MÉTHODES – Espaces préhilbertiens et euclidiens

✓ L'importance des bases orthonormées

1 ✓ Pour le calcul de produits scalaires et normes

Le principal usage des bases orthonormées est, de très loin, pour le calcul de produits scalaires et de normes. Si $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ est une base orthonormée de $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, et si $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont de coordonnées respectives $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ dans cette base, alors :

$$\|\vec{x}\|^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2, \quad \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

Ce sont les mêmes expressions que le produit scalaire et la norme usuels : elles sont simples et c'est ce qui en fait l'intérêt. Vous avez bien dû remarquer la difficulté que l'on rencontre dans le calcul de certaines normes définies sur des espaces de fonctions ou de polynômes, qui se ramènent à du calcul intégral long et pénible. Nous voulons donc nous en passer. À noter que nous savons très simplement expliciter x_k et y_k si nous en avons besoin (et là encore c'est spécifique aux bases orthonormées), puisqu'on a $x_k = \langle \vec{x}, \vec{e}_k \rangle$ et $y_k = \langle \vec{y}, \vec{e}_k \rangle$.

En particulier, lorsque nous calculons des projections orthogonales sur un sous-espace F en utilisant une base orthonormée (obtenue en général à partir de l'algorithme de Gram-Schmidt) :

$$p(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \vec{v}_1 \rangle \, \vec{v}_1 + \langle \vec{x}, \vec{v}_2 \rangle \, \vec{v}_2 = \alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2,$$

VOUS NE TOUCHEZ PAS À $\vec{v}_1$ ET $\vec{v}_2$! En utilisant le fait que $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ soit orthonormée, vous avez directement $\|p(\vec{x})\|^2 = \alpha^2 + \beta^2$. Si vous remplacez $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ par leurs expressions respectives (dans la base canonique s'il y en a une), vous n'aurez en général plus une base orthonormée et le calcul de norme deviendra infernal. Nous reparlons plus amplement des projections orthogonales dans la section *Calculs avec les projecteurs orthogonaux, les symétries orthogonales*.

Tout ce qui est prodigué ici est TOTALEMENT FAUX si la base n'est pas orthonormée et on prendra garde à ne pas appliquer ces formules hors contexte.

2 Un cas particulier TRÈS fréquent : les polynômes orthogonaux

Dans toute cette partie, $(P_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est une base de polynômes orthogonaux obtenue en appliquant l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base canonique $(X^k)_{k \in [\![0,n]\!]}$, avec un produit scalaire défini par :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_n[X], \quad \langle P, Q \rangle = \int_a^b P(t)Q(t)w(t)\mathrm{d}t,$$

où $w : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, positive et non nulle partout (en exercice nous avons été plus restrictif et exigé la stricte positivité).

Tous les problèmes sur les familles de polynômes orthogonaux commenceront invariablement par la démonstration de ces propriétés très classiques, **qu'il convient donc de savoir traiter** :

1. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a : $\deg(P_k) = k$ (*conséquence de l'égalité entre « Vect » dans l'algorithme*).
2. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a : $P_k \in \mathbb{R}_{k-1}[X]^\perp$ (*conséquence de l'orthogonalité à une base de* $\mathbb{R}_{k-1}[X]$).

D'autres propriétés classiques valables pour tout $k \in [\![0, n]\!]$:

1. Le coefficient dominant de P_k est positif (*conséquence de* $\left\langle P_k, X^k \right\rangle > 0$ *d'après l'algorithme de Gram-Schmidt*).
2. Le polynôme P_k est scindé et à racines simples, qui sont toutes dans $[a, b]$ (*difficile*).

Et enfin, nous avons un résultat d'unicité très utilisé dans les sujets de concours :

Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, P_k est l'unique polynôme de degré k, à coefficient dominant strictement positif, vérifiant : $\displaystyle\int_a^b (P_k(t))^2 w(t)\mathrm{d}t = 1$, et : $\forall Q \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$, $\displaystyle\int_a^b P_k(t)Q(t)w(t)\mathrm{d}t = 0$.

Je ne démontre rien de tout cela, c'est un exercice.

2.1 Comment utiliser ces polynômes orthogonaux ?

Je ne m'étendrai pas sur leurs nombreuses utilisations (dans le calcul approché d'intégrales et l'étude de certaines équations différentielles linéaires par exemple). **Je ne parlerai pas non plus de leur utilisation dans le calcul de distances**, puisqu'en cela ils ne montrent rien de spécifique aux polynômes. Je veux seulement que vous sachiez comment mobiliser leurs propriétés. La première propriété majeure utilisée est l'orthogonalité aux polynômes de degré inférieur :

Si $\deg(Q) < k$ alors $\langle P_k, Q\rangle = \displaystyle\int_a^b P_k(t)Q(t)w(t)\mathrm{d}t = 0$. $(*)$

Soyez bien attentifs à cela. Souvent de l'orthonormalité vous ne retenez que l'aspect unitaire, alors que c'est (presque) inutile. La seconde propriété majeure utilisée est l'**unicité**, que je réécris un peu différemment :

Si P est orthogonal à tout polynôme de degré strictement inférieur (c'est-à-dire :
$\forall Q \in \mathbb{R}[X]$, $\deg(Q) < \deg(P) \Rightarrow \displaystyle\int_a^b P(t)Q(t)w(t)\mathrm{d}t = 0$),
alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $P = \lambda P_k$, où $k = \deg(P)$. $(\dagger)$

Réfléchissez à comment le déduire du résultat d'unicité (remarquez les hypothèses devenues moins contraignantes). On explicite alors λ en comparant les coefficients dominants, ou en calculant la norme de P si on y parvient.

Enfin, la troisième propriété majeure est... Que c'est une base orthonormée ! En particulier, on a les différentes formules rappelées dans la section : $P = \sum\limits_{k=0}^{n} \langle P, P_k\rangle\, P_k$, $\|P\|^2 = \sum\limits_{k=0}^{n} (\langle P, P_k\rangle)^2$, etc.

Cela vous donne trois stratégies pour démontrer une formule invoquant des polynômes orthogonaux. Si vous devez démontrer une égalité :

— entre **intégrales** : faites des produits scalaires avec les P_k et utilisez $(*)$ pour simplifier ;

— de la forme « un polynôme = $\bigstar \cdot P_k$ » : montrez que le membre de gauche vérifie la propriété $(\dagger)$ (on vous donne en général des indications pour montrer que les intégrales sont nulles : intégrer par parties, etc.) ;

— de la forme « un polynôme = une somme avec plusieurs P_k » : utilisez les expressions explicites des vecteurs, normes, etc., dans une base orthonormée.

Ce n'est pas exhaustif mais cela vous permettra déjà d'y voir plus clair.

Exemple 1. (illustration du premier cas) Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Que vaut $\displaystyle\int_a^b P_n(t)w(t)\mathrm{d}t$? J'affirme que même sans expliciter P_n, nous pouvons calculer cette intégrale. En effet, ce n'est rien d'autre que $\langle P_n, 1\rangle$, or $0 < n$ par hypothèse et donc d'après $(*)$: $\langle P_n, 1\rangle = \displaystyle\int_a^b P_n(t)w(t)\mathrm{d}t = 0$.

Exercice 1. (illustration du second cas) Soit $n \in \mathbb{N}$. On prend ici $w = 1$, $[a,b] = [-1,1]$, de sorte que $(P_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ soit orthonormée pour le produit scalaire $(P,Q) \mapsto \displaystyle\int_{-1}^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$. On pose : $L_n = \dfrac{1}{2^n n!}\left((X^2-1)^n\right)^{(n)}$.

1. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ et tout $k \in [\![0,n]\!]$, montrer en intégrant par parties :

$$\int_{-1}^1 L_n(t)P(t)\mathrm{d}t = \frac{(-1)^k}{2^n n!}\int_{-1}^1 \left((t^2-1)^n\right)^{(n-k)} P^{(k)}(t)\mathrm{d}t.$$

On déplorera bien sûr l'abus de notation « à la physicienne ».

2. En déduire que L_n vérifie (†), puis : $L_n = \sqrt{\frac{2}{n+1}} P_n$ (il faudra calculer $\|L_n\|^2$). Cette identité permet d'en déduire P_n sans même avoir à appliquer l'algorithme d'orthonormalisation, ce qui est plus commode.

Exemple 2. (illustration du troisième cas) Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Démontrons qu'il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $XP_n = \alpha P_{n+1} + \beta P_n + \gamma P_{n-1}$. Le fait qu'il apparaisse une somme de P_k dans le membre de droite fait penser au troisième cas de figure : voyons en quoi le déduire de l'expression explicite de XP_n dans la base orthonormée $(P_k)_{k\in[\![0,n+1]\!]}$ (attention au fait que $\deg(XP_n) = n+1$). On a :

$$XP_n = \sum_{k=0}^{n+1} \langle XP_n, P_k\rangle P_k.$$

Si on isole les termes pour $k \in \{n-1, n, n+1\}$, on obtient une égalité proche du résultat voulu :

$$XP_n = \underbrace{\langle XP_n, P_{n+1}\rangle}_{=\alpha} P_{n+1} + \underbrace{\langle XP_n, P_n\rangle}_{=\beta} P_n + \underbrace{\langle XP_n, P_{n-1}\rangle}_{=\gamma} P_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} \langle XP_n, P_k\rangle P_k.$$

Il reste à justifier que $\langle XP_n, P_k\rangle = 0$ pour tout $k \leqslant n-2$. Pour cela, on note que :

$$\forall k \in [\![0, n-2]\!], \quad \langle XP_n, P_k\rangle = \int_a^b tP_n(t)P_k(t)w(t)\mathrm{d}t = \int_a^b P_n(t)(tP_k(t))w(t)\mathrm{d}t = \langle P_n, XP_k\rangle \overset{(*)}{=} 0$$

car $\deg(XP_k) = k+1 \leqslant n-1 < n$, d'où le résultat : $XP_n = \alpha P_{n+1} + \beta P_n + \gamma P_{n-1}$.

3 ✓ Pour d'autres calculs : trace, produit matriciel, etc.

Retenez UNE quantité qui revient tout le temps dans un contexte géométrique :

$$\langle \vec{e}_i, f(\vec{e}_j)\rangle, \text{ et son équivalent matriciel : } E_i^\top A E_j,$$

où $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ est une base orthonormée de E dans le premier cas, et $(E_1, \ldots, E_n)$ la base canonique de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (qui est aussi une base orthonormée, pour le produit scalaire usuel $(X, Y) \mapsto X^\top Y$). Connaître ces deux quantités permet en principe de TOUT savoir sur f ou sur A : comme on l'a vu, elles donnent leurs coefficients (ceux de la matrice de f dans $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ dans le cas de l'endomorphisme). Notez par ailleurs :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!], \; a_{i,j} = E_i^\top A E_j.$$

Faites le calcul pour vous en convaincre, ou utilisez l'expression des coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée du cours (puis appliquez ce résultat à $f(\vec{e}_j)$).

Puisque ces quantités donnent des coefficients matriciels, elles donnent aussi la trace :

$$\mathrm{tr}(f) = \sum_{k=1}^{n} \langle f(\vec{e}_k), \vec{e}_k\rangle, \quad \text{et :} \quad \mathrm{tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} E_k^\top A E_k.$$

Guettez donc toute propriété que l'énoncé donne sur ces produits scalaires. Mais notez aussi (on y pense moins) qu'on peut en déduire des produits matriciels : il y a une ressemblance entre les formules :

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}, \text{ et : } \langle \vec{x}, \vec{y}\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle \vec{x}, \vec{e}_k\rangle \langle \vec{e}_k, \vec{y}\rangle.$$

Si les vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont deux vecteurs $\vec{x} = \vec{u}_i$ et $\vec{y} = \vec{u}_j$ d'une famille de vecteurs, alors le parallèle devient absolu. Vous pouvez par conséquent simplifier des produits entre matrices de familles de vecteurs (exprimés dans une base ORTHONORMÉE) dès que vous avez des relations d'orthogonalité.

Exercice 2. Soit $\mathcal{F} = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ une famille de vecteurs de E, et soit $G_\mathcal{F}$ la matrice de $\mathcal{F}$ dans une base orthonormée $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$. Montrer que $\mathcal{F}$ est une famille de vecteurs orthogonaux si et seulement si $G_\mathcal{F}^\top G_\mathcal{F}$ est diagonale, et est une base orthonormée si et seulement si $G_\mathcal{F}^\top G_\mathcal{F} = \mathrm{I}_n$.

Songez enfin que pour les endomorphismes **autoadjoints**, vous avez toujours une base qui recoupe les deux meilleures propriétés possibles d'une base : une base ORTHONORMÉE constituée de VECTEURS PROPRES. C'est le théorème spectral. Commencez **toujours** une réflexion sur ces endomorphismes en invoquant une telle base (plus de détails dans la section *Utilisation des endomorphismes autoadjoints*).

3.1 ☢ Démonstration de nouvelles identités très générales (et magnifiques)

La formule :

$$\forall \vec{x} \in E, \quad \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \langle x, \vec{e}_i \rangle \, \vec{e}_i$$

donne une écriture EXPLICITE de TOUT vecteur $\vec{x}$ en fonction des $\vec{e}_i$. L'explicitation est extrêmement utile.

On peut utiliser cette identité en des circonstances qui ne sont *a priori* pas géométriques. Si l'on vous demande de démontrer une identité de la forme :

$$\forall \vec{x} \in E, \quad \vec{x} = \sum (\text{réel dépendant de } \vec{x}) \times (\text{vecteur indépendant de } \vec{x}),$$

avec E un espace préhilbertien ($\mathbb{R}^n$, $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, les espaces de fonctions, de polynômes, etc.), alors il y a fort à parier que ces vecteurs indépendants de $\vec{x}$ soient une base orthonormée pour un produit scalaire que vous aurez à déterminer, et dans ce cas les réels en facteur ne sont rien d'autre que les produits scalaires de $\vec{x}$ avec les vecteurs de cette base orthonormée : en les calculant, vous aurez l'identité désirée !

Il manque un aspect crucial de la méthode pour qu'elle soit payante : comment reconnaître le produit scalaire à utiliser ? et la base orthonormée ? Pour cela, suivez ces conseils, applicables en quasiment toutes circonstances :

— vous prenez pour produit scalaire :

$$\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, \quad \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum (\text{le réel dépendant de } \vec{x}) \times (\text{le réel dépendant de } \vec{y})\,;$$

pour comprendre pourquoi ce choix est pertinent, comparons ce qu'on sait être vrai en toute généralité dans une base orthonormée, et ce que l'on a ici :

Ce qu'on sait	Ce qu'on veut
$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{x}, \vec{e}_i \rangle \langle \vec{y}, \vec{e}_i \rangle$	?
$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \langle x, \vec{e}_i \rangle \, \vec{e}_i$	$\vec{x} = \sum (\text{réel dépendant de } \vec{x}) \times (\text{vecteur indépendant de } \vec{x})$

Ce parallèle est cohérent si l'on pose, par identification :

$$\langle \vec{x}, \vec{e}_i \rangle = (\text{le réel dépendant de } \vec{x}), \qquad (\text{et : } \vec{e}_i = (\text{vecteur indépendant de } \vec{x}))$$

et alors, toujours en suivant ce parallèle, on peut compléter la case en haut à droite du tableau :

Ce qu'on sait	Ce qu'on veut
$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{x}, \vec{e}_i \rangle \langle \vec{y}, \vec{e}_i \rangle$	$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum (\text{le réel dépendant de } \vec{x}) \times (\text{le réel dépendant de } \vec{y})$
$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \langle x, \vec{e}_i \rangle \, \vec{e}_i$	$\vec{x} = \sum (\text{réel dépendant de } \vec{x}) \times (\text{vecteur indépendant de } \vec{x})$

— vous vérifiez que la famille constituée des vecteurs indépendants de $\vec{x}$, dans la somme de l'identité à prouver, est orthonormée pour ce produit scalaire, et si le cardinal est suffisant alors c'est une base (à noter que les espaces de fonctions et polynômes sont en général de dimension infinie : vous aurez éventuellement besoin de restreindre le degré, par exemple, pour vous ramener à la dimension finie).

La stratégie sera plus parlante avec l'exemple ci-dessous.

En général, ce type de raisonnement est fructueux dans des espaces vectoriels de fonctions ou de polynômes, parce que la variété de produits scalaires est plus riche. Dans $\mathbb{R}^n$, $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, tous les produits scalaires se ressemblent trop pour proposer une grande variété de nouvelles identités issues de cette formule. Vous aurez donc, en général, à penser à ce laïus pour démontrer une identité de la forme :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad P = \sum (\text{réel dépendant de } P) \times (\text{polynôme sans rapport avec } P),$$

et en général le réel dépendant de P est proportionnel à $P(a)$, $P^{(k)}(a)$, $\displaystyle\int_I P(t)f(t)\mathrm{d}t$, etc. (je donne les exemples les plus courants issus de produits scalaires). De même si je remplace les polynômes par des fonctions.

Exemple 3. Démonstration géométrique de la formule de Taylor pour les polynômes. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrons :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k.$$

Pour voir en quoi cela découlerait des considérations géométriques développées ci-dessus, il faut identifier : quel produit scalaire utiliser ? quelle base orthonormée ? Suivant la discussion ci-dessus :

— le « réel dépendant de P » est $P^{(k)}(a)$;

— le « polynôme sans rapport avec P » est $\frac{(X-a)^k}{k!}$.

Nous introduisons donc le produit scalaire défini par :

$$\forall (P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2, \quad \langle P, Q\rangle = \sum_{\ell=0}^{n} P^{(\ell)}(a)Q^{(\ell)}(a).$$

Nous vous laissons vérifier qu'il s'agit effectivement d'un produit scalaire. La seule subtilité est pour la propriété de séparation : pour cela, vous aurez besoin de remarquer que si $\langle P, P\rangle = 0$, alors a est une racine de P d'ordre de multiplicité au moins $n+1$, ce qui est impossible si P est non nul pour des raisons de degré.

Pour montrer l'identité voulue, regardons d'abord si les polynômes $\frac{(X-a)^k}{k!}$, pour $k \in [\![0,n]\!]$, forment une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$: nous les diviserons au besoin par leurs normes s'ils ne sont qu'orthogonaux. Pour cela, il nous est nécessaire de calculer les dérivées successives de $(X-a)^k$ pour $k \in [\![0,n]\!]$: on a facilement :

$$\forall \ell \in [\![0,k-1]\!], \quad \left((X-a)^k\right)^{(\ell)} = k(k-1)\cdots(k-\ell+1)(X-a)^{k-\ell} = \frac{k!}{(k-\ell)!}(X-a)^{k-\ell}, \quad \text{et :}$$

$$\left((X-a)^k\right)^{(k)} = k!, \quad \text{et :} \quad \forall \ell \in [\![k+1,n]\!], \quad \left((X-a)^k\right)^{(\ell)} = 0.$$

On en déduit alors que TOUTES les dérivées successives de $(X-a)^k$ s'annulent en a, sauf la k^{e} (qui est un polynôme constant égal à $k!$). Ainsi, dès qu'on fait un produit scalaire impliquant $(X-a)^k$ (pour le produit scalaire défini plus haut), tous les termes de la somme sont nuls sauf celui correspondant à l'indice k. On a donc facilement :

$$\forall (k,k') \in [\![0,n]\!]^2, \quad \left\langle (X-a)^k, (X-a)^{k'}\right\rangle = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{\ell=0\\ \ell\neq k}}^{n} 0\times 0 + (k!)^2 = (k!)^2 & \text{si } k=k', \\ \displaystyle\sum_{\substack{\ell=0\\ \ell\neq k\\ \ell\neq k'}}^{n} 0\times 0 + k!\times 0 + 0\times (k')! = 0 & \text{si } k\neq k', \end{cases}$$

ce dont on déduit que la famille $\left(\frac{(X-a)^k}{k!}\right)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est orthonormale et de cardinal $n+1$, donc est une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$. On en déduit, en adaptant ici la formule $\vec{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} \langle \vec{x}, \vec{e_i} \rangle \, \vec{e_i}$:

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad P = \sum_{k=0}^{n} \left\langle P, \frac{(X-a)^k}{k!} \right\rangle \frac{(X-a)^k}{k!},$$

et comme, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et tout $k \in [\![0,n]\!]$, on a :

$$\left\langle P, \frac{(X-a)^k}{k!} \right\rangle = \frac{1}{k!} \sum_{\ell=0}^{n} P^{(\ell)}(a) \underbrace{\left(\left((X-a)^k\right)^{(\ell)}\right)(a)}_{=0 \text{ si } \ell \neq k} = \frac{1}{k!} P^{(k)}(a) \cdot k! = P^{(k)}(a),$$

on en déduit :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad P = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a) \frac{(X-a)^k}{k!},$$

ce qu'on voulait démontrer.

Nous vous laissons vérifier l'efficacité de cette approche avec la classique *interpolation de Lagrange*, dont nous redémontrons la formule la plus importante. En vérité, ce sera plus facile dans cet exercice que dans l'exemple ci-dessus.

Exercice 3. (interpolation de Lagrange) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \ldots, a_n$ des réels distincts. On pose :

$$\forall (P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2, \quad \langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{n} P(a_k) Q(a_k).$$

1. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit $(L_0, \ldots, L_n)$ la famille des polynômes interpolateurs de Lagrange associée à $(a_0, \ldots, a_n)$. Montrer que c'est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Conclure que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a : $P = \sum\limits_{i=0}^{n} P(a_i) L_i$.

Cette approche n'est pas seulement fructueuse avec l'identité $\vec{x} = \sum\limits_{i=0}^{n} \langle x, \vec{e_i} \rangle \, \vec{e_i}$. Tout le propos ci-dessus se généralise, par exemple, à l'identité : $\|\vec{x}\|^2 = \sum\limits_{i=0}^{n} \left(\langle x, \vec{e_i} \rangle\right)^2$. Voici, en exercice, un exemple célèbre que vous avez dû rencontrer en Physique.

Exercice 4. (inégalité de Bessel et séries de Fourier) On définit un produit scalaire sur $E = \mathrm{C}^0([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ ainsi :

$$\forall (f,g) \in E^2, \quad \langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(t) \mathrm{d}t.$$

1. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \forall t \in [-\pi,\pi], \quad c_n(t) = \cos(nt),\ s_n(t) = \sin(nt), \quad \text{et : } c_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

   et : $\forall N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $F_N = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((c_0, c_1, \ldots, c_N, s_1, \ldots, s_N)\right)$. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, la famille $(c_0, c_1, \ldots, c_N, s_1, \ldots, s_N)$ est une base orthonormale de F_N pour ce produit scalaire.
2. On note p_N la projection orthogonale de E sur F_N (qui existe car F_N est de dimension finie). On pose aussi :

$$\forall f \in E,\ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) \mathrm{d}t,\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) \mathrm{d}t, \quad a_0 = \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \mathrm{d}t.$$

Montrer que pour toute fonction $f \in E$ et tout entier $N \geqslant 1$, on a :

$$\|f\|^2 \geqslant \|p_N(f)\|^2 = a_0^2 + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n^2 + b_n^2\right).$$

3. Soit $f \in E$. Montrer que la série $\sum_{n \geqslant 1} \left(a_n^2 + b_n^2\right)$ converge, et qu'on a :

$$a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) \leqslant \|f\|^2.$$

En vérité, nous pouvons démontrer qu'il y a égalité avec ces hypothèses : c'est l'identité de Parseval.

4. **Application.** Soit $f \in E$. Montrer le lemme de Riemann-Lebesgue :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t = 0, \quad \lim_{n \to +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t = 0.$$

Contrairement à ce que l'on observe souvent lorsque ce lemme est démontré en exercice ou dans un problème, ICI NOUS N'AVONS PAS BESOIN DE LA CLASSE C^1 DE f ! Au vu des complications que nécessite parfois cette hypothèse (calcul de limite avec un développement limité lourd, et théorème de la limite de la dérivée), c'est un IMMENSE apport.

Cette méthode est un des nombreux succès géniaux de la géométrie euclidienne généralisée à des espaces vectoriels abstraits (nous n'avons pas besoin de vous convaincre que la théorie des séries de Fourier a des applications hors des mathématiques), et elle donne tout son crédit à ce chapitre.

Table des matières

Table des figures