# Méthodes (MP) – Espaces préhilbertiens et euclidiens
**✓ Isométries**

## 1 ✓ Reconnaître une isométrie en dimension 2

Dans ce cas la situation est très simple, parce qu'on voit à l'œil nu si l'on a une matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix},$$

avec $a^2 + b^2 = 1$. Dans le premier cas, c'est une matrice de rotation ; dans le second cas, c'est une matrice de réflexion (on peut écrire $a$ et $b$ sous la forme $a = \cos(\theta)$ et $b = \sin(\theta)$). Au moment de déterminer plus précisément l'angle de la rotation (si c'est une rotation) ou l'axe de symétrie (si c'est une réflexion), il y a deux petites subtilités.

### 1.1 Déterminer l'angle d'une rotation

Si la matrice est de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$, alors on sait qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = \cos(\theta)$ et $b = \sin(\theta)$. Pour en déduire $\theta$, **une erreur de raisonnement est de dire simplement que** $\theta = \arccos(a)$ convient. **C'est faux si** $\sin(\theta) < 0$ ! En effet, si $\sin(\theta) < 0$, alors il est impossible de prendre $\theta \in [0, \pi]$ (le sinus est positif sur cet intervalle). Or c'est seulement pour $\theta$ dans cet intervalle qu'on peut écrire l'équivalence : $\cos(\theta) = a \iff \theta = \arccos(a)$ (parce que l'arc cosinus est la bijection réciproque de la RESTRICTION du cosinus à $[0, \pi]$). Retenez cette alternative :

— si $b > 0$, alors $\theta = \arccos(a)$ CONVIENT ;

— si $b < 0$, alors $\theta = -\arccos(a)$ CONVIENT.

Je justifie le second cas : si l'on prend $\theta = -\arccos(a)$, vérifions qu'on a $a = \cos(\theta)$ et $b = \sin(\theta)$ ; d'une part : $a = \cos(\arccos(a)) = \cos(-\theta) = \cos(\theta)$, et d'autre part : $(\sin(\theta))^2 = 1 - \cos(\theta)^2 = 1 - a^2 = b^2$, et donc en prenant la racine carrée : $|\sin(\theta)| = \sqrt{b^2} = |b| = -b$ (on est dans le cas où $b < 0$) ; comme $\theta = -\arccos(a) \in [-\pi, 0]$, on a $\sin(\theta) < 0$, et donc : $|\sin(\theta)| = -\sin(\theta)$. On déduit de tout cela que $b = \sin(\theta)$, comme voulu.

**Remarque.** N'oubliez pas le mot « convient » : c'est FAUX que si $\cos(\theta) = a$ alors $\theta = \arccos(a)$ : ce n'est vrai que modulo $2\pi$... Et de toute façon, c'est l'implication réciproque que l'on veut : ce que vous dites, c'est que vous avez fait UN choix de $\theta$ qui marche (en ajoutant des multiples de $2\pi$ vous avez d'autres choix fonctionnels).

### 1.2 Déterminer l'axe de symétrie d'une réflexion

On pourrait s'inspirer de la méthode ci-dessus, en résolvant $a = \cos(\theta)$ et $b = \sin(\theta)$. Le problème est qu'en général, on n'obtient pas ainsi un vecteur directeur explicite de l'axe de symétrie, à cause d'arc cosinus non simplifiables. Pour déterminer un vecteur directeur de l'axe de symétrie de $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$, **on cherche un vecteur propre pour la valeur propre** $1$ **en résolvant** $AX = X$. Le vecteur propre retenu engendre l'axe de symétrie : il aura toujours une expression simple.

Mieux encore lorsque la matrice s'y prête : calculer $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ peut se faire à l'œil nu car $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont les deux colonnes de $A$, et on sait que pour une symétrie $s$ le vecteur $\vec{x} + s(\vec{x})$ est toujours dans le sous-espace propre associé à 1. Comme ces deux sont non nuls hors des cas triviaux (lesquels ?), cela vous fournit un vecteur directeur de l'axe de symétrie.

Dans le cas d'un endomorphisme, ce n'est pas très éloigné du cas matriciel : on cherche une base orthonormée de l'espace sur lequel est défini l'endomorphisme, et on écrit sa matrice relativement à cette base.

## 2 ✓ Reconnaître une isométrie en dimension 3

La stratégie pour déterminer une isométrie de $\mathbb{R}^3$ est la suivante. Soit $f$ un endomorphisme dont on connaît la matrice $M$ dans la base canonique. On veut identifier sa nature ; on suppose que $f \neq \pm \mathrm{Id}_E$ (sinon il n'y a rien à raconter).

1. On vérifie d'abord que la matrice $M$ est orthogonale, ce qui montre que $f$ est une isométrie. Il est plus efficace de le faire en vérifiant que les colonnes forment une famille orthonormée, plutôt qu'en regardant si $M^\top M = \mathrm{I}_3$ (vous feriez neuf calculs au lieu de six).
2. On détermine le sous-espace $E_1 = \ker(M - \mathrm{I}_3)$ des vecteurs invariants avec la méthode du pivot de Gauß. La suite diffère selon la valeur de $\dim(E_1)$ :
   (a) Si $\dim(E_1) = 2$, alors $f$ est la réflexion par rapport à $E_1$.
   (b) Si $\dim(E_1) = 1$, alors $f$ est une rotation d'axe $E_1$, dirigé et orienté par un vecteur unitaire $\vec{a}$. On détermine une mesure d'angle $\theta$ de $f$ avec la relation $\mathrm{tr}(f) = 1 + 2\cos(\theta)$, sachant que le signe du déterminant $\det_{\mathcal{B}}(\vec{a}, \vec{u}, r(\vec{u}))$, où $\vec{u}$ est un vecteur non nul *linéairement indépendant de* $\vec{a}$ et $\mathcal{B}$ une base orthonormée *directe* quelconque de $\mathbb{R}^3$ (disons la base canonique), permet de déterminer le signe de $\sin(\theta)$, et donc de déterminer $\theta \bmod 2\pi$.
   (c) Si $\dim(E_1) = 0$, alors $-f$ est une rotation dont on détermine l'axe de rotation $D$ et une mesure d'angle $\vartheta$. Alors $f$ est la composée commutative de la réflexion par rapport à $P = D^\perp$ et de la rotation d'axe $D$ et de mesure d'angle $\vartheta + \pi$.

**Remarquons qu'il est inutile de calculer** $\det(M)$.

Nous allons détailler les deux derniers items dans les sections suivantes, le cas de la symétrie orthogonale étant facile.

**Sur la vérification que les colonnes forment une base orthonormée de** $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$**.** Vous oubliez souvent une des deux conditions pour être une base orthonormée. Il faut des colonnes ORTHOGONALES ($\langle C_1, C_2\rangle = \langle C_1, C_3\rangle = \langle C_2, C_3\rangle = 0$) et UNITAIRES ($\langle C_1, C_1\rangle = \langle C_2, C_2\rangle = \langle C_3, C_3\rangle = 1$). Cela fait donc six produits scalaires à calculer. CETTE ÉTAPE N'EST PAS FACULTATIVE ! (même si vous pouvez l'abréger)

### 2.1 Sur l'angle de la rotation

Il y a une petite subtilité sur l'orientation de $\mathbb{R}^3$ et sa compatibilité avec l'orientation du plan sur lequel une rotation de l'espace induit une rotation planaire : nous faisons comme si de rien n'était pour le moment et analyserons cette subtilité de plus près à la section 2.3. → page 4

La détermination de $\cos(\theta)$ se passe de commentaire : il suffit de calculer une trace. Mais elle est en général insuffisante pour obtenir $\theta$ (nous avons déjà fait ce constat pour les isométries du plan, ci-dessus). Elle n'est suffisante que si $\cos(\theta) = -1$ : dans ce cas, on sait que $\theta \equiv \pi \bmod 2\pi$ et il est inutile d'aller plus loin.

Sinon, on calcule le déterminant de la famille $(\vec{a}, \vec{u}, f(\vec{u}))$ relativement à une base orthonormée *directe* de $\mathbb{R}^3$ (disons la base canonique), puisqu'il donne le **signe** de $\sin(\theta)$. Nous expliquons pourquoi dans la section 2.2. → page 3

**Prenez $\vec{u}$ aussi simple que possible parmi les vecteurs linéairement indépendants de $\vec{a}$. Privilégiez un vecteur avec plusieurs coordonnées nulles, par exemple les vecteurs de la base canonique**. Non seulement cela vous simplifiera le calcul de $f(\vec{u})$, mais aussi celui du déterminant (en développant par rapport à la deuxième colonne). Si vous ne savez pas quel vecteur de la base canonique choisir, regardez si un choix vous mènera aisément à un déterminant de matrice triangulaire, pour simplifier le calcul.

Enfin, si vous obtenez une mesure d'angle opposée à celle de votre voisin ou d'une correction d'exercice, ce n'est pas grave : vous avez sans doute orienté l'axe de la rotation par un vecteur de sens opposé à celui choisi par votre voisin ou le corrigé (voir dans la section 2.3 la raison de cette subtilité). → page 4

**Exemple 1.** Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les colonnes de $M$ sont unitaires et deux à deux orthogonales, donc $M$ est orthogonale et $f$ est une isométrie. De plus, soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(M - \mathrm{I}_3) \iff \left\{ \begin{array}{ccc} z & = & x \\ x & = & y \\ y & = & z \end{array} \right. \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

donc l'ensemble des vecteurs invariants est la droite $D$ dirigée et orientée par le vecteur unitaire $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, et $f$ est une rotation d'axe $D$. Pour déterminer une mesure d'angle de $f$, on constate que $\mathrm{tr}(f) = 0 = 1 + 2\cos(\theta)$, donc $\cos(\theta) = -\frac{1}{2}$. De plus, le vecteur $\vec{j}$ est linéairement indépendant de $\vec{a}$, et on a :

$$\det_{\mathcal{B}}(\vec{a}, \vec{j}, f(\vec{j})) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

donc $\sin(\theta) > 0$ et $\theta \equiv \frac{2\pi}{3} \bmod 2\pi$.

En conclusion, $f$ est la rotation d'axe dirigé et orienté par $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ modulo $2\pi$.

Si vous avez choisi d'orienter et diriger $D$ par le vecteur $-\vec{a}$, le calcul de déterminant ci-dessus donne $-3$ et donne donc $\sin(\theta) < 0$, puis : $\theta \equiv -\frac{2\pi}{3} \bmod 2\pi$. Voir la section 2.3 pour cette question d'orientation. → page 4

**Remarque.** Si $M$ est symétrique en plus d'être orthogonale, alors les égalités $M^\top = M$ et $MM^\top = \mathrm{I}_3$ impliquent : $M^2 = \mathrm{I}_3$. Vous savez donc déjà *a priori* que $f$ est une symétrie orthogonale : soit une réflexion (cas où $\dim(E_1) = 2$), soit une rotation d'angle $\pi$ modulo $2\pi$ (cas où $\dim(E_1) = 1$ : on parle dans ce cas de *retournement*). Vous en rendre compte vous permet de détecter une erreur dans vos calculs ultérieurs.

## 2.2 Pourquoi cela marche ?

On explique ici pourquoi le signe de $\sin(\theta)$ est donné par le signe de $\det_{\mathcal{B}}(\vec{a}, \vec{u}, r(\vec{u}))$, où $\vec{a}$ oriente l'axe de la rotation. Ce raisonnement n'est pas à reproduire à chaque fois qu'on vous pose un tel exercice.

On suppose d'abord $\vec{a}$ unitaire. On va justifier que dans ce cas, si $\vec{u}$ est aussi *unitaire* et *orthogonal* à $\vec{a}$, et si $r$ est la rotation d'axe $D = \mathrm{Vect}(\vec{a})$ et de mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$, alors :

$$\det_{\mathcal{B}}(\vec{a}, \vec{u}, r(\vec{u})) = \sin(\theta).$$

Si $\vec{a}$ et $\vec{u}$ ne sont pas unitaires, on se ramène au cas précédent en les normalisant et on en déduit : $\det_{\mathcal{B}}(\vec{a}, \vec{u}, r(\vec{u})) = \|\vec{a}\| \|\vec{u}\|^2 \sin(\theta)$. Ainsi $\sin(\theta)$ est bien du même signe que $\det_{\mathcal{B}}(\vec{a}, \vec{u}, r(\vec{u}))$. Il suffit donc de traiter le cas unitaire.

Soit $\vec{u} \in E$ un vecteur unitaire et orthogonal à $\vec{a}$. On sait que $r$ induit sur $P = D^\perp$ une rotation planaire : on en déduit que si on complète la famille orthonormée $(\vec{u})$ (qui est bien dans $P$) en une base orthonormée directe $(\vec{u}, \vec{v})$ de $P$, alors $\mathcal{B}' = (\vec{a}, \vec{u}, \vec{v})$ est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$ (pourquoi est-elle directe aussi ? c'est là qu'il importe de préciser que $\vec{a}$ ORIENTE $D$ : voir la section 2.3). On sait que la matrice de $r$ relativement à cette base est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

On retiendra surtout : $r(\vec{u}) = \cos(\theta)u + \sin(\theta)\vec{v}$. La matrice ci-dessus ne nous servira plus. Alors :

$$\det_{\mathcal{B}'}(\vec{a}, \vec{u}, r(\vec{u})) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cos(\theta) \\ 0 & 0 & \sin(\theta) \end{vmatrix} = \sin(\theta).$$

Or la formule de changement de base implique que $\det_{\mathcal{B}'}(\vec{a}, \vec{u}, r(\vec{u}))$ et $\det_{\mathcal{B}}(\vec{a}, \vec{u}, r(\vec{u}))$ ne diffèrent que du facteur multiplicatif $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$, qui vaut 1 parce que c'est le déterminant d'une matrice de passage entre deux bases orthonormées directes, c'est-à-dire le déterminant d'une matrice orthogonale directe : il vaut 1. D'où le résultat.

Vous noterez qu'à la page 2, je ne prétends pas du tout qu'il faille prendre $\vec{u}$ orthogonal à $\vec{a}$ : je précise seulement qu'il doit être linéairement indépendant. On se ramène en effet au cas précédent en projetant $\vec{u}$ sur le plan orthogonal à l'axe de la rotation :

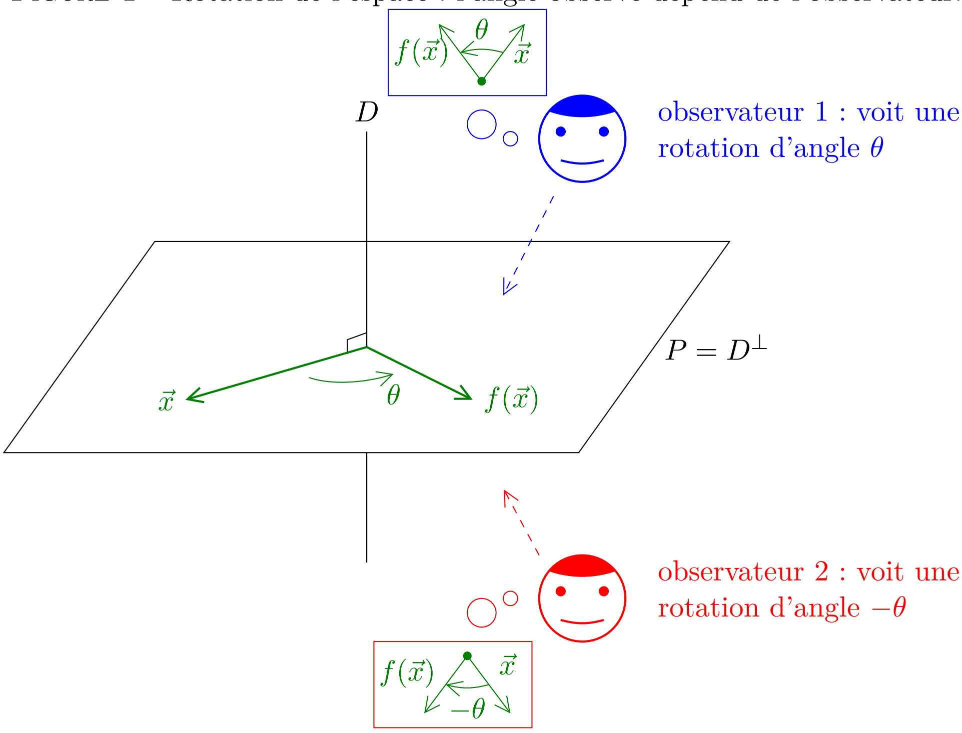
**Exercice 1.** Soient $D$ l'axe d'une rotation $r$ de $\mathbb{R}^3$, orienté et dirigé par un vecteur $\vec{a} \in D$, et $P$ le plan orthogonal à $D$. Soit $p$ le projecteur orthogonal sur $P$. Soit $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ un vecteur linéairement indépendant de $\vec{a}$.

1. On suppose que $\mathcal{F} = (\vec{a}, \vec{u}, r(\vec{u}))$ est libre. Exprimer la matrice de $(\vec{a}, p(\vec{u}), r(p(\vec{u})))$ relativement à la base $\mathcal{F}$, et en déduire que pour toute base orthonormée directe $\mathcal{B}$ les signes de $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ et $\det_{\mathcal{B}}((\vec{a}, p(\vec{u}), r(p(\vec{u}))))$ sont égaux.
2. Traiter le cas où $\mathcal{F}$ est liée.

## 2.3 Angle d'une rotation : subtilité sur l'orientation de l'espace

L'angle d'une rotation de l'espace n'est pas correctement défini si l'on n'est pas prudent : il dépend en quelque sorte de l'observateur. Par exemple, sur la figure 1, selon qu'on regarde le vecteur $\vec{x}$ par « en-dessous » ou « au-dessus », on peut penser que le vecteur tourne de $\theta$ ou de $-\theta$ (vous pouvez faire l'expérience en dessinant sur une feuille de papier, avec un trait suffisamment épais, un arc de cercle orienté : il aura l'air orienté dans le sens contraire si vous levez la feuille et la regardez par en-dessous). → page 4

FIGURE 1 – Rotation de l'espace : l'angle observé dépend de l'observateur.



Il apparaît la même ambiguïté dans l'exemple 1 où l'angle trouvé dépend du vecteur $\vec{a}$ choisi pour diriger l'axe de la rotation $D$ (changer $\vec{a}$ en $-\vec{a}$ change le calcul de déterminant).

Toutes ces confusions s'expliquent en termes d'orientation : si les deux observateurs de la figure 1 ont une interprétation différente de la même rotation, c'est parce qu'ils pensent tous les deux la regarder « du bon côté » ! En effet, quand vous observez une rotation pour relever son angle, vous partez implicitement du principe que l'axe de la rotation est dirigé « vers vous », comme si vous regardiez le plan $P$ sur lequel on induit une rotation planaire par « au-dessus ». Mais si quelqu'un regarde le plan $P$ depuis l'autre côté et part aussi du principe que l'axe de la rotation est dirigé vers lui, vous aurez immanquablement un résultat différent...

Pour résoudre ce conflit, il faut donc que tout le monde se mette d'accord, c'est-à-dire : **il faut qu'on décide comment l'axe est orienté**. C'est pourquoi j'ai systématiquement précisé, dans les pages précédentes, que le vecteur $\vec{a}$ de mon axe de rotation dirige ET ORIENTE $D$. De la sorte, il n'y a plus ambiguïté sur la façon d'observer la rotation.

Cette question d'orientation se posait plus formellement dans la section précédente où, pour mon raisonnement, j'avais besoin que la complétion de la base orthonormée *directe* $(\vec{u}, \vec{v})$ de $P = D^{\perp}$ soit une base orthonormée *directe* (donc de même orientation que la base canonique) de $\mathbb{R}^3$. Comment être sûr que ce soit possible ? Et est-ce que cela ne dépendrait pas de la base directe $(\vec{u}, \vec{v})$ choisie ? En fait, une fois qu'on a orienté $\mathbb{R}^3$ (en général en décrétant que la base canonique est directe) et qu'on a orienté $D$ (en considérant un vecteur directeur $\vec{a}$ et en décrétant que $(\vec{a})$ est directe dans $D$), on voit qu'il en résulte une et une seule orientation de $P = D^{\perp}$ vérifiant ceci : toute base $(\vec{u}, \vec{v})$ de $P$ est directe si et seulement si $(\vec{a}, \vec{u}, \vec{v})$ est une base directe de $\mathbb{R}^3$. En particulier la matrice de la rotation $r$ d'axe $D$ et de mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ est la même :

- dans toute base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$ adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^3 = D \oplus P$ ;
- dans toute base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ obtenue en concaténant la base $(\vec{a})$ de $D$ et une base orthonormée directe de $P$.

L'équivalence formulée ci-dessus assure que ces deux items sont exactement la même chose, et c'est ce qui assure que l'angle de $r$ est correctement défini (c'est l'angle de la rotation planaire induite sur $P$, et qu'on obtient en considérant sa matrice dans n'importe quelle base orthonormée directe de $P$).

**Exercice 2.** Justifier l'équivalence ci-dessus : soient $E$ un espace euclidien orienté de dimension 3 et $D$ une droite de $E$ que l'on oriente en décrétant que la base $(\vec{a})$ de $D$ est directe. Orienter $P = D^{\perp}$ de sorte que toute base $(\vec{u}, \vec{v})$ de $P$ soit directe si et seulement si $(\vec{a}, \vec{u}, \vec{v})$ est une base directe de $E$.

Si ces considérations vous passent mille lieues de la tête, retenez simplement en situation pratique que lorsque vous voulez expliciter une rotation de $\mathbb{R}^3$, vous devez préciser comment vous orientez son axe en fixant un vecteur qui l'oriente (voir les exemples de cette section).

## 2.4 Cas d'une composition commutative

Nous traitons ci-dessous le cas d'une composition commutative, pour vous montrer qu'il n'y a finalement pas grand'chose de neuf.

**Pourquoi la méthode proposée (page 2) marche.** Si $\det(f) = -1$, alors $-f$ est une rotation (en effet : $\det(-f) = (-1)^3 \det(f) = -\det(f) = 1$). Si on note $D$ son axe de rotation et $\vartheta$ une mesure d'angle, alors dans une base orthonormée directe adaptée à $D \oplus D^{\perp}$, la matrice de $-f$ est : ← page 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ 0 & \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix}.$$

Alors, dans cette même base, la matrice de $f$ est :

$$-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta)\\ 0 & \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta)\\ 0 & \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta)\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\vartheta+\pi) & -\sin(\vartheta+\pi)\\ 0 & \sin(\vartheta+\pi) & \cos(\vartheta+\pi)\end{pmatrix}.$$

Dans ce cas, $f$ est la composée commutative de la réflexion par rapport à $D^\perp$ et de la rotation d'axe $D$ et de mesure d'angle $\vartheta + \pi$.

Puisque nous savons déterminer des rotations (section 2.1), ce cas particulier ne soulève pas de difficulté supplémentaire.

**Exemple 2.** Montrons que la matrice $A = \dfrac{1}{50}\begin{pmatrix}-25 & 20\sqrt{3} & -15\sqrt{3}\\ -20\sqrt{3} & -34 & -12\\ 15\sqrt{3} & -12 & -41\end{pmatrix}$ est la matrice dans la base canonique d'une isométrie $f$ de $\mathbb{R}^3$ que nous déterminerons. Nous vous laissons vérifier que les colonnes forment une base orthonormée de $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ (ne pas oublier le facteur $\frac{1}{50}$). Soit $\vec{x} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Alors :

$$\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \iff A\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rrrcl} -75a & +20\sqrt{3}b & -15\sqrt{3}c & = & 0\\ -20\sqrt{3}a & -84b & -12c & = & 0\\ 15\sqrt{3}a & -12b & -91c & = & 0\end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rrrcll} -15a & +4\sqrt{3}b & -3\sqrt{3}c & = & 0 & \left(L_1 \leftarrow \frac{1}{5}L_1\right)\\ -5\sqrt{3}a & -21b & -3c & = & 0 & \left(L_2 \leftarrow \frac{1}{4}L_2\right)\\ 15\sqrt{3}a & -12b & -91c & = & 0 & \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rrrcll} -15a & +4\sqrt{3}b & -3\sqrt{3}c & = & 0 & \\ & -25\sqrt{3}b & & = & 0 & \left(L_2 \leftarrow \sqrt{3}L_2 - L_1\right)\\ & & -100c & = & 0 & \left(L_3 \leftarrow L_3 + \sqrt{3}L_1\right)\end{array}\right.$$

On en déduit aisément $a = b = c = 0$, donc $\vec{x} = \vec{0}$. Autrement dit : $\dim(\ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})) = 0$, donc $f$ est la composition commutative d'une rotation et d'une réflexion, dont nous allons à présent déterminer les caractéristiques géométriques.

Pour cela, on se souvient que $-f$ est une rotation, dont on détermine l'axe en déterminant les vecteurs invariants, puis une mesure d'angle avec la trace et un déterminant bien choisi. Déterminons l'axe :

$$-f(\vec{x}) = \vec{x} \iff A\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rrrcl} 25a & +20\sqrt{3}b & -15\sqrt{3}c & = & 0\\ -20\sqrt{3}a & +16b & -12c & = & 0\\ 15\sqrt{3}a & -12b & +9c & = & 0\end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rrrcll} 5a & +4\sqrt{3}b & -3\sqrt{3}c & = & 0 & \left(L_1 \leftarrow \frac{1}{5}L_1\right)\\ -5\sqrt{3}a & +4b & -3c & = & 0 & \left(L_2 \leftarrow \frac{1}{4}L_2\right)\\ 5\sqrt{3}a & -4b & +3c & = & 0 & \left(L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3\right)\end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rrrcll} 5a & +4\sqrt{3}b & -3\sqrt{3}c & = & 0 & \\ -5\sqrt{3}a & +4b & -3c & = & 0 & \\ & & 0 & = & 0 & \left(L_3 \leftarrow L_3 + L_2\right)\end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rrrcll} 5a & +4\sqrt{3}b & -3\sqrt{3}c & = & 0 & \\ & 16b & -12c & = & 0 & \left(L_2 \leftarrow L_2 + \sqrt{3}L_1\right)\\ & & 0 & = & 0 & \end{array}\right.$$
$$\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \left\{\begin{array}{rcl} a & = & \sqrt{3}(3c - 4b) = 0\\ b & = & \frac{3}{4}\lambda\\ c & = & \lambda\end{array}\right.$$

donc : $D = \ker(-f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(0, \frac{3}{4}, 1\right)\right) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((0,3,4))$. On en déduit que $-f$ est une rotation d'axe $D$ qu'on oriente par $\vec{a} = (0,3,4)$. Pour déterminer une mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$, on se souvient qu'elle vérifie $1 + 2\cos(\theta) = \mathrm{tr}(-f) = -\mathrm{tr}(A) = 2$, donc $\cos(\theta) = \frac{1}{2}$. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ dont on décrète qu'elle est directe. Nous avons aussi besoin du signe de $\sin(\theta)$ ; il est de même signe que :

$$\det_{\mathcal{B}}\left(\vec{a}, \vec{i}, -f(\vec{i})\right) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 3 & 0 & \frac{2\sqrt{3}}{5} \\ 4 & 0 & -\frac{3\sqrt{3}}{10} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & \frac{2\sqrt{3}}{5} \\ 4 & -\frac{3\sqrt{3}}{10} \end{vmatrix} = \frac{5\sqrt{3}}{2} > 0. \quad (\text{On a bien : } \vec{a} \perp \vec{i})$$

On en déduit $\sin(\theta) > 0$, et donc : $\theta \equiv \frac{\pi}{3} \bmod 2\pi$.

En conclusion, $-f$ est la rotation d'axe orienté par $\vec{a} = (0,3,4)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$ modulo $2\pi$. On en déduit que $f$ est la composition de la rotation d'axe orienté par $\vec{a} = (0,3,4)$ et d'angle $\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3} \bmod 2\pi$, et de la réflexion par rapport au plan $P = D^{\perp}$, qui est d'équation $3y + 4z = 0$ (parce que $\vec{a}$ en est un vecteur normal).

**Commentaire sur le plan de la réflexion, dans le cas de la composition commutative.** Une fois que vous avez un vecteur qui dirige et oriente l'axe de la rotation en présence, inutile de vous fatiguer pour trouver le plan de la réflexion : le vecteur qui oriente l'axe de la rotation est un vecteur normal. Ainsi, si $(a, b, c)$ dirige l'axe de la rotation, alors la réflexion est par rapport au plan d'équation $ax + by + cz = 0$.

## 2.5 Commentaire sur les racines carrées dans les systèmes linéaires

Dans l'exemple ci-dessus, les racines carrées de 3 se simplifient très heureusement. Vous n'aurez pas toujours de telles simplifications (s'il apparaît en coefficients des nombres de la forme $a + b\sqrt{d}$, et parfois pire), ce qui complique la résolution de $AX = X$. Je vous conseille alors de simplifier la quantité $a + b\sqrt{d}$ en facteur du pivot que vous utilisez à chaque étape, *en multipliant la ligne par son conjugué* $a - b\sqrt{d}$. Grâce à l'identité remarquable $(a + b\sqrt{d})(a - b\sqrt{d}) = a^2 - b^2 d$, vous n'avez plus qu'un nombre rationnel en facteur et vous diminuez les risques de vous tromper. Vous pouvez aussi, si vous le préférez, en faire autant sur les lignes sur lesquelles vous allez opérer, mais ne perdez pas de vue que vous allez sans doute compliquer les colonnes suivantes ainsi.

**Exemple 3.** Soit $A = \frac{1}{28}\begin{pmatrix} -15 & 2\sqrt{42}+3 & 3\sqrt{42}-2 \\ -2\sqrt{42}+3 & -23 & \sqrt{42}+6 \\ -3\sqrt{42}-2 & -\sqrt{42}+6 & -18 \end{pmatrix}$. Nous vous laissons démontrer que $A$ est une matrice orthogonale, donc l'endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A$ est une isométrie. Nous précisons sa nature à l'aide de la dimension de $\ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Alors :

$$A\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rrrcl} -43a & +(2\sqrt{42}+3)b & +(3\sqrt{42}-2)c & = & 0 \\ (3-2\sqrt{42})a & -51b & +(\sqrt{42}+6)c & = & 0 \\ -(3\sqrt{42}+2)a & +(6-\sqrt{42})b & -46c & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrcll} -43a & +(2\sqrt{42}+3)b & +(3\sqrt{42}-2)c & = & 0 & \\ & -2352b & +\left(31\sqrt{42}+435\right)c & = & 0 & (L_2 \leftarrow 43L_2 + (3-2\sqrt{42})L_1) \\ & -56\sqrt{42}b & -2352c & = & 0 & (L_3 \leftarrow 43L_3 - (3\sqrt{42}+2)L_1) \end{array}\right.$$

où le facteur de $b$ en deuxième ligne (par exemple) s'est simplifié en écrivant : $(3 - 2\sqrt{42})(3 + 2\sqrt{42}) = 3^2 - \left(2\sqrt{42}\right)^2 = 9 - 4 \cdot 42 = -159$. On poursuit :

$$A\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rrrcll} -43a & +(2\sqrt{42}+3)b & +(3\sqrt{42}-2)c & = & 0 & \\ & -2352b & +\left(31\sqrt{42}+435\right)c & = & 0 & \\ & -2352b & -2352\sqrt{42}c & = & 0 & (L_3 \leftarrow \sqrt{42}L_3) \end{array}\right.$$

Alors l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ nous mène clairement à un système échelonné avec trois pivots, donc $a = b = c = 0$ et $\dim(\ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})) = 0$. On en déduit que $f$ est la composition commutative d'une rotation et d'une réflexion.

**Exercice 3.** Achever cet exemple pour montrer que $f$ et la composée de la rotation d'axe orienté par $(1, -3{,}2)$ et d'angle $\frac{4\pi}{3}$ mod $2\pi$, et de la réflexion par rapport au plan d'équation $x - 3y + 2z = 0$.

**Mise en garde 1.** Notez bien que si nous avons fait deux théorèmes de classification différents, pour la dimension 2 et la dimension 3, c'est que les isométries sont différentes. Par conséquent, leur étude l'est aussi :

N'UTILISEZ PAS LES MÉTHODES DE LA DIMENSION 3 POUR LA DIMENSION 2 !

Par exemple, si vous trouvez qu'une matrice orthogonale **d'ordre deux** admet un sous-espace $E_1$ de vecteurs invariants de dimension 1, vous aurez l'air ridicules si vous parlez de rotation par rapport à l'axe $E_1$. Ridicules, parce qu'un dessin permet très rapidement de remarquer l'absurdité d'une rotation planaire par rapport à un axe.

## 3 Comment commencer un exercice théorique sur les rotations ?

Je parle des rotations d'un espace euclidien en dimension 2 ou 3 : comment utiliser les résultats du cours afin de résoudre les exercices portant sur les rotations ?

Le résultat le plus important, qui est souvent le seul utile pour traiter un exercice, est la forme de la matrice d'une rotation dans toute base orthonormée directe (ou « presque ») :

— **en dimension** 2 **:** la rotation planaire de mesure d'angle $\theta$ a pour matrice $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ dans TOUTE base orthonormée directe ;

— **en dimension** 3 **:** la rotation de l'espace d'axe $D$ et de mesure d'angle $\theta$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ dans TOUTE base orthonormée directe de la forme $(\vec{a}, \vec{u}, \vec{v})$, où $\vec{a}$ dirige et oriente $D$, et $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base orthonormée directe de $D^\perp$.

Notons en passant que la dernière colonne est nécessairement connue, si l'on connaît la ou les précédentes. Par exemple, si la première colonne de la matrice d'une rotation planaire (dans une base orthonormée directe) est : $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, la classification implique que la matrice complète est nécessairement : $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ (et c'est donc la matrice de la rotation planaire de mesure d'angle $\frac{\pi}{6}$). Or la première colonne d'une matrice de rotation planaire est la même peu importe la base orthonormée directe choisie : **on a donc tout intérêt à choisir pour premier vecteur de la base, un vecteur unitaire dont l'image par $r$ est liée aux données de l'énoncé** (soit cette image est connue, soit cette image est à déterminer). Ou bien, un vecteur unitaire dont l'image est facile à calculer grâce à ces mêmes données. Les autres vecteurs peuvent être choisis arbitrairement (à moins que d'autres hypothèses de l'énoncé ne fournissent des vecteurs intéressants orthogonaux au premier), tant que cela donne une base orthonormée directe.

Par exemple, si l'énoncé commence par : « soit $r$ une rotation de $\mathbb{R}^2$, et soit $\vec{u} \in E$ non nul tel que $r(\vec{u})$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$ », il est avisé de compléter la famille $\left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\right)$ (la division par la norme est pour avoir un vecteur unitaire) en une base orthonormée directe $\left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \vec{v}\right)$ de $\mathbb{R}^2$. Le fait que $r(\vec{u})$ vérifie $\mathcal{P}$ devrait permettre d'obtenir la première colonne de $M_{\left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \vec{v}\right)}(r)$ (et donc aussi la seconde, d'après ce qui précède), puisque cette colonne s'obtient en écrivant les coordonnées de $r(\vec{u})$, sur lesquelles on a normalement des informations. Mais comme on sait que $M_{\left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \vec{v}\right)}(r)$ est aussi de la forme $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, avec $\theta$ une mesure d'angle de $r$, en comparant les deux expressions obtenues de cette matrice on peut tirer des informations non triviales sur $r$ (selon ce qu'on nous demande de montrer).

**Exemple 4. (Exemple où le choix explicite du premier vecteur suffit)** Soit $r$ une rotation d'un espace vectoriel euclidien orienté $E$ de dimension 2. On suppose qu'il existe $\vec{u} \in E$ non nul tel que : $r(\vec{u}) = -\vec{u}$. On veut déterminer $r$ (c'est-à-dire : trouver son angle).

Pour cela, conformément au conseil ci-dessus (on a une hypothèse sur l'image de $\vec{u}$ par $r$), écrivons la matrice de $r$ dans une base orthonormée directe de la forme $\mathcal{B} = \left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \vec{v}\right)$ (le vecteur $\vec{v}$ n'a pas d'importance ; tout ce qui importe est qu'il existe). Comme $r(\vec{u}) = -\vec{u}$, on a par linéarité : $r\left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\right) = -\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$, donc la matrice de $r$ dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme : $\begin{pmatrix} -1 & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$. Mais, si $\theta \in \mathbb{R}$ est une mesure d'angle de $r$, on sait que sa matrice dans $\mathcal{B}$ est aussi égale à : $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$. Par identification : $\cos(\theta) = -1$, et donc : $\theta \equiv \pi \bmod 2\pi$. On a donc montré que $r$ est la rotation de mesure d'angle $\pi$ (ou encore : $r = -\mathrm{Id}_E$), d'où le résultat attendu.

**Exemple 5. (Exemple où le choix du second vecteur compte aussi)** Soit $r$ une rotation d'un espace vectoriel euclidien orienté $E$ de dimension 2. On suppose qu'il existe deux vecteurs non nuls et orthogonaux $\vec{i}$ et $\vec{j}$ tels que : $r(\vec{i}) = \vec{j}$. On veut montrer qu'on a : $r(\vec{j}) = -\vec{i}$.

On note que l'hypothèse de l'énoncé nous donne explicitement $r(\vec{i})$ : il serait donc avisé de considérer une base orthonormée directe commençant par $\frac{\vec{i}}{\|\vec{i}\|}$, puisque cela permettrait d'expliciter la première colonne... Mais à condition d'inclure $\vec{j}$ à la base également, vu que $r(\vec{i})$ s'exprime à l'aide de $\vec{j}$ (un autre argument qui motive d'intégrer $\vec{j}$ au choix d'une base orthonormée directe, est qu'on veut $r(\vec{j})$ : on a donc tout intérêt à prendre $\vec{j}$ pour second vecteur, de sorte que la deuxième colonne de la matrice de $r$ donne $r(\vec{j})$). Heureusement, le fait que $\vec{i}$ et $\vec{j}$ soient orthogonaux assure que la base $\mathcal{B} = \left(\frac{\vec{i}}{\|\vec{i}\|}, \frac{\vec{j}}{\|\vec{j}\|}\right)$ est orthonormée (éventuellement indirecte ; si elle est indirecte, il suffit de remplacer $\vec{j}$ par $-\vec{j}$, et le lecteur en exercice s'assurera que cela ne change pas le résultat final).

Écrivons la matrice de $r$ dans $\mathcal{B}$ : la deuxième colonne de $r$ nous donnera $r(\vec{j})$, qui est ce qu'on cherche à déterminer. Pour cela, déterminons d'abord la première colonne grâce à $r(\vec{i})$. On a par hypothèse : $r(\vec{i}) = \vec{j}$. Donc, par linéarité : $r\left(\frac{\vec{i}}{\|\vec{i}\|}\right) = \frac{\vec{j}}{\|\vec{i}\|}$. Or $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\|$ car $\vec{j}$ est l'image par l'isométrie $r$ de $\vec{i}$, et une isométrie conserve la norme. Donc : $r\left(\frac{\vec{i}}{\|\vec{i}\|}\right) = \frac{\vec{j}}{\|\vec{j}\|}$. On en déduit que la matrice de $r$ dans $\mathcal{B}$ est de la forme : $\begin{pmatrix} 0 & * \\ 1 & * \end{pmatrix}$. Mais, on l'a vu plus haut, la connaissance de la première colonne permet d'obtenir la seconde. On a nécessairement : $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. La seconde colonne nous dit alors que $r\left(\frac{\vec{j}}{\|\vec{j}\|}\right) = -\frac{\vec{i}}{\|\vec{i}\|}$, ce qui, après multiplication par $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\|$, implique : $r(\vec{i}) = -\vec{j}$. Ce qu'on voulait démontrer.

**Exemple 6. (Exemple où le choix du premier vecteur n'est pas directement soufflé par les hypothèses)** Soient $r$ la rotation de $\mathbb{R}^2$ (muni de l'orientation usuelle) de mesure d'angle $\frac{\pi}{2}$, et $s$ la réflexion par rapport à l'axe $(Oy)$, définie par $(x, y) \mapsto (-x, y)$. Un calcul de déterminant montre que : $\det(s \circ r \circ s) = 1$, et donc $s \circ r \circ s$ est une rotation. On cherche une mesure d'angle de cette rotation.

On pourrait passer par le pur calcul matriciel, en notant que $S(\pi)$ est la matrice de la réflexion $s$ (pourquoi ?), et en calculant $S(\pi) R\left(\frac{\pi}{2}\right) S(\pi)$ pour obtenir la matrice de $s \circ r \circ s$. Mais voyons comment l'idée de cette section permet de répondre à cette question.

Construisons une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^2$ qui facilite le calcul de la première colonne de la matrice de $s \circ r \circ s$. Pour cela, il vaut mieux choisir un vecteur invariant par $s$ : considérons $\vec{j} = (0,1)$ par exemple, comme premier vecteur de notre base orthonormée ; pour le second, $-\vec{i} = (-1,0)$ fera l'affaire. La base $\mathcal{B} = \left(\vec{j}, -\vec{i}\right)$ est bien orthonormée directe ; calculons $s \circ r \circ s(\vec{j})$ pour avoir sa première colonne dans la base $\mathcal{B}$. On a : $s(\vec{j}) = \vec{j}$ car $\vec{j}$ est sur l'axe $(Oy)$, donc : $r \circ s(\vec{j}) = r(\vec{j})$. Comme $r$ est la rotation de mesure d'angle $\frac{\pi}{2}$, il est facile de se convaincre qu'on a : $r(\vec{j}) = -\vec{i}$. Alors : $s \circ r \circ s(\vec{i}) = s(-\vec{i}) = -(-\vec{i})$, puisque $-\vec{i}$ est orthogonal à l'axe $(Oy)$. On en déduit que la matrice de $s \circ r \circ s$ dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme : $\begin{pmatrix} 0 & * \\ -1 & * \end{pmatrix}$. Mais, si $\theta \in \mathbb{R}$ est une mesure d'angle de $s \circ r \circ s$, on sait que sa matrice dans $\mathcal{B}$ est aussi égale à : $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$. Par identification : $\cos(\theta) = 0$, $\sin(\theta) = -1$, donc : $\theta \equiv -\frac{\pi}{2} \bmod 2\pi$.

Ceci démontre que $s \circ r \circ s$ est la rotation de mesure d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

**Exercice 4.**

1. Redémontrer ce résultat en passant par les matrices de rotation et de réflexion.
2. Refaire cette étude avec une réflexion quelconque de $\mathbb{R}^2$ à la place de $s$, et une rotation de mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ quelconque à la place de $r$.

On procède également ainsi dans le cours, pour ces deux résultats :

— montrer que pour tous vecteurs non nuls de même norme, il existe une rotation envoyant l'un sur l'autre ;

— si $r$ est une rotation de mesure d'angle $\theta$, alors pour tout $\vec{u}$ unitaire, on a : $\langle \vec{u}, r(\vec{u}) \rangle = \cos(\theta)$ et $[\vec{u}, r(\vec{u})] = \sin(\theta)$.

Le principe est le même en dimension 3, à ceci près que le premier vecteur $\vec{a}$ de la base orthonormée directe doit orienter l'axe $D$ (pas le choix), tandis que le second doit appartenir au plan orthogonal à l'axe, qu'on note $P = D^\perp$ ci-dessous. Alors, même s'il est question d'un vecteur $\vec{u} \in E$ dans l'énoncé dont l'image par $r$ est connue, on ne peut pas l'utiliser pour former une base orthonormée directe de $P$, puis de $\mathbb{R}^3$, à moins que :

— l'on parvienne à démontrer qu'il appartient à $P$ (pour cela, on effectue le produit scalaire avec un vecteur orientant $D$, et on vérifie qu'il est nul ; ceci prouve l'appartenance à $D^\perp = P$) ;

— sa décomposition dans la somme directe $E = D \oplus P$ soit connue, ainsi que son image par $r$ (auquel cas, on construit une base orthonormée en commençant par $\vec{a}$, et la composante de $\vec{u}$ dans $P$).

En tous les cas, trouver le dernier vecteur pour obtenir une base orthonormée directe n'est pas le problème majeur : il suffit souvent de prendre $\vec{v} = \vec{a} \wedge \vec{u}$ (si $\vec{u} \in P$), puis de rendre $\vec{v}$ unitaire.

**Exemple 7. (Exemple où le vecteur de l'hypothèse est dans $P$)** Soit $r$ une rotation de $\mathbb{R}^3$. On suppose qu'il existe $\vec{u}$ unitaire tel que : $r(\vec{u}) = -\vec{u}$. Comme dans l'exemple 4, on aimerait en déduire que $r$ est la rotation de mesure d'angle $\pi$. Problème : dans le cas de la dimension 2, on n'a aucune contrainte sur la base orthonormée directe où la matrice d'une rotation est connue. Ici, il faut se placer dans une base orthonormée directe dont le premier vecteur oriente l'axe de rotation $D$, et dont les deux autres vecteurs forment une base orthonormée directe de $P = D^\perp$. Si $\vec{u} \notin P$, alors le raisonnement de l'exemple 4 ne peut donc pas se transposer tel quel...

Heureusement, nous allons démontrer qu'on a bien $\vec{u} \in P$ (et nous vous invitons à faire un dessin pour vous en convaincre). Soit $\vec{a}$ un vecteur unitaire qui oriente $D$. Pour montrer que $\vec{u} \in P$, il suffit de montrer qu'on a : $\langle \vec{u}, \vec{a} \rangle = 0$. Or une isométrie (ce qu'est une rotation) conserve les produits scalaires, donc :

$$\langle \vec{a}, \vec{u} \rangle = \langle r(\vec{a}), r(\vec{u}) \rangle .$$

On sait que $r(\vec{a}) = \vec{a}$ par définition de l'axe d'une rotation ; on a aussi $r(\vec{u}) = -\vec{u}$ par hypothèse. L'égalité ci-dessus devient donc : $\langle \vec{a}, \vec{u} \rangle = -\langle \vec{a}, \vec{u} \rangle$, puis : $\langle \vec{a}, \vec{u} \rangle = 0$. Ce qu'on voulait démontrer. Ainsi $\vec{u} \in D^\perp = P$.

Complétons la famille $(\vec{u})$ de $P$ en une base orthonormée directe de $(\vec{u}, \vec{v})$ de $P$. Alors $\mathcal{B} = (\vec{a}, \vec{u}, \vec{v})$ est une base orthonormée directe de $P$, et la théorie nous dit que la matrice de $r$ dans cette base est de la forme : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, où $\theta$ est une mesure d'angle de $r$. Mais on a aussi : $r(\vec{u}) = -\vec{u}$, ce qui nous donne une autre description de la deuxième colonne de la matrice ; on en déduit qu'elle est de la forme : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & -1 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$. Par identification : $\cos(\theta) = -1$, donc : $\theta \equiv \pi \bmod 2\pi$, ce qu'on voulait démontrer.

Pour un exemple où le vecteur de l'énoncé n'est pas dans $P$, vous pouvez regarder la démonstration de la formule de Rodrigues, où l'on décompose d'abord un vecteur $\vec{x}$ sous la forme $\vec{x} = \vec{x}_P + \vec{x}_D$, avec $\vec{x}_P \in P$ et $\vec{x}_D \in D$, puis on forme une base orthonormée directe de $P$ en complétant la famille $\left(\frac{\vec{x}_P}{\|\vec{x}_P\|}\right)$ à l'aide d'un produit vectoriel.

# Table des matières

**1 ✓ Reconnaître une isométrie en dimension** $2$ **1**
1.1 Déterminer l'angle d'une rotation . . . . . 1
1.2 Déterminer l'axe de symétrie d'une réflexion . . . . . 1

**2 ✓ Reconnaître une isométrie en dimension** $3$ **2**
2.1 Sur l'angle de la rotation . . . . . 2
2.2 Pourquoi cela marche ? . . . . . 3
2.3 Angle d'une rotation : subtilité sur l'orientation de l'espace . . . . . 4
2.4 Cas d'une composition commutative . . . . . 5
2.5 Commentaire sur les racines carrées dans les systèmes linéaires . . . . . 7

**3 Comment commencer un exercice théorique sur les rotations ? 8**

# Table des figures

1 Rotation de l'espace : l'angle observé dépend de l'observateur. . . . . . 4