalité soit vérifiée : prend-on $(a_k, b_k) = (k^2 x_k, x_k^2)$? ou $(a_k, b_k) = (kx_k, kx_k)$? ou $(a_k, b_k) = (x_k^2, k^2 x_k)$? Et je suis loin d'embrasser toutes les possibilités.

En revanche, si l'on regarde les normes, on voit qu'il n'y a pas ambiguïté : on voudrait (1) avec $a_k^2 = k^2 x_k^2$ et $b_k^2 = k^2 x_k^4$. Cela incite à prendre $a_k = kx_k$ et $b_k = kx_k^2$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Vérifions ce que donne l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans ce cas :

$$\left|\sum_{k=1}^n a_k b_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2 \sum_{k=1}^n b_k^2} \iff \left|\sum_{k=1}^n kx_k \cdot kx_k^2\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^n k^2 x_k^2 \sum_{k=1}^n k^2 x_k^4} \iff \left|\sum_{k=1}^n k^2 x_k^3\right| \leqslant \sqrt{\left(\sum_{k=1}^n k^2 x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n k^2 x_k^4\right)},$$

d'où le résultat. Voyez comme il est plus facile d'identifier avec le majorant.

Exemple 5. On veut montrer que pour tous réels $x_1, \dots, x_n$ strictement positifs, on a :

$$n^2 \leqslant \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}.$$

On fait la même « identification » que ci-dessus : si cette inégalité est celle de Cauchy-Schwarz avec des vecteurs convenables de $\mathbb{R}^n$, il faudrait $a_i^2 = x_i$ et $b_i^2 = \frac{1}{x_i}$. Ceci conduit au choix naturel $a_i = \sqrt{x_i}$ et $b_i = \sqrt{\frac{1}{x_i}}$ (c'est ici que la positivité intervient). Vérifions :

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 \iff \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{x_i}{x_i}}\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^n (\sqrt{x_i})^2 \sum_{i=1}^n \left(\sqrt{\frac{1}{x_i}}\right)^2 \iff \left(\sum_{i=1}^n 1\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i},$$

et comme $\displaystyle\sum_{i=1}^n 1 = n$ on a le résultat attendu.

Exemple 6. On veut montrer que pour toute fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et positive, on a :

$$\int_0^1 (f(x))^2 \mathrm{d}x \leqslant \sqrt{\int_0^1 f(x)e^x \mathrm{d}x \cdot \int_0^1 f(x)e^{-x} \mathrm{d}x}.$$

Cette fois-ci, la présence de la racine carrée sur un produit d'intégrales fait penser à l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur les espaces de fonctions (inégalité (2)). Mais lesquelles ? Cherchons quelles fonctions φ et ψ (je change les noms pour ne pas avoir de doublon avec f) donneraient : $\displaystyle\int_0^1 f(x)e^x \mathrm{d}x = \int_0^1 (\varphi(x))^2 \mathrm{d}x$, et : $\displaystyle\int_0^1 f(x)e^{-x} \mathrm{d}x = \int_0^1 (\psi(x))^2 \mathrm{d}x$. Il semble que des choix naturels seraient $\varphi(x)^2 = f(x)e^x$ et $\psi(x)^2 = f(x)e^{-x}$. Posons donc :

$$\forall x \in [0,1], \quad \varphi(x) = \sqrt{f(x)}e^{x/2}, \quad \psi(x) = \sqrt{f(x)}e^{-x/2}, \quad \text{(c'est ici qu'apparaît la positivité de } f\text{)}$$

Ce sont bien des fonctions continues sur [0,1]. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\left|\int_0^1 \varphi(x)\psi(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \sqrt{\int_0^1 (\varphi(x))^2\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 (\psi(x))^2\mathrm{d}x} \iff \int_0^1 f(x)\cancel{e^{x/2}} f(x)\cancel{e^{-x/2}}\mathrm{d}x \leqslant \sqrt{\int_0^1 f(x)e^x\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 f(x)e^{-x}\mathrm{d}x},$$

d'où le résultat.

Mise en garde 2. Ces identifications ne sont pas rigoureuses DU TOUT et fausses en général. C'est pour trouver des idées AU BROUILLON que vous les écrivez, mais elles ne figurent pas dans une copie.

Et s'il n'apparaît qu'une seule norme ? Souvent il n'apparaît qu'une seule norme dans le majorant, parce que l'autre norme a déjà été simplifiée dans l'énoncé. À moins que vous n'ayez du flair, voici comment procéder :

1. En inspectant la norme dans le majorant, vous trouvez l'un des deux vecteurs à utiliser (disons $\vec{x}$).
2. Pour trouver l'autre vecteur, demandez-vous : quel vecteur donne un produit scalaire avec $\vec{x}$ égal au minorant ?

Nous donnons deux exemples.

Exemple 7. On veut montrer que pour tous réels $x_1, \ldots, x_n$, on a :

$$\left(\sum_{k=1}^n kx_k\right)^2 \leqslant \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\sum_{k=1}^n x_k^2.$$

On peut effectivement penser à l'inégalité de Cauchy-Schwarz : c'est une inégalité entre sommes avec présence de carrés. Mais il n'apparaît *a priori* qu'une seule somme, donc une seule norme, dans le majorant. Pas grave : notons $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, et voyons quel vecteur $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ donnerait $\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle = \sum\limits_{k=1}^n kx_k$. Comme $\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle = \sum\limits_{k=1}^n x_k y_k$, un choix naturel serait : $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $y_k = k$. Vérifions que ce choix de $\vec{y}$ fonctionne :

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k y_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^n x_k^2 \sum_{k=1}^n y_k^2 \iff \left(\sum_{k=1}^n kx_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^n x_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n k^2,$$

et on sait que : $\displaystyle\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, d'où le résultat.

Exemple 8. On veut montrer que pour toute fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, on a :

$$\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_0^1 (f(x))^2\mathrm{d}x.$$

On a une inégalité entre intégrales et la présence de carrés. Mieux, on note que pour le produit scalaire $(f,g) \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x$, le membre de droite est égal à $\|f\|^2$; le majorant fait apparaître une norme, et le minorant une quantité ressemblant au produit scalaire, au carré : on peut donc espérer qu'il s'agit de l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à de bonnes fonctions.

On va l'appliquer avec f et une autre fonction à déterminer ; pour déterminer laquelle, je me demande : comment trouver g de sorte que $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$? Vu que $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x$, un choix naturel serait pour g la fonction constante égale à 1.

Vérifions : si l'on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec f et $g = 1$, on obtient : $(\langle f,1\rangle)^2 \leqslant \|1\|^2\|f\|^2$. Or : $\|1\|^2 = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x = 1$, et comme prévu : $\langle f,1\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$. On obtient donc bien $\left(\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \displaystyle\int_0^1 (f(x))^2\mathrm{d}x$ et c'est ce qu'on voulait démontrer.

Même si ce n'est pas demandé : le cas d'égalité est obtenu si f et 1 sont linéairement dépendantes, c'est-à-dire si et seulement si f est constante.

Dans le cas particulier des fonctions, s'il apparaît un intégrande dans le membre de droite qui n'a RIEN À VOIR avec le membre de gauche, alors il faut probablement faire une opération préalable sur l'intégrale, pour faire apparaître l'intégrande du membre de droite, avant de lui appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz : intégration par parties ou formule du changement de variable.

Exercice 7. Soit f une application de classe C^1 sur $[0,1]$ et à valeurs réelles. On suppose : $f(1) = 0$. Montrer :

$$\left(\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \frac{1}{3}\int_0^1 \left(f'(t)\right)^2 \mathrm{d}t.$$

On est bien dans le cadre d'application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, avec $\|f'\|$ qui apparaît dans le membre de droite, le produit scalaire $\langle f,1\rangle$ dans le membre de gauche... Mais comme on le voit, appliquer cette inégalité, avec f ou f', ne donne pas du tout le résultat attendu. Demandez-vous donc : comment « passer » de f à f' ?

3.2 Quand penser à l'inégalité de Cauchy-Schwarz : cas abstrait

Une situation où vous pouvez y songer est **lorsqu'on vous demande de majorer un produit scalaire de deux vecteurs dont on connaît les normes**, grâce aux données du problème (vecteurs unitaires, isométries, projecteurs orthogonaux...).

À cet égard, souvenez-vous de l'effet des endomorphismes remarquables du chapitre sur les normes :

— les projections orthogonales diminuent la norme : $\|p(\vec{x})\| \leqslant \|\vec{x}\|$ (inégalité de Bessel) ;

— les symétries orthogonales et les isométries plus généralement conservent la norme : $\|f(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|$;

— les normes avec les endomorphismes autoadjoints s'écrivent à l'aide de leurs valeurs propres grâce au théorème spectral (section *Utilisation des endomorphismes autoadjoints*).

Ce dernier point n'est intéressant que si l'on a des informations sur le spectre, ou si l'on veut faire apparaître une quantité dépendant des valeurs propres (trace, déterminant, autre produit scalaire avec l'endomorphisme...).

On pourrait aussi recycler le conseil du cas « concret » : songer à l'utiliser lorsqu'on voit apparaître un produit de normes comme majorant. Mais souvent l'énoncé de l'exercice a déjà simplifié une ou deux de ces normes grâce aux hypothèses (vecteurs unitaires en général). Vous ne les reconnaîtrez donc pas clairement.

Exemple 9. Soit p un projecteur orthogonal d'un espace euclidien $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Nous voulons montrer que pour tout vecteur $\vec{x} \in E$ **unitaire**, on a :

$$|\langle\vec{x}, p(\vec{x})\rangle| \leqslant 1.$$

Puisqu'il s'agit de majorer le produit scalaire de vecteurs dont on connaît les normes ($\vec{x}$ est unitaire, et l'inégalité de Bessel permet de majorer $\|p(\vec{x})\|$), **on est dans le cadre d'application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz**. En le faisant, on obtient :

$$|\,\langle\vec{x}, p(\vec{x})\rangle\,| \leqslant \|\vec{x}\| \cdot \|p(\vec{x})\|.$$

On a par hypothèse $\|\vec{x}\| = 1$, et d'après l'inégalité de Bessel on a $\|p(\vec{x})\| \leqslant \|\vec{x}\| = 1$, d'où le résultat.

On sait aussi à quel condition il y a égalité : d'abord, il faut que l'inégalité de Bessel soit dans le cas d'égalité, et c'est vrai uniquement si $\vec{x} \in \mathrm{im}(p)$. Dans ce cas-là, on a $p(\vec{x}) = \vec{x}$ et donc $\langle\vec{x}, p(\vec{x})\rangle = \|\vec{x}\|^2 = 1$.

Parfois, le produit scalaire est « déguisé ». C'est le cas en particulier lorsqu'il apparaît un endomorphisme (anti)symétrique : le fait que le f dans le produit scalaire puisse « changer de place » permet alors de transformer un produit scalaire en norme (ou inversement). C'est le cas dans l'exercice ci-dessous.

Exercice 8. Soit f un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

1. Montrer que pour tout vecteur $\vec{x} \in E$ **unitaire**, on a : $\|f(\vec{x})\|^2 \leqslant \|f^2(\vec{x})\|$.
2. Montrer que l'égalité est vérifiée si et seulement si $\vec{x}$ est un vecteur propre de f (*subtil*).

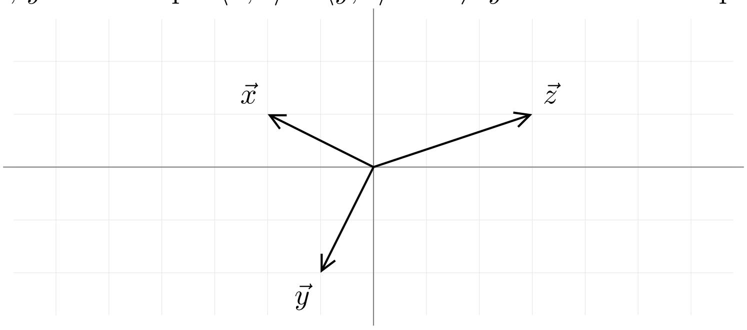
4 Comment passer de $\langle \vec{x}, \vec{z} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle$ à $\vec{x} = \vec{y}$

Mise en garde 3. Ne me faites pas dire ce que je n'ai pas dit. Il est important d'insister là-dessus :

> En toute généralité, l'implication $\langle \vec{x}, \vec{z} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle \Rightarrow \vec{x} = \vec{y}$ est FAUSSE et ABOMINABLE.

On ne peut pas « identifier » dans un produit scalaire ! C'est évident : si $\vec{x}$, $\vec{y}$ et $\vec{z}$ sont pris de même norme (pour simplifier), alors l'égalité $\langle \vec{x}, \vec{z} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle$ signifie simplement que l'angle entre $\vec{x}$ et $\vec{z}$ est le même que l'angle entre $\vec{y}$ et $\vec{z}$. Situation extrêmement banale, qu'on rencontre aisément avec $\vec{x}$ et $\vec{y}$ distincts.

Figure 1 – Vecteurs $\vec{x}$, $\vec{y}$ et $\vec{z}$ tels que $\langle \vec{x}, \vec{z} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle$ et $\vec{x} \neq \vec{y}$. Faites le calcul pour vous en convaincre.



L'objectif de cette section est de discuter des situations où on *peut* tout de même déduire une égalité entre vecteurs à partir d'une égalité entre produits scalaires, et comment l'obtenir RIGOUREUSEMENT :

> Comment déduire des égalités entre VECTEURS en partant d'égalités entre PRODUITS SCALAIRES ?

Pour cela, il faut que $\langle \vec{x}, \vec{z} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle$ soit vraie **pour suffisamment de vecteurs** $\vec{z}$. Mettons-nous dans le cas favorable, et le plus fréquent, où l'égalité $\langle \vec{x}, \vec{z} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle$ est vraie pour TOUT $\vec{z} \in E$. Alors :

1. Pour tout $\vec{z} \in E$, on a : $\langle \vec{x} - \vec{y}, \vec{z} \rangle = 0$.
2. C'est en particulier le cas pour $\vec{z} = \vec{x} - \vec{y}$, donc $\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = 0$.
3. Par propriété de séparation de la norme, on a donc $\vec{x} - \vec{y} = \vec{0}$, puis $\vec{x} = \vec{y}$.

Ou, plus rapidement : si $\langle \vec{x} - \vec{y}, \vec{z} \rangle = 0$ pour tout $\vec{z} \in E$, alors $\vec{x} - \vec{y} \in E^{\perp} = \{\vec{0}\}$, donc $\vec{x} - \vec{y} = \vec{0}$ puis $\vec{x} = \vec{y}$.

À noter que si vous ne savez pas si cette égalité est vraie pour tout $\vec{z} \in E$, c'est malgré tout suffisant dans les deux cas suivants :

— $\langle \vec{x}, \vec{e_i} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{e_i} \rangle$ pour tout vecteur $\vec{e_i}$ d'une base de E (et même d'une famille génératrice) : on sait en effet que $\vec{x} - \vec{y}$ est dans l'orthogonal d'un espace si et seulement s'il est orthogonal à tout vecteur d'une de ses bases, ce qui permet de reprendre le raisonnement ci-dessus ;

— si l'on sait que $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont dans un même sous-espace bien connu F, et que $\langle \vec{x}, \vec{z} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle$ pour tout $\vec{z} \in F$, alors c'est suffisant : on peut toujours poser $\vec{z} = \vec{x} - \vec{y} \in F$ pour conclure.

Le deuxième cas de figure est extrêmement rare.

4.1 Cas particulier fréquent : montrer qu'une application est linéaire, est nulle, est une homothétie, etc.

Imaginons que nous ayons une application définie de E dans E, et dont nous ne connaissons pas explicitement sa correspondance, **mais vérifiant une certaine propriété impliquant un produit scalaire**. Nous avons deux exemples de telles applications dans le cours : les endomorphismes autoadjoints et les isométries (je mentionne aussi les endomorphismes antisymétriques dans la section *Utilisation des endomorphismes autoadjoints*.

On peut nous demander alors de démontrer que f est linéaire (ce n'est qu'un exemple parmi d'autres), si ce n'est pas déjà établi, c'est-à-dire :

$$\forall(\vec{x},\vec{y})\in E^2,\ \forall\lambda\in\mathbb{R},\quad f(\vec{x}+\lambda\vec{y})=f(\vec{x})+\lambda f(\vec{y}).$$

On adapte alors la stratégie développée plus haut dans cette section, en montrant que pour tout $(\vec{x},\vec{y})\in E^2$ et tout $\lambda\in\mathbb{R}$, on a :

$$\forall\vec{z}\in E,\quad \langle f(\vec{x}+\lambda\vec{y})-(f(\vec{x})+\lambda f(\vec{y}))\,,\vec{z}\rangle=0,$$

dont en déduit $f(\vec{x}+\lambda\vec{y})-(f(\vec{x})+\lambda f(\vec{y}))\in E^\perp$, puis $f(\vec{x}+\lambda\vec{y})=f(\vec{x})+\lambda f(\vec{y})$ pour tout $(\vec{x},\vec{y})\in E^2$ et tout $\lambda\in\mathbb{R}$.

La stratégie se transpose de manière générale à la démonstration d'une identité de la forme $f(\vec{x})=g(\vec{x})$; il suffit alors d'étudier $\langle f(\vec{x})-g(\vec{x}),\vec{y}\rangle$ pour démontrer que $f(\vec{x})-g(\vec{x})\in E^\perp=\{\vec{0}\}$.

On peut se demander comment on « peut penser » à cette idée saugrenue de démontrer l'égalité $\langle f(\vec{x}+\lambda\vec{y})-(f(\vec{x})+\lambda f(\vec{y}))\,,\vec{z}\rangle=0$, plutôt que de démontrer directement $f(\vec{x}+\lambda\vec{y})=f(\vec{x})+\lambda f(\vec{y})$, comme on le fait dans l'immense majorité des cas. L'idée, dans ces situations, est que même si l'application n'est pas linéaire *a priori* (on veut le démontrer), le produit scalaire *l'est, lui, par rapport à chaque variable*. Ainsi l'application « hérite » de la bilinéarité du produit scalaire grâce à la propriété qu'elle vérifie à son égard.

Exemple 10. Soit $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien. Nous avons défini un endomorphisme autoadjoint de E comme étant un endomorphisme de E vérifiant :

$$\forall(\vec{x},\vec{y})\in E^2,\quad \langle f(\vec{x}),\vec{y}\rangle=\langle\vec{x},f(\vec{y})\rangle\,. \tag{3}$$

Nous allons montrer qu'en vérité, l'hypothèse que c'est un endomorphisme est superflu : nous allons démontrer que si $f:E\to E$ est une application QUELCONQUE vérifiant (3), alors elle est nécessairement linéaire, c'est-à-dire :

$$\forall(\vec{x},\vec{y})\in E^2,\ \forall\lambda\in\mathbb{R},\quad f(\vec{x}+\lambda\vec{y})=f(\vec{x})+\lambda f(\vec{y}).$$

Nous sommes bien dans le contexte de cette section, car nous avons des égalités entre des PRODUITS SCALAIRES et nous voulons en déduire des égalités entre VECTEURS. Cela nous incite à démontrer que pour tout $(\vec{x},\vec{y})\in E^2$ et tout $\lambda\in\mathbb{R}$, le vecteur :

$$f(\vec{x}+\lambda\vec{y})-(f(\vec{x})+\lambda f(\vec{y}))$$

est nul, en démontrant qu'il est orthogonal à tout vecteur de l'espace. Soit $(\vec{x},\vec{y})\in E^2$, soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Pour tout $\vec{z}\in E$, on a :

$$\langle f(\vec{x}+\lambda\vec{y})-(f(\vec{x})+\lambda f(\vec{y})),\vec{z}\rangle=\langle f(\vec{x}+\lambda\vec{y}),\vec{z}\rangle-\langle f(\vec{x}),\vec{z}\rangle-\lambda\,\langle f(\vec{y}),\vec{z}\rangle\,,$$

et en utilisant la propriété (3) on a, pour tout $\vec{z}\in E$,

$$\langle f(\vec{x}+\lambda\vec{y}),\vec{z}\rangle\overset{(3)}{=}\langle\vec{x}+\lambda y,f(\vec{z})\rangle=\langle\vec{x},f(\vec{z})\rangle+\lambda\,\langle\vec{y},f(\vec{z})\rangle\overset{(3)}{=}\langle f(\vec{x}),\vec{z}\rangle+\lambda\,\langle f(\vec{y}),\vec{z}\rangle\,.$$

On en déduit :

$$\forall\vec{z}\in E,\quad \langle f(\vec{x}+\lambda\vec{y})-(f(\vec{x})+\lambda f(\vec{y})),\vec{z}\rangle=\langle f(\vec{x}),\vec{z}\rangle+\lambda\,\langle f(\vec{y}),\vec{z}\rangle-\langle f(\vec{x}),\vec{z}\rangle-\lambda\,\langle f(\vec{y}),\vec{z}\rangle=0,$$

donc : $f(\vec{x}+\lambda\vec{y})-(f(\vec{x})+\lambda f(\vec{y}))\in E^\perp=\{\vec{0}\}$, et on déduit : $f(\vec{x}+\lambda\vec{y})=f(\vec{x})+\lambda f(\vec{y})$. Ceci étant vrai pour tout $(\vec{x},\vec{y})\in E^2$ et tout $\lambda\in\mathbb{R}$, l'application f est bien linéaire, donc un endomorphisme de E, autoadjoint par définition du fait de vérifier (3).

Exercice 9. Soit $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien, et soit $f:E\to E$ une application vérifiant :

$$\forall(\vec{x},\vec{y})\in E^2,\quad \langle f(\vec{x}),f(\vec{y})\rangle=\langle\vec{x},\vec{y}\rangle\,.$$

Montrer que f est linéaire. C'est donc une isométrie. *Ici, il vaut mieux travailler directement avec une norme au carré plutôt qu'un produit scalaire.*

4.2 Et si l'on n'a pas des produits scalaires, mais des normes ?

Dans ce cas, il y a des situations plus ou moins favorables. Soit, comme dans l'exercice 9 ci-dessus, développer l'expression :

$$\| f(\vec{x}+\lambda\vec{y}) - (f(\vec{x})+\lambda f(\vec{y}))\|^2$$

ne fait apparaître que des normes et produits scalaires qu'on sait simplifier (cas ultra-favorable), soit on passe des normes aux produits scalaires afin de raisonner comme ci-dessus, grâce à une **identité de polarisation** :

$$\forall(\vec{x},\vec{y})\in E^2,\quad \langle\vec{x},\vec{y}\rangle = \frac{1}{4}\left(\|\vec{x}+\vec{y}\|^2-\|\vec{x}-\vec{y}\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\|\vec{x}+\vec{y}\|^2-\|\vec{x}\|^2-\|\vec{y}\|^2\right).$$

Hormis dans de très rares cas que je ne mentionnerai pas, le choix de l'identité de polarisation importe peu. Alors, les hypothèses sur les normes permettent de simplifier le membre de droite, et d'en déduire une expression du produit scalaire qu'on veut simplifier.

Pour savoir à quels vecteurs appliquer l'identité de polarisation, à vrai dire, cela dépend de ce qui nous arrange. En général ce sera soit à $\langle f(\vec{x}),\vec{y}\rangle$, soit à $\langle f(\vec{x}),f(\vec{y})\rangle$, pour tout $(\vec{x},\vec{y})\in E^2$. Vous en jugerez selon que les normes soient simplifiables ou non.

Exercice 10. Soit $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien, dont on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne. Soit $f : E\to E$ une application vérifiant $f(\vec{0})=\vec{0}$, et :

$$\forall(\vec{x},\vec{y})\in E^2,\quad \|f(\vec{x})-f(\vec{y})\| = \|\vec{x}-\vec{y}\|.$$

Montrer que f est linéaire, et que c'est une isométrie. Indication : se ramener à la situation de l'exercice 9 ci-dessus.

4.3 Et si l'on n'a pas des normes, mais des produits scalaires... de la forme $\langle f(\vec{x}),\vec{x}\rangle$?

Dans tous ces raisonnements, on veut impérativement manipuler le produit scalaire $\langle f(\vec{x}),\vec{y}\rangle$, afin d'avoir toute latitude sur le choix de $\vec{y}$, on l'a vu ; mais il arrive malheureusement que nos hypothèses ne soient pas sur $\langle f(\vec{x}),\vec{y}\rangle$ (et ne puissent pas s'y ramener trivialement), mais sur $\langle f(\vec{x}),\vec{x}\rangle$. Comment faire, dans ce cas ?

On peut se ramener malgré tout aux cas précédents si l'on a de bonnes hypothèses : si f est un endomorphisme autoadjoint, par exemple, alors $(\vec{x},\vec{y})\mapsto\langle f(\vec{x}),\vec{y}\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique, et cela implique en particulier une identité de polarisation :

$$\forall(\vec{x},\vec{y})\in E^2,\quad \langle f(\vec{x}),\vec{y}\rangle = \frac{1}{4}\left(\langle f(\vec{x}+\vec{y}),\vec{x}+\vec{y}\rangle - \langle f(\vec{x}-\vec{y}),\vec{x}-\vec{y}\rangle\right) \tag{4}$$

Nous l'admettons ici et en parlons plus amplement dans la section *Utilisation des endomorphismes autoadjoints*. L'intérêt est qu'alors, si l'on connaît $\langle f(\vec{x}),\vec{x}\rangle$ pour tout $\vec{x}$, alors nous connaissons aussi $\langle f(\vec{x}\pm\vec{y}),\vec{x}\pm\vec{y}\rangle$, et donc nous connaissons aussi $\langle f(\vec{x}),\vec{y}\rangle$: on se ramène à la situation précédente !

Exemple 11. Soit f un endomorphisme autoadjoint. On suppose que pour tous $\vec{x}$, $\vec{y}\in E$ **non nuls** :

$$\frac{\langle f(\vec{x}),\vec{x}\rangle}{\|\vec{x}\|^2} = \frac{\langle f(\vec{y}),\vec{y}\rangle}{\|\vec{y}\|^2} \tag{5}$$

(on pourrait trouver tordue une telle propriété, mais ce n'est que l'identité raisonnable $\langle f(\vec{x}),\vec{x}\rangle = \langle f(\vec{y}),\vec{y}\rangle$ supposée pour tous vecteurs unitaires, et qu'on étend à tous vecteurs en les divisant par leurs normes).

On veut en déduire que f est une homothétie, c'est-à-dire : il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que :

$$\forall\vec{x}\in E,\quad f(\vec{x})=\lambda\vec{x}.$$

Encore faudrait-il avoir idée de la valeur de ce λ. Je vous laisserai vous en convaincre par une analyse et synthèse, mais je vais démontrer qu'un choix de λ qui convient est la quantité :

$$\lambda = \frac{\langle f(\vec{x}),\vec{x}\rangle}{\|\vec{x}\|^2}, \tag{6}$$

l'égalité (5) démontrant que c'est bien une quantité constante. Notons qu'on en déduit une égalité qui vaut pour tout $\vec{x} \in E$ (y compris nul) : $\langle f(\vec{x}), \vec{x}\rangle = \lambda\|\vec{x}\|^2$.

Nous sommes pile dans la configuration de cette section. En effet, nous avons des égalités entre des PRODUITS SCALAIRES (identité (5)), et nous voulons en déduire des égalités entre VECTEURS ($f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$). Conformément aux conseils de cette section, nous allons démontrer que si $\vec{x} \in E$, alors le vecteur $f(\vec{x}) - \lambda\vec{x}$ est nul, en montrant qu'il est orthogonal à tout vecteur $\vec{y}$ de l'espace.

Soient $\vec{x} \in E$ et $\vec{y} \in E$. Alors :

$$\langle f(\vec{x}) - \lambda\vec{x}, y\rangle = \langle f(\vec{x}), \vec{y}\rangle - \lambda \langle \vec{x}, \vec{y}\rangle .$$

L'identité (5) ne permet pas de simplifier $\langle f(\vec{x}), \vec{y}\rangle$; c'est là que je vais utiliser le conseil ci-dessus de passer par une identité de polarisation pour me ramener aux produits scalaires $\langle f(\vec{x} \pm \vec{y}), \vec{x} \pm \vec{y}\rangle$ que je saurai simplifier : c'est possible parce que f est un endomorphisme autoadjoint. On a :

$$\begin{aligned}\langle f(\vec{x}), \vec{y}\rangle = \frac{1}{4}\left(\langle f(\vec{x}+\vec{y}), \vec{x}+\vec{y}\rangle - \langle f(\vec{x}-\vec{y}), \vec{x}-\vec{y}\rangle\right) &\overset{(6)}{=} \frac{1}{4}\left(\lambda\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 - \lambda\|\vec{x}-\vec{y}\|^2\right) \\ &= \lambda \cdot \frac{1}{4}\left(\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 - \|\vec{x}-\vec{y}\|^2\right) = \lambda \langle \vec{x}, \vec{y}\rangle ,\end{aligned}$$

la dernière égalité découlant encore d'une identité de polarisation. On trouve bien :

$$\langle f(\vec{x}) - \lambda\vec{x}, \vec{y}\rangle = \langle f(\vec{x}), \vec{y}\rangle - \lambda \langle \vec{x}, \vec{y}\rangle = 0,$$

et ceci vaut pour tout $\vec{y} \in E$ donc : $f(\vec{x}) - \lambda\vec{x} \in E^\perp = \{\vec{0}\}$. On en déduit $f(\vec{x}) - \lambda\vec{x} = \vec{0}$, donc $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$. Ceci vaut pour tout $\vec{x} \in E$, donc f est une homothétie : comme promis.

Exercice 11. Redémontrer ce résultat en une ligne avec la version matricielle du théorème spectral.

Cet exercice est une illustration parmi d'autres de la section *L'importance des bases orthonormées* consacrée à l'intérêt des bases orthonormées, en particulier dans leur utilisation pour expliciter la forme d'une matrice.

Exercice 12.

1. Soient f et g deux endomorphismes autoadjoints. Montrer que si : $\forall \vec{x} \in E$, $\langle \vec{x}, f(\vec{x})\rangle = \langle \vec{x}, g(\vec{x})\rangle$, alors : $f = g$.
2. Soient A et B deux matrices symétriques. Montrer que si : $\forall X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^\top AX = X^\top BX$, alors : $A = B$.

Faire le lien avec la section *L'importance des bases orthonormées.*

Table des matières

Table des figures