Méthodes – Équations différentielles linéaires d'ordre 2

Le théorème de Cauchy linéaire : comment utiliser l'unicité des solutions

Ce théorème ne permet pas une détermination pratique des solutions, mais intervient dans les questions théoriques (lorsque les solutions ne sont pas explicitées, mais qu'on désire tout de même savoir des choses dessus). Nous traduisons là l'unicité des solutions à un problème de Cauchy :

Théorème de Cauchy : utilisation pratique

1. Pour montrer que deux solutions sont **égales**, il suffit de montrer que leurs dérivées (à un ordre suffisant) sont **égales en un seul réel**.
2. Pour montrer qu'une solution est **nulle**, il suffit de montrer que ses dérivées (à un ordre suffisant) sont simultanément **nulles en un seul réel**.

Par contraposée, si une solution et ses dérivées ne **s'annulent pas** simultanément en un réel, alors elle est **non identiquement nulle**.

C'est bien sûr très économique de se ramener aux valeurs en un seul point. D'où l'intérêt.

Exemple 1. Soit y une application de classe C^1 sur I et vérifiant : $y' = ay$, avec $a : I \to \mathbb{R}$ une application continue. On aimerait rendre rigoureux ce raisonnement :

$$y' = ay \iff \frac{y'}{y} = a \iff \exists c \in \mathbb{R},\ \ln(|y|) = A + c \iff \exists c \in \mathbb{R},\ y = \pm e^c e^A,$$

où A est une primitive de a. Il permet en effet de retrouver rapidement la structure des solutions de l'équation différentielle $y' = ay$. Il n'est pas rigoureux du fait que y peut s'annuler sur I *a priori*. Grâce au théorème de Cauchy, montrons que ce n'est pas le cas, sauf si c'est la fonction nulle : s'il existe $t_0 \in I$ tel que $y(t_0) = 0$, montrons que $y = 0$; cela revient à démontrer que y et la fonction nulle sont égales. Or y et la fonction nulle sont solutions du même problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' &= ay, \\ y(t_0) &= 0. \end{cases}$$

puisque la fonction nulle s'annule en particulier en t_0. Donc, par unicité de la solution (théorème de Cauchy linéaire), on en déduit : $y = 0$. Par contraposition, une solution non nulle ne s'annule jamais, et la division par y ci-dessus est donc licite.

Exemple 2. Soient $a, b : I \to \mathbb{R}$ deux applications continues sur I. Soit $y : I \to \mathbb{C}$ une application de classe C^2 sur I et solution de $(E) : y'' + ay' + by = 0$. Nous allons montrer que, pour que y soit à valeurs réelles, il suffit que y et y' prennent une valeur réelle *en un seul réel* t_0 !

Pour cela, notons que y est à valeurs réelles si et seulement si : $\forall t \in I,\ y(t) = \overline{y(t)}$. Autrement dit, l'application y est à valeurs réelles si et seulement si les fonctions y et $\bar{y}$ sont égales : on est bien dans le cas d'étude de l'encadré ci-dessus... Du moins, si $\bar{y}$ est bien une solution de (E) : c'est une évidence, si l'on considère le conjugué de l'égalité $y'' + ay' + b = 0$, en se souvenant que a et b sont supposées à valeurs réelles.

Ainsi, y et $\bar{y}$ sont deux solutions de (E), donc d'après le théorème de Cauchy linéaire elles sont égales si et seulement si (y, y') et $(\bar{y}, \bar{y}')$ coïncident en au moins un réel t_0. Or $y(t_0) = \overline{y(t_0)}$ signifierait que $y(t_0) \in \mathbb{R}$, et de même pour $y'(t_0)$: d'où le résultat annoncé.

Exemple 3. Soit $a : I \to \mathbb{R}$ une application continue et *paire* sur un intervalle I centré en 0. Soit $y : I \to \mathbb{C}$ une application de classe C^2 sur I et solution de $(E) : y'' + ay = 0$. On se demande à quelle condition y est elle-même une fonction paire, c'est-à-dire : à quelle condition a-t-on $y(t) = y(-t)$ pour tout $t \in I$? Pour cela, on note que si y est solution de (E), alors $y_{\mathrm{sym}} : t \mapsto y(-t)$ est aussi solution de (E), vu que :

$$\forall t \in I,\ y'_{\mathrm{sym}}(t) = -y'(-t), \quad \text{et :} \quad \forall t \in I,\ y''_{\mathrm{sym}}(t) = (-1)^2 y''(-t) = y''(-t),$$

de sorte que :

$$\begin{aligned}\forall t \in I, \quad y_{\mathrm{sym}}''(t) + a(t)y_{\mathrm{sym}}(t) = y''(-t) + a(t)y(-t) &= y''(-t) + a(-t)y(-t) && \text{(car } a \text{ est paire)}\\ &= 0 && \text{(car } y \text{ vérifie } (E)).\end{aligned}$$

Ainsi y et y_{sym} sont solutions de la même équation différentielle (E) du second ordre : elles sont donc égales si et seulement si elles vérifient la même condition initiale. Or :

$$y_{\mathrm{sym}}(0) = y(0), \quad y_{\mathrm{sym}}'(0) = -y'(0),$$

donc y et y_{sym} sont égales si et seulement si elles vérifient la même condition initiale, si et seulement si : $y(0) = y(0)$, et : $y'(0) = -y'(0)$. La première condition est toujours vérifiée, et la seconde est vérifiée si et seulement si $y'(0) = 0$.

En conclusion, une solution y de (E) est paire si et seulement si : $y'(0) = 0$.

Exercice 1.

1. Trouver un résultat analogue pour les solutions *impaires* (on garde la même hypothèse sur a).
2. Trouver un résultat analogue dans le cas d'une équation différentielle de la forme $y'' + ay' + by = 0$. Soyez vigilants : si a et b sont paires, le raisonnement ci-dessus ne fonctionne plus, cherchez pourquoi. Vous devez changer l'hypothèse de parité, sur a ou sur b.

1 ☢ L'isomorphisme $\Phi : S \to K^2$ du théorème de structure

Lorsque les rappels de l'encart de la page 1 ne sont d'aucune utilité, on peut recourir à une formulation équivalente (mais plus puissante car elle a de la *structure*) du théorème de Cauchy linéaire. La démonstration du théorème de structure de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2, montre aussi en passant que pour $t_0 \in I$ fixé, l'application :

$$\Phi : y \mapsto (y(t_0), y'(t_0))$$

est un isomorphisme entre l'espace vectoriel des solutions de $y'' + ay' + b = 0$ (qu'on note S ici) et K^2. Comme un isomorphisme préserve tous les résultats relatifs à la structure d'espace vectoriel, on en déduit en particulier que Φ préserve les familles libres : ainsi (f, g) est une famille libre de S si et seulement si $\Phi((f,g)) = \left(\begin{pmatrix} f(t_0) \\ f'(t_0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g(t_0) \\ g'(t_0) \end{pmatrix}\right)$ est libre (de même avec les bases ; c'est de toute façon équivalent pour une famille de cardinal 2). Ceci permet souvent d'avoir des informations sur le comportement global des fonctions, à l'aide seulement d'informations locales (c'est-à-dire *en un seul point* t_0), et inversement.

Exemple 4. Soient $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue sur $\mathbb{R}$, et (f, g) un système fondamental de solutions de l'équation différentielle : $y'' + qy = 0$. Montrons que f et g ne peuvent pas s'annuler en le même réel : il serait insuffisant d'invoquer l'unicité de la solution à un problème de Cauchy ici, puisque pour une équation différentielle d'ordre 2 il nous faut aussi une condition initiale sur la dérivée (ce que nous n'avons pas ici). Puisque c'est insuffisant, songeons au résultat rappelé ci-dessus : si f et g s'annulent en le même réel t_0, alors : $f(t_0) = g(t_0) = 0$. Mais alors, la famille $\left(\begin{pmatrix} f(t_0) \\ f'(t_0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g(t_0) \\ g'(t_0) \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ f'(t_0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ g'(t_0) \end{pmatrix}\right)$ est clairement liée, donc $\Phi^{-1}\left(\begin{pmatrix} f(t_0) \\ f'(t_0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g(t_0) \\ g'(t_0) \end{pmatrix}\right) = (f, g)$ est aussi liée (puisque Φ^{-1} est un isomorphisme, il conserve tous les résultats relatifs à la structure d'espace vectoriel) ; ainsi (f, g) n'est pas un système fondamental de solutions : absurde.

Un autre argument serait que si f et g s'annulent en t_0, alors toute autre solution aussi, puisqu'elle est combinaison linéaire de f et g ; mais alors, les problèmes de Cauchy imposant une valeur non nulle en condition initiale n'auraient pas de solution. C'est absurde, puisque le théorème de Cauchy linéaire assure l'existence de solutions vérifiant n'importe quelle condition initiale prescrite.

Si l'utilisation des isomorphismes vous paraît trop savante : le wronskien permet le même type de raisonnement, mais avec l'avantage (selon les goûts) d'être un outil pouvant être manipulé de façon purement calculatoire : nulle abstraction là derrière. Voir la section *Utilisation du wronskien* pour en savoir plus.

Exercice 2. Montrer que, avec les mêmes notations que dans l'exemple 4, les zéros de f et g sont « entrelacés », c'est-à-dire : si a et b sont deux zéros consécutifs de f, alors il existe $t_0 \in]a, b[$ tel que : $g(t_0) = 0$. C'est plus difficile que dans l'exemple ci-dessus, parce qu'on ne peut pas se contenter de raisonner sur un t_0 fixé : considérer l'application $W : t \mapsto \begin{vmatrix} f(t) & g(t) \\ f'(t) & g'(t) \end{vmatrix}$, qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ si f et g forment un système fondamental de solutions (pourquoi ?).

Table des matières

1 ☢ L'isomorphisme $\Phi : S \to K^2$ du théorème de structure **2**