MÉTHODES – Équations différentielles linéaires d'ordre 2

✓ **Compléments sur les équations différentielles linéaires vues en 1re année**

La plupart du contenu exigible sur les équations différentielles linéaires vues en 1re année, c'est-à-dire :
— celles d'ordre 1 ;
— celles d'ordre 2 à coefficients constants, et second membre de la forme « exponentielle × polynôme » ;
ne sera pas rappelé ici. Nous ne donnons ici que quelques compléments de méthodologie :
— pour accélérer la résolution des équations différentielles du premier ordre ;
— pour **les problèmes de raccords**.

1 Résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre « en un clin d'œil »

Nous proposons ici une façon de trouver la forme générale des solutions de :

$$\forall t \in I, \quad y'(t) + a(t)y(t) = c(t), \tag{E}$$

sans passer par la structure classique, à savoir :
— résolution de l'équation différentielle linéaire homogène associée ;
— recherche d'une solution particulière.

Le seul avantage de l'approche que nous proposons là est **rédactionnel** : c'est plus rapide. Mais attention à ne pas l'utiliser sans la maîtriser : vous envoyez un signal déplorable au correcteur si vous utilisez une méthode « hors des clous » en débitant des âneries.

L'idée est de faire apparaître, dans le membre de gauche, la dérivée d'un **produit** (ce qu'on saurait intégrer facilement). On note en effet que le membre de gauche est presque de la forme $u'v + uv'$; il manque simplement une fonction en facteur de y' pour que ce soit réellement de cette forme. On fait alors une multiplication convenable pour « vraiment » reconnaître la dérivée d'un produit. On y parvient en multipliant (E) par $e^{A(t)}$, où A est une primitive de a. On obtient alors l'équation équivalente :

$$\forall t \in I, \quad y'(t)e^{A(t)} + a(t)e^{A(t)}y(t) = c(t)e^{A(t)},$$

et le membre de gauche est la dérivée de $t \mapsto e^{A(t)}y(t)$ (dérivez, pour vous en convaincre ! c'est important de ne pas l'apprendre machinalement, ou vous ferez des bêtises). Par conséquent, en intégrant cette égalité entre t_0 et t (où t_0 est n'importe quel élément de I), *sans oublier la constante d'intégration*, on obtient :

$$\exists \alpha \in K, \quad \forall t \in I, \quad e^{A(t)}y(t) = \int_{t_0}^{t} c(x)e^{A(x)}\mathrm{d}x + \alpha.$$

À ce stade, il reste à :
— multiplier l'égalité ci-dessus par $e^{-A(t)}$ pour isoler $y(t)$;
— calculer une primitive de $x \mapsto c(x)e^{A(x)}$ pour simplifier l'intégrale ci-dessus (ce que vous auriez de toute façon dû faire en utilisant la méthode de variation de la constante : il n'y a donc pas d'étape supplémentaire ici) ;
et c'est terminé.

2 Problèmes de raccord

Lorsque nous étudions une équation différentielle du premier ordre :

$$\forall t \in I, \quad a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t), \tag{E}$$

avec a une application continue qui *s'annule* sur I (disons une seule fois en t_0, pour simplifier la discussion), nous avons à gérer des problèmes de raccord : on étudie l'équation différentielle sur $I_1 = I \cap]-\infty, t_0[$ et sur $I_2 = I \cap]t_0, +\infty[$, et on en déduit les solutions sur ces deux intervalles. Ensuite, il s'agit de déterminer les solutions sur I : pour cela, on dit qu'une telle solution définit, par restriction, des solutions sur I_1 et sur I_2. La résolution sur ces deux intervalles nous permet alors d'expliciter la restriction de y sur I_1 et I_2. **On fait attention à ne pas nommer avec la même lettre toutes les constantes multiplicatives qui apparaissent**.

Exemple 1. L'équation différentielle :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad ty'(t) + 2y(t) = t(3-t)e^{-t},$$

a pour solutions sur $I_1 =]-\infty, 0[$ et $I_2 =]0, +\infty[$ les applications de la forme $t \mapsto \frac{\lambda}{t^2} + t^3 e^{-t}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Donc, si y est une solution sur $\mathbb{R}$, c'est en particulier une solution sur I_1 et sur I_2, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall t \in I_1,\ y(t) = \frac{\lambda}{t^2} + te^{-t}, \quad \forall t \in I_2,\ y(t) = \frac{\mu}{t^2} + te^{-t}.$$

On ne prend pas le même λ dans les deux cas, ils n'ont aucune raison d'être égaux !

Ensuite, nous avons à déterminer à quelle condition l'application est dérivable (et donc continue) en le réel manquant. C'est l'objet de la section 2.2. Une fois qu'on a démontré la dérivabilité sur I, il → page 3 n'est pas nécessaire de vérifier que y est bien solution sur I en détails : en effet, elle vérifie (E) pour $t \in I_1$ et $t \in I_2$ (vu qu'elle est égale à une des solutions explicitées dans l'étude sur I_1 et I_2), donc par continuité (effectivement démontrée !), quand $t \to t_0$, l'égalité reste valable. On se concentre donc sur le problème de dérivabilité. Mais avant cela, je dis quelques mots sur les valeurs absolues *a priori* gênantes qui apparaissent lors de la résolution sur I_1 et I_2.

2.1 ✓ Gérer les valeurs absolues

Lorsque nous étudions (E) sur l'intervalle I, avec a qui s'annule en $t_0 \in I$, et qu'après division par $a(t)$ nous obtenons une équation différentielle sur $I_1 = I \cap]-\infty, t_0[$ et sur $I_2 = I \cap]t_0, +\infty[$ de la forme :

$$y' + \frac{u'}{u} y = \frac{c}{a} \quad \text{(il devrait apparaître } \frac{b}{a} \text{ en facteur de } y, \text{ mais nous avons simplifié cette fraction)},$$

on sait que les solutions sur I_1 ou sur I_2 *de l'équation homogène associée* sont de la forme $\lambda e^{-\ln(|u|)}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$: on note la présence de valeurs absolues. C'est une situation très fréquente. Or vous n'aimez pas les valeurs absolues : nous allons voir ici qu'en vérité, elles s'enlèvent à très peu de frais, **et les solutions ont la même description sur I_1 et I_2.**

En effet, u ne s'annule pas sur I_1 ni sur I_2, donc par continuité **elle est de signe constant** (c'est une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires). Disons par exemple que u est négative sur I_1 et positive sur I_2. Alors sur I_1, on a $|u| = -u$ (c'est la définition de la valeur absolue : $|x| = -x$ si $x < 0$ et $|x| = x$ sinon), et les solutions sont donc de la forme :

$$\lambda e^{-\ln(|u|)} = \lambda e^{-\ln(-u)} = \frac{\lambda}{-u},$$

tandis que sur I_2 on a $|u| = u$, donc les solutions sont de la forme :

$$\lambda e^{-\ln(u)} = \frac{\lambda}{u}.$$

En apparence, nous n'avons pas les mêmes solutions. Mais puisque l'ensemble des solutions d'une équation homogène est un espace vectoriel, *l'engendrer par une fonction ou par la fonction opposée ne change rien.* Ainsi, les solutions homogènes sur I_1 sont aussi de la forme : $\frac{\lambda}{u}$.

Cela revient aussi à changer λ en $\lambda' = -\lambda$. Quand λ parcourt $\mathbb{R}$, λ' parcourt aussi $\mathbb{R}$, donc on paramètre ainsi le même ensemble de solutions.

En conclusion : peu importe l'intervalle où l'on se restreint, l'ensemble des solutions homogènes reste le même.

Vous ferez donc EXACTEMENT les mêmes calculs sur I_1 et I_2, en particulier lors de la recherche d'une solution particulière : si vous n'avez pas la même solution obtenue sur I_1 et sur I_2 (disons par la méthode de variation de la constante), **vous avez fait une erreur de calcul** (en général l'oubli d'un signe moins).

2.2 ✓ Le raccord : cas de la dérivabilité

Une fois qu'on a déterminé y sur I_1 et sur I_2, voyons comment étudier efficacement à quelle condition cela définit une solution sur I. Nous avons déjà dit ci-dessus que cela revient à étudier la dérivabilité en le point de raccord t_0. En fait, comme une condition nécessaire (mais non suffisante) pour être dérivable est d'être continue, et que cette condition est en général plus facile à vérifier, c'est souvent la première chose qu'on vérifie, en regardant à quelle condition $\lim\limits_{t_0} y$ existe et est finie ; auquel cas, la limite trouvée est la valeur de y en t_0 (précisément par continuité), et on a comme solution :

$$y : \begin{cases} I \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} \text{expression sur } I_1 & \text{si } t \in I_1 \\ \text{expression sur } I_2 & \text{si } t \in I_2 \\ \text{limite trouvée en } t_0 & \text{si } t = t_0. \end{cases} \end{cases}$$

(c'est souvent la même que sur I_2 et dans ce cas cette ligne est superflue)

Il reste à vérifier que y est bien dérivable en t_0.

Dans ce qui suit, nous ne nous intéressons qu'aux cas problématiques, où la condition de dérivabilité ne se voit pas « à l'œil nu ». Nous nous intéressons uniquement au cas **où il apparaît une forme indéterminée en le point de raccord t_0.**

2.2.1 ✓ Utilisation d'un développement limité

En général, calculer $\lim\limits_{t_0} y$, pour déterminer si y est continue en t_0, se fait relativement bien en levant la forme indéterminée grâce à un équivalent ou à un développement limité. C'est plus calculatoire pour le calcul de $\lim\limits_{t_0} y'$. Et c'est encore pire lorsqu'il s'agit d'étudier un problème de raccord dans le cas d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 : nous devons encore étudier la dérivée seconde !

Nous proposons une méthode qui permet d'expédier la vérification de la continuité, puis de la dérivabilité en t_0, EN MÊME TEMPS ! On se souvient en effet d'un résultat de 1re année :

$$y \text{ admet un développement limité au premier ordre en } t_0 \iff y \text{ est dérivable en } t_0.$$

Or il est parfois très rapide d'obtenir un développement limité à l'ordre 1 en 0 :
- si y s'écrit à l'aide de fonctions usuelles, dont on connaît les développements limités ;
- si y est un quotient dont le dénominateur est une puissance de t, ou peut facilement se mettre sous la forme $1-u$ (après un développement limité), afin d'utiliser le développement de $t \mapsto \frac{1}{1-t}$.

Si le point de raccord n'est pas 0, ce n'est pas grave : il suffit de s'y ramener *via* le changement de variable $u = t - t_0$ ou $u = t_0 - t$.

Exemple 2. Imaginons qu'on ait à étudier le problème de raccord d'une équation différentielle d'ordre 2, dont les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ sont de la forme :

$$y : t \mapsto \frac{\alpha\cos(t) + \beta\sin(t) + e^t}{t^2}, \qquad \text{avec } (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2.$$

Pour déterminer si cela définit une fonction dérivable en 0 (sachant qu'il n'y a pas de difficulté ailleurs), on cherche à quelle condition y admet un développement limité à l'ordre 1 en zéro. Pour cela, grâce aux développements limités usuels, on sait que pour tout t au voisinage de 0 on a :

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{\alpha\left(1-\frac{t^2}{2}+\underset{t\to 0}{o}\left(t^3\right)\right)+\beta\left(t-\frac{t^3}{6}+\underset{t\to 0}{o}\left(t^3\right)\right)+\left(1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}+\underset{t\to 0}{o}\left(t^3\right)\right)}{t^2} \\ &= \frac{\alpha+1}{t^2}+\frac{\beta+1}{t}+\frac{1-\alpha}{2}+\frac{1-\beta}{6}t+\underset{t\to 0}{o}(t)\,. \end{aligned}$$

On pousse les développements limités au numérateur à l'ordre 3, puisqu'on veut obtenir un développement de y à l'ordre 1 et qu'il faut bien tenir compte de la division par t^2.

On observe que y est dérivable en 0 si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en 0, à condition que les termes en $\frac{1}{t^2}$ et $\frac{1}{t}$ soient nuls, ce qui impose $\alpha=\beta=-1$. On en déduit que la seule solution dérivable est ici :

$$y : t \mapsto \frac{e^t-\cos(t)-\sin(t)}{t^2},$$

et il resterait encore à vérifier qu'elle est bien deux fois dérivable (vérification qui serait immédiate avec les séries entières, voir plus bas). Mais une grande partie du travail est effectuée.

Remarque. Il est aussi possible, en certaines circonstances, de reconnaître un taux d'accroissement, si y est de la forme :

$$t\mapsto \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0},\ \text{ou}\ t\mapsto\frac{t-t_0}{f(t)-f(t_0)},$$

par exemple : $t\mapsto \dfrac{e^t-1}{t}$, $t\mapsto\dfrac{t-1}{\ln(t)}$, etc. Dans ce cas, le calcul de la limite en t_0 est immédiat, par définition de la dérivée. Mais nous ne proposons pas cette approche ici, parce que procéder par un développement limité *la contient et la généralise* : calculer une limite par un taux d'accroissement est exactement équivalent à l'utilisation d'un développement limité à l'ordre 1.

2.2.2 ✓ Le théorème de la limite de la dérivée

Ci-dessus, nous avons une approche pour déterminer si y est dérivable en t_0, ce qui est suffisant en général. Mais s'il nous faut démontrer qu'elle est même de classe C^1 (inutile sauf exigence spécifique de l'énoncé), voire deux fois dérivable, ce n'est plus suffisant. Pour cela, on utilise le théorème de la limite de la dérivée, dont nous rappelons l'énoncé le plus général possible.

Théorème 1. *Soit $y : [a,b]\to\mathbb{R}$ une application. Soit $k\in\mathbb{N}$ (en général $k=0$). On suppose que :*

— *y est de classe C^k sur $[a,b]$;*

— *y est de classe C^{k+1} sur $]a,b]$ (par exemple y est obtenu par un prolongement en a d'une autre fonction définie sur $]a,b]$, et la régularité au voisinage de a reste à déterminer) ;*

— *$y^{(k+1)}$ admet une limite finie en a.*

Alors y est de classe C^{k+1} sur $[a,b]$, et on a : $y^{(k+1)}(a)=\lim\limits_{t\to a}y^{(k+1)}(t)$.

Ce n'est pas un *prolongement* de la dérivée $(k+1)^{\text{e}}$ en a : elle existe, point barre, et on a sa valeur.

Il suffit donc de calculer $\lim\limits_{t_0}y'$ ou $\lim\limits_{t_0}y''$, selon la régularité qu'on veut, ce qu'on fait par les mêmes méthodes que d'habitude : équivalents et développements limités. Mais c'est coûteux en calculs.

2.2.3 ✓ Utilisation d'un développement en série entière

Si vous démontrez que y est développable en série entière, alors vous avez immédiatement la classe C^∞ sur son intervalle ouvert de convergence (donc en particulier autour du point de raccord problématique), et donc toutes les régularités que vous désirez *d'un seul coup*. Or obtenir un développement en série entière est immédiat dans les cas où :

— y s'écrit à l'aide de fonctions usuelles, dont on connaît les développements en série entière ;

— y est un quotient dont le dénominateur est une puissance de t.

Si ce n'est pas sous cette forme, cela peut faire l'affaire si y est *l'inverse* d'une telle fonction.

Exemple 3. On étudie la régularité en 1 de la fonction $t \mapsto \begin{cases} \dfrac{t-1}{\ln(t)} & \text{si } t \neq 1, \\ 1 & \text{si } t = 1 \end{cases}$. Quitte à faire un changement de variable, cela revient à étudier la régularité en 0 de l'application :

$$y : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x}{\ln(1+x)} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Or, pour tout $x \in]-1,1[$ *non nul*, on a :

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n+1},$$ (x est supposé non nul puisqu'on a besoin de diviser par x)

tandis que pour $x = 0$, on a : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n+1} = 1$. On en déduit que l'application :

$$S : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est une somme de série entière, donc elle est de classe C^∞ sur son intervalle ouvert de convergence $]-1,1[$; en passant à l'inverse, on en déduit que $y : x \mapsto \dfrac{1}{S(x)}$ également, ce qui résout le raccord en 0.

Nous proposons donc trois méthodes, dont nous récapitulons les mérites comparés.

	Avantages	Défauts
Existence d'un DL_1	Rapide, donne *à la fois* continuité et dérivabilité	Ne suffit que pour la dérivabilité : un DL_2 ne démontre rien sur y''.
Théorème de la limite de la dérivée	Pas besoin de flair : cela marche toujours	Rédaction longue, et calculs lourds pour la limite de y' ou y''.
Développement en série entière	Rapide, peu calculatoire, donne même la classe C^∞	Il faut remarquer quand c'est possible ; pire : ne marche pas toujours (par exemple si la fonction à développer en série entière est au dénominateur d'un quotient).

Table des matières