MÉTHODES – Espaces préhilbertiens et euclidiens

✓ Isométries

1 ☢ Réduction des isométries en dimension supérieure

La stratégie de réduction d'une isométrie est la même que pour n'importe quel endomorphisme : on cherche une base adaptée à une décomposition en « bons » sous-espaces stables. Avec, comme dans le cas des endomorphismes autoadjoints et antisymétriques, quelques propriétés qui facilitent la réduction :

— le supplémentaire orthogonal d'un sous-espace stable est stable ;

— on connaît (parfois) des bons sous-espaces stables : les sous-espaces propres associés à 1 ou -1 ;

— on connaît la forme des isométries (et de leurs matrices) en dimension 2 ou 3.

À noter qu'on sait qu'il n'existe pas de vecteur propre associé à 1 dans $\ker(f - \mathrm{Id}_E)^\perp$, étant donné que $\ker(f - \mathrm{Id}_E)^\perp \cap \ker(f - \mathrm{Id}_E) = \{\vec{0}\}$ et qu'un vecteur propre associé à 1 est un vecteur non nul de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$. Cela permet d'exclure des possibilités d'isométries, au moment de déterminer l'endomorphisme induit par f sur $\ker(f - \mathrm{Id}_E)^\perp$. De même si l'on raisonne sur $\ker(f + \mathrm{Id}_E)^\perp$.

Il vaut le coup de bien assimiler le théorème de classification en dimension 3 : il contient presque toute la stratégie valable en dimension quelconque. La seule subtilité est le cas où nous n'avons pas de valeur propre (impossible en dimension impaire). Auquel cas, n'ayant pas de sous-espace propre stable, nous trouvons mieux que rien en dénichant un plan stable P (exercice). Comme nous savons expliciter la matrice d'une isométrie sur un plan stable (et ce doit être une rotation s'il n'y a pas de valeur propre), la description de la restriction à P est facile, puis on raisonne de même sur $P^\perp$: une récurrence sur la dimension achève le travail.

Exercice 1.

1. Utiliser ces remarques pour en déduire que le supplémentaire orthogonal de :
$$F = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f + \mathrm{Id}_E)$$
est toujours de dimension paire (*montrer que dans le cas contraire, l'endomorphisme induit par f sur $F^\perp$ aurait nécessairement des valeurs propres, et que c'est impossible*).
2. En déduire que si f est une isométrie, alors $\dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) + \dim(\ker(f + \mathrm{Id}_E))$ a toujours la parité de $\dim(E)$.

2 ✓ Reconnaître une isométrie en dimension 2

Dans ce cas la situation est très simple, parce qu'on voit à l'œil nu si l'on a une matrice de la forme :
$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix},$$
avec $a^2 + b^2 = 1$. Dans le premier cas, c'est une matrice de rotation ; dans le second cas, c'est une matrice de réflexion (on peut écrire a et b sous la forme $a = \cos(\theta)$ et $b = \sin(\theta)$). Au moment de déterminer plus précisément l'angle de la rotation (si c'est une rotation) ou l'axe de symétrie (si c'est une réflexion), il y a deux petites subtilités.

Déterminer l'angle d'une rotation. Si la matrice est de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$, alors on sait qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = \cos(\theta)$ et $b = \sin(\theta)$. Pour en déduire θ, **une erreur de raisonnement est de dire simplement que** $\theta = \arccos(a)$ convient. **C'est faux si** $\sin(\theta) < 0$! En effet, si $\sin(\theta) < 0$, alors il est impossible de prendre $\theta \in [0, \pi]$ (le sinus est positif sur cet intervalle). Or c'est seulement pour θ dans cet intervalle qu'on peut écrire l'équivalence : $\cos(\theta) = a \iff \theta = \arccos(a)$ (parce que l'arc cosinus est la bijection réciproque de la RESTRICTION du cosinus à $[0, \pi]$). Retenez cette alternative :

— si $b > 0$, alors $\theta = \arccos(a)$ CONVIENT ;

— si $b < 0$, alors $\theta = -\arccos(a)$ CONVIENT.

Je justifie le second cas : si l'on prend $\theta = -\arccos(a)$, vérifions qu'on a $a = \cos(\theta)$ et $b = \sin(\theta)$; d'une part : $a = \cos(\arccos(a)) = \cos(-\theta) = \cos(\theta)$, et d'autre part : $(\sin(\theta))^2 = 1 - \cos(\theta)^2 = 1 - a^2 = b^2$, et donc en prenant la racine carrée : $|\sin(\theta)| = \sqrt{b^2} = |b| = -b$ (on est dans le cas où $b < 0$) ; comme $\theta = -\arccos(a) \in [-\pi, 0]$, on a $\sin(\theta) < 0$, et donc : $|\sin(\theta)| = -\sin(\theta)$. On déduit de tout cela que $b = \sin(\theta)$, comme voulu.

Remarque. N'oubliez pas le mot « convient » : c'est FAUX que si $\cos(\theta) = a$ alors $\theta = \arccos(a)$: ce n'est vrai que modulo 2π... Et de toute façon, c'est l'implication réciproque que l'on veut : ce que vous dites, c'est que vous avez fait UN choix de θ qui marche (en ajoutant des multiples de 2π vous avez d'autres choix fonctionnels).

Déterminer l'axe de symétrie d'une réflexion. On pourrait s'inspirer de la méthode ci-dessus, en résolvant $a = \cos(\theta)$ et $b = \sin(\theta)$. Le problème est qu'en général, on n'obtient pas ainsi un vecteur directeur explicite de l'axe de symétrie, à cause d'arc cosinus non simplifiables. Pour déterminer un vecteur directeur de l'axe de symétrie de $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$, **on cherche un vecteur propre pour la valeur propre** 1 **en résolvant** $AX = X$. Le vecteur propre retenu engendre l'axe de symétrie : il aura toujours une expression simple.

Dans le cas d'un endomorphisme, ce n'est pas très éloigné du cas matriciel : on cherche une base orthonormée de l'espace sur lequel est défini l'endomorphisme, et on écrit sa matrice relativement à cette base.

3 ✓ Reconnaître une isométrie en dimension 3

La stratégie pour déterminer une isométrie de $\mathbb{R}^3$ est la suivante. Soit f un endomorphisme dont on connaît la matrice M dans la base canonique. On veut identifier sa nature ; on suppose que $f \neq \pm \mathrm{Id}_E$ (sinon il n'y a rien à raconter).

1. On vérifie d'abord que la matrice M est orthogonale, ce qui montre que f est une isométrie. Il est plus efficace de le faire en vérifiant que les colonnes forment une famille orthonormée, plutôt qu'en regardant si $M^\top M = \mathrm{I}_3$ (trop coûteux en calculs).
2. On détermine le sous-espace $\ker(M - \mathrm{I}_3)$ des vecteurs invariants avec la méthode du pivot de Gauß.
3. (a) Si $\dim(E_1) = 2$, alors f est la réflexion par rapport à E_1.
   (b) Si $\dim(E_1) = 1$, alors f est une rotation d'axe E_1, dirigé et orienté par un vecteur unitaire $\vec{a}$. On détermine une mesure d'angle θ de f avec la relation $\mathrm{tr}(f) = 1 + 2\cos(\theta)$, sachant que le signe du produit mixte $[\vec{a}, \vec{u}, r(\vec{u})]$, où $\vec{u}$ est un vecteur non nul orthogonal à $\vec{a}$, permet de déterminer le signe de $\sin(\theta)$, et donc de déterminer $\theta \bmod 2\pi$.
   (c) Si $\dim(E_1) = 0$, alors $-f$ est une rotation dont on détermine l'axe de rotation D et une mesure d'angle ϑ. Alors f est la composée commutative de la réflexion par rapport à $P = D^\perp$ et de la rotation d'axe D et de mesure d'angle $\vartheta + \pi$.

Remarquons qu'il est inutile de calculer $\det(M)$.

Sur la vérification que les colonnes forment une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$**.** Vous oubliez souvent une des deux conditions pour être une base orthonormée. Il faut des colonnes ORTHOGONALES ($\langle C_1, C_2\rangle = \langle C_1, C_3\rangle = \langle C_2, C_3\rangle = 0$) et UNITAIRES ($\langle C_1, C_1\rangle = \langle C_2, C_2\rangle = \langle C_3, C_3\rangle = 1$). Cela fait donc six produits scalaires à calculer. CETTE ÉTAPE N'EST PAS FACULTATIVE ! (même si vous pouvez l'abréger)

Sur l'angle de la rotation. La détermination de $\cos(\theta)$ se passe de commentaire. Mais elle est en général insuffisante pour obtenir θ (nous avons déjà fait ce constat pour les isométries du plan, ci-dessus). Elle n'est suffisante que si $\cos(\theta) = -1$: dans ce cas, on sait que $\theta \equiv \pi \bmod 2\pi$ et il est inutile d'aller plus loin. Sinon, au moment de calculer le produit mixte $[\vec{a}, \vec{u}, f(\vec{u})]$ donnant le signe de $\sin(\theta)$ (et non $\sin(\theta)$ si $\vec{a}$ et $\vec{u}$ ne sont pas unitaires, mais de toute façon on n'en demande pas tant) : **prenez $\vec{u}$ aussi simple que possible parmi les vecteurs non nuls orthogonaux à $\vec{a}$. Privilégiez un vecteur avec plusieurs coordonnées nulles, par exemple les vecteurs de la base canonique, si c'est possible**. Non seulement cela vous simplifiera le calcul de $f(\vec{u})$, mais aussi celui du produit mixte (en développant par rapport à la deuxième colonne). Ensuite, si $\vec{u} = (a, b, c)$, alors pour obtenir $f(\vec{u})$, vous calculez le produit $M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Enfin, si vous obtenez une mesure d'angle opposée à celle proposée dans une correction d'exercice, ce n'est pas grave : vous avez sans doute orienté l'axe de la rotation par un vecteur de sens opposé à celui choisi dans l'exercice.

Remarque. Si M est symétrique en plus d'être orthogonale, alors les égalités $M^\top = M$ et $MM^\top = \mathrm{I}_3$ impliquent : $M^2 = \mathrm{I}_3$. Vous savez donc déjà *a priori* que f est une symétrie orthogonale : soit une réflexion (cas où $\dim(E_1) = 2$), soit une rotation d'angle π modulo 2π (cas où $\dim(E_1) = 1$: on parle dans ce cas de *retournement*). Vous en rendre compte vous permet de détecter une erreur dans vos calculs ultérieurs.

Cas d'une composition commutative. Nous traitons ci-dessous le cas d'une composition commutative, pour vous montrer qu'il n'y a finalement pas grand'chose de neuf. Pour comprendre « pourquoi ça marche de faire ainsi », voir le cours.

Exemple 1. Montrons que la matrice $A = \dfrac{1}{50}\begin{pmatrix} -25 & 20\sqrt{3} & -15\sqrt{3} \\ -20\sqrt{3} & -34 & -12 \\ 15\sqrt{3} & -12 & -41 \end{pmatrix}$ est la matrice dans la base canonique d'une isométrie f de $\mathbb{R}^3$ que nous déterminerons. Nous vous laissons vérifier que les colonnes forment une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ (ne pas oublier le facteur $\frac{1}{50}$). Soit $\vec{x} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Alors :

$$\vec{x} \in \ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right) \iff A\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rrrcl} -75a & +20\sqrt{3}b & -15\sqrt{3}c & = & 0 \\ -20\sqrt{3}a & -84b & -12c & = & 0 \\ 15\sqrt{3}a & -12b & -91c & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrcll} -15a & +4\sqrt{3}b & -3\sqrt{3}c & = & 0 & \left(L_1 \leftarrow \frac{1}{5}L_1\right) \\ -5\sqrt{3}a & -21b & -3c & = & 0 & \left(L_2 \leftarrow \frac{1}{4}L_2\right) \\ 15\sqrt{3}a & -12b & -91c & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrcll} -15a & +4\sqrt{3}b & -3\sqrt{3}c & = & 0 & \\ & -25\sqrt{3}b & & = & 0 & \left(L_2 \leftarrow \sqrt{3}L_2 - L_1\right) \\ & & -100c & = & 0 & \left(L_3 \leftarrow L_3 + \sqrt{3}L_1\right) \end{array}\right.$$

On en déduit aisément $a = b = c = 0$, donc $\vec{x} = \vec{0}$. Autrement dit : $\dim\left(\ker\left(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\right)\right) = 0$, donc f est la composition commutative d'une rotation et d'une réflexion, dont nous allons à présent déterminer les caractéristiques géométriques.

Pour cela, on se souvient que $-f$ est une rotation, dont on détermine l'axe en déterminant les vecteurs invariants, puis une mesure d'angle avec la trace et un produit mixte bien choisi. Déterminons l'axe :

$$-f(\vec{x}) = \vec{x} \iff A\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rrrcl} 25a & +20\sqrt{3}b & -15\sqrt{3}c & = & 0 \\ -20\sqrt{3}a & +16b & -12c & = & 0 \\ 15\sqrt{3}a & -12b & +9c & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrcll} 5a & +4\sqrt{3}b & -3\sqrt{3}c & = & 0 & (L_1 \leftarrow \frac{1}{5}L_1) \\ -5\sqrt{3}a & +4b & -3c & = & 0 & (L_2 \leftarrow \frac{1}{4}L_2) \\ 5\sqrt{3}a & -4b & +3c & = & 0 & (L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrcll} 5a & +4\sqrt{3}b & -3\sqrt{3}c & = & 0 & \\ -5\sqrt{3}a & +4b & -3c & = & 0 & \\ & & 0 & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrcll} 5a & +4\sqrt{3}b & -3\sqrt{3}c & = & 0 & \\ & 16b & -12c & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + \sqrt{3}L_1) \\ & & 0 & = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \left\{\begin{array}{rcl} a & = & \sqrt{3}(3c-4b) = 0 \\ b & = & \frac{3}{4}\lambda \\ c & = & \lambda \end{array}\right.$$

donc : $D = \ker(-f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(0, \frac{3}{4}{,}1\right)\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((0{,}3{,}4)\right)$. On en déduit que $-f$ est une rotation d'axe D qu'on oriente par $\vec{a} = (0{,}3{,}4)$. Pour déterminer une mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$, on se souvient qu'elle vérifie $1 + 2\cos(\theta) = \mathrm{tr}(-f) = -\mathrm{tr}(A) = 2$, donc $\cos(\theta) = \frac{1}{2}$. Nous avons aussi besoin du signe de $\sin(\theta)$; il est de même signe que :

$$\left[\vec{a}, \vec{i}, f(\vec{i})\right] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 3 & 0 & \frac{2\sqrt{3}}{5} \\ 4 & 0 & -\frac{3\sqrt{3}}{10} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & \frac{2\sqrt{3}}{5} \\ 4 & -\frac{3\sqrt{3}}{10} \end{vmatrix} = \frac{5\sqrt{3}}{2} > 0. \quad \text{(on a bien : } \vec{a} \perp \vec{i}\text{)}$$

On en déduit $\sin(\theta) > 0$, et donc : $\theta \equiv \frac{\pi}{3} \bmod 2\pi$.

En conclusion, $-f$ est la rotation d'axe orienté par $\vec{a} = (0{,}3{,}4)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$ modulo 2π. On en déduit que f est la composition de la rotation d'axe orienté par $\vec{a} = (0{,}3{,}4)$ et d'angle $\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3} \bmod 2\pi$, et de la réflexion par rapport au plan $P = D^{\perp}$, qui est d'équation $3y + 4z = 0$ (parce que $\vec{a}$ en est un vecteur normal).

Commentaire sur le plan de la réflexion, dans le cas de la composition commutative. Une fois que vous avez un vecteur qui dirige et oriente l'axe de la rotation en présence, inutile de vous fatiguer pour trouver le plan de la réflexion : le vecteur qui oriente l'axe de la rotation est un vecteur normal. Ainsi, si (a, b, c) dirige l'axe de la rotation, alors la réflexion est par rapport au plan d'équation $ax + by + cz = 0$.

Commentaire sur les racines carrées dans les systèmes linéaires. Dans l'exemple ci-dessus, les racines carrées de 3 se simplifient très heureusement. Vous n'aurez pas toujours de telles simplifications (s'il apparaît en coefficients des nombres de la forme $a + b\sqrt{d}$, et parfois pire), ce qui complique la résolution de $AX = X$. Je vous conseille alors de simplifier la quantité $a + b\sqrt{d}$ en facteur du pivot que vous utilisez à chaque étape, *en multipliant la ligne par son conjugué* $a - b\sqrt{d}$. Grâce à l'identité remarquable $(a + b\sqrt{d})(a - b\sqrt{d}) = a^2 - b^2 d$, vous n'avez plus qu'un nombre rationnel en facteur et vous diminuez les risques de vous tromper. Vous pouvez aussi, si vous le préférez, en faire autant sur les lignes sur lesquelles vous allez opérer, mais ne perdez pas de vue que vous allez sans doute compliquer les colonnes suivantes ainsi.

Exemple 2. Soit $A = \dfrac{1}{28}\begin{pmatrix} -15 & 2\sqrt{42}+3 & 3\sqrt{42}-2 \\ -2\sqrt{42}+3 & -23 & \sqrt{42}+6 \\ -3\sqrt{42}-2 & -\sqrt{42}+6 & -18 \end{pmatrix}$. Nous vous laissons démontrer que A est une matrice orthogonale, donc l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A est une isométrie. Nous précisons sa nature à l'aide de la dimension de $\ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Alors :

$$A\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rrrcl} -43a & +(2\sqrt{42}+3)b & +(3\sqrt{42}-2)c & = & 0 \\ (3-2\sqrt{42})a & -51b & +(\sqrt{42}+6)c & = & 0 \\ -(3\sqrt{42}+2)a & +(6-\sqrt{42})b & -46c & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrcll} -43a & +(2\sqrt{42}+3)b & +(3\sqrt{42}-2)c & = & 0 & \\ & -2352b & +\left(31\sqrt{42}+435\right)c & = & 0 & (L_2 \leftarrow 43L_2 + (3-2\sqrt{42})L_1) \\ & -56\sqrt{42}b & -2352c & = & 0 & (L_3 \leftarrow 43L_3 - (3\sqrt{42}+2)L_1) \end{array}\right.$$

où le facteur de b en deuxième ligne (par exemple) s'est simplifié en écrivant : $(3-2\sqrt{42})(3+2\sqrt{42}) = 3^2 - \left(2\sqrt{42}\right)^2 = 9 - 4\cdot 42 = -159$. On poursuit :

$$A\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rrrcl} -43a & +(2\sqrt{42}+3)b & +(3\sqrt{42}-2)c & = & 0 \\ & -2352b & +\left(31\sqrt{42}+435\right)c & = & 0 \\ & -2352b & -2352\sqrt{42}c & = & 0 \quad (L_3 \leftarrow \sqrt{42}L_3) \end{array}\right.$$

Alors l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ nous mène clairement à un système échelonné avec trois pivots, donc $a = b = c = 0$ et $\dim(\ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})) = 0$. On en déduit que f est la composition commutative d'une rotation et d'une réflexion.

Exercice 2. Achever cet exemple pour montrer que f et la composée de la rotation d'axe orienté par $(1,-3,2)$ et d'angle $\frac{4\pi}{3} \bmod 2\pi$, et de la réflexion par rapport au plan d'équation $x - 3y + 2z = 0$.

Mise en garde 1. Notez bien que si nous avons fait deux théorèmes de classification différents, pour la dimension 2 et la dimension 3, c'est que les isométries sont différentes. Par conséquent, leur étude l'est aussi :

N'UTILISEZ PAS LES MÉTHODES DE LA DIMENSION 3 POUR LA DIMENSION 2 !

Par exemple, si vous trouvez qu'une matrice orthogonale **d'ordre deux** admet un sous-espace E_1 de vecteurs invariants de dimension 1, vous aurez l'air ridicules si vous parlez de rotation par rapport à l'axe E_1. Ridicules, parce qu'un dessin permet très rapidement de remarquer l'absurdité d'une rotation planaire par rapport à un axe.

4 Comment commencer un exercice théorique sur les rotations ?

Je parle des rotations d'un espace euclidien en dimension 2 ou 3 : comment utiliser les résultats du cours afin de résoudre les exercices portant sur les rotations ?

Le résultat le plus important, qui est souvent le seul utile pour traiter un exercice, est la forme de la matrice d'une rotation dans toute base orthonormée directe (ou « presque ») :

— **en dimension 2 :** la rotation planaire de mesure d'angle θ a pour matrice $\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}$ dans TOUTE base orthonormée directe ;

— **en dimension 3 :** la rotation de l'espace d'axe D et de mesure d'angle θ a pour matrice $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}$ dans TOUTE base orthonormée directe de la forme $(\vec{a},\vec{u},\vec{v})$, où $\vec{a}$ dirige et oriente D, et $(\vec{u},\vec{v})$ est une base orthonormée directe de $D^\perp$.

Notons en passant que la dernière colonne est nécessairement connue, si l'on connaît la ou les précédentes. Par exemple, si la première colonne de la matrice d'une rotation planaire (dans une base orthonormée directe) est : $\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$, la classification implique que la matrice complète est nécessairement : $\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$ (et c'est donc la matrice de la rotation planaire de mesure d'angle $\frac{\pi}{6}$). Or la première colonne d'une matrice de rotation planaire est la même peu importe la base orthonormée directe choisie : **on a donc tout intérêt à choisir pour premier vecteur de la base, un vecteur unitaire dont l'image par r est liée aux données de l'énoncé** (soit cette image est connue, soit cette image est à déterminer). Ou bien, un vecteur unitaire dont l'image est facile à calculer grâce à ces mêmes données. Les autres vecteurs peuvent être choisis arbitrairement (à moins que d'autres hypothèses de l'énoncé ne fournissent des vecteurs intéressants orthogonaux au premier), tant que cela donne une base orthonormée directe.

Par exemple, si l'énoncé commence par : « soit r une rotation de $\mathbb{R}^2$, et soit $\vec{u} \in E$ non nul tel que $r(\vec{u})$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$ », il est avisé de compléter la famille $\left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\right)$ (la division par la norme est pour avoir un vecteur unitaire) en une base orthonormée directe $\left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \vec{v}\right)$ de $\mathbb{R}^2$. Le fait que $r(\vec{u})$ vérifie $\mathcal{P}$ devrait permettre d'obtenir la première colonne de $M_{\left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \vec{v}\right)}(r)$ (et donc aussi la seconde, d'après ce qui précède), puisque cette colonne s'obtient en écrivant les coordonnées de $r(\vec{u})$, sur lesquelles on a normalement des informations. Mais comme on sait que $M_{\left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \vec{v}\right)}(r)$ est aussi de la forme $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, avec θ une mesure d'angle de r, en comparant les deux expressions obtenues de cette matrice on peut tirer des informations non triviales sur r (selon ce qu'on nous demande de montrer).

Exemple 3. (exemple où le choix explicite du premier vecteur suffit) Soit r une rotation d'un espace vectoriel euclidien orienté E de dimension 2. On suppose qu'il existe $\vec{u} \in E$ non nul tel que : $r(\vec{u}) = -\vec{u}$. On veut déterminer r (c'est-à-dire : trouver son angle).

Pour cela, conformément au conseil ci-dessus (on a une hypothèse sur l'image de $\vec{u}$ par r), écrivons la matrice de r dans une base orthonormée directe de la forme $\mathcal{B} = \left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \vec{v}\right)$ (le vecteur $\vec{v}$ n'a pas d'importance ; tout ce qui importe est qu'il existe). Comme $r(\vec{u}) = -\vec{u}$, on a par linéarité : $r\left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\right) = -\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$, donc la matrice de r dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme : $\begin{pmatrix} -1 & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$. Mais, si $\theta \in \mathbb{R}$ est une mesure d'angle de r, on sait que sa matrice dans $\mathcal{B}$ est aussi égale à : $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$. Par identification : $\cos(\theta) = -1$, et donc : $\theta \equiv \pi \bmod 2\pi$. On a donc montré que r est la rotation de mesure d'angle π (ou encore : $r = -\mathrm{Id}_E$), d'où le résultat attendu.

Exemple 4. (exemple où le choix du second vecteur compte aussi) Soit r une rotation d'un espace vectoriel euclidien orienté E de dimension 2. On suppose qu'il existe deux vecteurs non nuls et orthogonaux $\vec{i}$ et $\vec{j}$ tels que : $r(\vec{i}) = \vec{j}$. On veut montrer qu'on a : $r(\vec{j}) = -\vec{i}$.

On note que l'hypothèse de l'énoncé nous donne explicitement $r(\vec{i})$: il serait donc avisé de considérer une base orthonormée directe commençant par $\frac{\vec{i}}{\|\vec{i}\|}$, puisque cela permettrait d'expliciter la première colonne... Mais à condition d'inclure $\vec{j}$ à la base également, vu que $r(\vec{i})$ s'exprime à l'aide de $\vec{j}$ (un autre argument qui motive d'intégrer $\vec{j}$ au choix d'une base orthonormée directe, est qu'on veut $r(\vec{j})$: on a donc tout intérêt à prendre $\vec{j}$ pour second vecteur, de sorte que la deuxième colonne de la matrice de r donne $r(\vec{j})$). Heureusement, le fait que $\vec{i}$ et $\vec{j}$ soient orthogonaux assure que la base $\mathcal{B} = \left(\frac{\vec{i}}{\|\vec{i}\|}, \frac{\vec{j}}{\|\vec{j}\|}\right)$ est orthonormée (éventuellement indirecte ; si elle est indirecte, il suffit de remplacer $\vec{j}$ par $-\vec{j}$, et le lecteur en exercice s'assurera que cela ne change pas le résultat final).

Écrivons la matrice de r dans $\mathcal{B}$: la deuxième colonne de r nous donnera $r(\vec{j})$, qui est ce qu'on cherche à déterminer. Pour cela, déterminons d'abord la première colonne grâce à $r(\vec{i})$. On a par hypothèse : $r(\vec{i}) = \vec{j}$. Donc, par linéarité : $r\left(\frac{\vec{i}}{\|\vec{i}\|}\right) = \frac{\vec{j}}{\|\vec{i}\|}$. Or $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\|$ car $\vec{j}$ est l'image par l'isométrie r de $\vec{i}$, et une isométrie conserve la norme. Donc : $r\left(\frac{\vec{i}}{\|\vec{i}\|}\right) = \frac{\vec{j}}{\|\vec{j}\|}$. On en déduit que la matrice de r dans $\mathcal{B}$ est de la forme : $\begin{pmatrix} 0 & * \\ 1 & * \end{pmatrix}$. Mais, on l'a vu plus haut, la connaissance de la première colonne permet d'obtenir la seconde. On a nécessairement : $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. La seconde colonne nous dit alors que $r\left(\frac{\vec{j}}{\|\vec{j}\|}\right) = -\frac{\vec{i}}{\|\vec{i}\|}$, ce qui, après multiplication par $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\|$, implique : $r(\vec{i}) = -\vec{j}$. Ce qu'on voulait démontrer.

Exemple 5. (exemple où le choix du premier vecteur n'est pas directement soufflé par les hypothèses) Soient r la rotation de $\mathbb{R}^2$ (muni de l'orientation usuelle) de mesure d'angle $\frac{\pi}{2}$, et s la réflexion par rapport à l'axe (Oy), définie par $(x, y) \mapsto (-x, y)$. Un calcul de déterminant montre que : $\det(s \circ r \circ s) = 1$, et donc $s \circ r \circ s$ est une rotation. On cherche une mesure d'angle de cette rotation.

On pourrait passer par le pur calcul matriciel, en notant que $S(\pi)$ est la matrice de la réflexion s (pourquoi ?), et en calculant $S(\pi)\, R\left(\frac{\pi}{2}\right) S(\pi)$ pour obtenir la matrice de $s \circ r \circ s$. Mais voyons comment l'idée de cette section permet de répondre à cette question.

Construisons une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^2$ qui facilite le calcul de la première colonne de la matrice de $s \circ r \circ s$. Pour cela, il vaut mieux choisir un vecteur invariant par s : considérons $\vec{j} = (0{,}1)$ par exemple, comme premier vecteur de notre base orthonormée ; pour le second, $-\vec{i} = (-1{,}0)$ fera l'affaire. La base $\mathcal{B} = \left(\vec{j}, -\vec{i}\right)$ est bien orthonormée directe ; calculons $s \circ r \circ s(\vec{j})$ pour avoir sa première colonne dans la base $\mathcal{B}$. On a : $s(\vec{j}) = \vec{j}$ car $\vec{j}$ est sur l'axe (Oy), donc : $r \circ s(\vec{j}) = r(\vec{j})$. Comme r est la rotation de mesure d'angle $\frac{\pi}{2}$, il est facile de se convaincre qu'on a : $r(\vec{j}) = -\vec{i}$. Alors : $s \circ r \circ s(\vec{i}) = s(-\vec{i}) = -(-\vec{i})$, puisque $-\vec{i}$ est orthogonal à l'axe (Oy). On en déduit que la matrice de $s \circ r \circ s$ dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme : $\begin{pmatrix} 0 & * \\ -1 & * \end{pmatrix}$. Mais, si $\theta \in \mathbb{R}$ est une mesure d'angle de $s \circ r \circ s$, on sait que sa matrice dans $\mathcal{B}$ est aussi égale à : $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$. Par identification : $\cos(\theta) = 0$, $\sin(\theta) = -1$, donc : $\theta \equiv -\frac{\pi}{2} \mod 2\pi$. Ceci démontre que $s \circ r \circ s$ est la rotation de mesure d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Exercice 3.

1. Redémontrer ce résultat en passant par les matrices de rotation et de réflexion.
2. Refaire cette étude avec une réflexion quelconque de $\mathbb{R}^2$ à la place de s, et une rotation de mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ quelconque à la place de r.

On procède également ainsi dans le cours, pour ces deux résultats :

— montrer que pour tous vecteurs non nuls de même norme, il existe une rotation envoyant l'un sur l'autre ;

— si r est une rotation de mesure d'angle θ, alors pour tout $\vec{u}$ unitaire, on a : $\langle \vec{u}, r(\vec{u}) \rangle = \cos(\theta)$ et $[\vec{u}, r(\vec{u})] = \sin(\theta)$.

Le principe est le même en dimension 3, à ceci près que le premier vecteur $\vec{a}$ de la base orthonormée directe doit orienter l'axe D (pas le choix), tandis que le second doit appartenir au plan orthogonal à l'axe, qu'on note $P = D^\perp$ ci-dessous. Alors, même s'il est question d'un vecteur $\vec{u} \in E$ dans l'énoncé dont l'image par r est connue, on ne peut pas l'utiliser pour former une base orthonormée directe de P, puis de $\mathbb{R}^3$, à moins que :

— l'on parvienne à démontrer qu'il appartient à P (pour cela, on effectue le produit scalaire avec un vecteur orientant D, et on vérifie qu'il est nul ; ceci prouve l'appartenance à $D^\perp = P$) ;

— sa décomposition dans la somme directe $E = D \oplus P$ soit connue, ainsi que son image par r (auquel cas, on construit une base orthonormée en commençant par $\vec{a}$, et la composante de $\vec{u}$ dans P).

En tous les cas, trouver le dernier vecteur pour obtenir une base orthonormée directe n'est pas le problème majeur : il suffit souvent de prendre $\vec{v} = \vec{a} \wedge \vec{u}$ (si $\vec{u} \in P$), puis de rendre $\vec{v}$ unitaire.

Exemple 6. (exemple où le vecteur de l'hypothèse est dans P) Soit r une rotation de $\mathbb{R}^3$. On suppose qu'il existe $\vec{u}$ unitaire tel que : $r(\vec{u}) = -\vec{u}$. Comme dans l'exemple 3, on aimerait en déduire que r est la rotation de mesure d'angle π. Problème : dans le cas de la dimension 2, on n'a aucune contrainte sur la base orthonormée directe où la matrice d'une rotation est connue. Ici, il faut se placer dans une base orthonormée directe dont le premier vecteur oriente l'axe de rotation D, et dont les deux autres vecteurs forment une base orthonormée directe de $P = D^\perp$. Si $\vec{u} \notin P$, alors le raisonnement de l'exemple 3 ne peut donc pas se transposer tel quel...

Heureusement, nous allons démontrer qu'on a bien $\vec{u} \in P$ (et nous vous invitons à faire un dessin pour vous en convaincre). Soit $\vec{a}$ un vecteur unitaire qui oriente D. Pour montrer que $\vec{u} \in P$, il suffit de montrer qu'on a : $\langle \vec{u}, \vec{a} \rangle = 0$. Or une isométrie (ce qu'est une rotation) conserve les produits scalaires, donc :

$$\langle \vec{a}, \vec{u} \rangle = \langle r(\vec{a}), r(\vec{u}) \rangle .$$

On sait que $r(\vec{a}) = \vec{a}$ par définition de l'axe d'une rotation ; on a aussi $r(\vec{u}) = -\vec{u}$ par hypothèse. L'égalité ci-dessus devient donc : $\langle \vec{a}, \vec{u} \rangle = -\langle \vec{a}, \vec{u} \rangle$, puis : $\langle \vec{a}, \vec{u} \rangle = 0$. Ce qu'on voulait démontrer. Ainsi $\vec{u} \in D^\perp = P$.

Complétons la famille $(\vec{u})$ de P en une base orthonormée directe de $(\vec{u}, \vec{v})$ de P. Alors $\mathcal{B} = (\vec{a}, \vec{u}, \vec{v})$ est une base orthonormée directe de P, et la théorie nous dit que la matrice de r dans cette base est de la forme : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, où θ est une mesure d'angle de r. Mais on a aussi : $r(\vec{u}) = -\vec{u}$, ce qui nous donne une autre description de la deuxième colonne de la matrice ; on en déduit qu'elle est de la forme : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & -1 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$. Par identification : $\cos(\theta) = -1$, donc : $\theta \equiv \pi \mod 2\pi$, ce qu'on voulait démontrer.

Pour un exemple où le vecteur de l'énoncé n'est pas dans P, vous pouvez regarder la démonstration de la formule de Rodrigues (exercice 14 de la feuille d'exercices n° 2), où l'on décompose d'abord un vecteur $\vec{x}$ sous la forme $\vec{x} = \vec{x}_P + \vec{x}_D$, avec $\vec{x}_P \in P$ et $\vec{x}_D \in D$, puis on forme une base orthonormée directe de P en complétant la famille $\left(\frac{\vec{x}_P}{\|\vec{x}_P\|}\right)$ à l'aide d'un produit vectoriel, comme expliqué plus haut.

Table des matières

Table des figures