Méthodes – Équations différentielles linéaires d'ordre 2

Équations fonctionnelles se ramenant à des équations différentielles

1 Équations faisant apparaître une intégrale

Considérons des équations de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^x t f(t)\mathrm{d}t, \qquad \text{ou : } \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) + f(x) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t, \text{ etc.}$$

On parle parfois d'équation *intégrale* pour une telle équation, bien que la terminologie pose problème.

Pour déterminer les fonctions qui vérifient de telles équations, il suffit de dériver l'égalité de sorte à ne plus avoir d'intégrale : on a alors une équation différentielle qu'on résout avec les approches classiques. Ensuite, **on n'oublie pas de vérifier la réciproque :** en effet, en dérivant, nous n'avons pas une équivalence, donc rien n'assure que les solutions de l'équation différentielle obtenue soient les mêmes que les solutions de l'équation intégrale de départ. La réciproque se vérifie en injectant les solutions candidates dans l'équation intégrale de départ, et en regardant si elle est bien vérifiée.

Il y a néanmoins un point de détail à justifier : au nom de quoi pourrait-on dériver **si f n'est pas supposée dérivable, mais seulement continue par exemple** ? Pour cela, **on utilise le théorème fondamental de l'analyse** qui, pour rappel, dit que si g est continue, alors l'application $x \mapsto \displaystyle\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$ est de classe C^1 (et sa dérivée égale g). Alors, si l'on parvient à exprimer f en fonction d'une telle intégrale, elle est de classe C^1 et on peut la dériver. En fait, par récurrence, on peut souvent démontrer que dans une telle situation, l'application est même indéfiniment dérivable.

Attention à ne pas dire de bêtise si l'intégrale n'a pas de variable dans les bornes : si l'on reprend l'exemple ci-dessus, $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ est une CONSTANTE ! Elle est donc dérivable, certes, mais de dérivée NULLE.

Exemple 1. Dans le premier exemple ci-dessus : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\int_0^x t f(t)\mathrm{d}t$, on note que si f vérifie cette égalité, alors $t \mapsto t f(t)$ est continue en tant que produit de fonctions continues, donc d'après le théorème fondamental de l'analyse l'application $x \mapsto \displaystyle\int_0^x t f(t)\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (et sa dérivée est $x \mapsto x f(x)$). Par conséquent f aussi est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et en dérivant cette égalité on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = x f(x)$. C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre, qu'on sait résoudre.

Exemple 2. Dans le deuxième exemple ci-dessus : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) + f(x) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ (nécessairement f est dérivable sinon on ne pourrait pas écrire $f'(x)$), on note que si f vérifie cette égalité, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f'(x) = -f(x) + \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$: en tant que différence de f et d'une constante, qui sont dérivables, f' est aussi dérivable, et on a après dérivation : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = -f'(x)$. C'est une équation différentielle linéaire du second ordre (et même du premier ordre vérifiée par f'), qu'on sait résoudre.

Exercice 1. En déduire les solutions des équations intégrales ci-dessus : achever la résolution.

2 Équations faisant apparaître une involution ($f(-x)$, $f\left(\frac{1}{x}\right)$, etc.)

Vous croiserez en exercice des équations différentielles « tordues », avec quelque part $-x$ au lieu de x. Exemple :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(-x) + f(x) = \cos(x).$$

En général, il n'apparaîtra que f et f'' : cela simplifie les considérations sur la parité.

Nous sommes ennuyés pour traiter ce type d'équation différentielle à cause de ce $f''(-x)$: ce n'est pas une équation vérifiée par f, puisqu'il apparaît non pas f'', mais la dérivée de la composée de f avec $x \mapsto -x$.

2.1 Première méthode

L'idée est alors de se dire : comment pourrions-nous « enlever » ce signe moins ? On note que si f était une fonction *paire* ou *impaire*, alors le problème serait résolu : dans ce cas ses dérivées ont aussi une parité. En effet, supposons par exemple que f soit paire :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = f(-x),$$

alors, en dérivant cette relation (ne pas oublier de dériver $x \mapsto -x$), on a :

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = -f'(-x), \quad f''(x) = f''(-x), \quad f^{(3)}(x) = -f^{(3)}(-x), \quad \text{etc.}$$

On remarque que **la parité des dérivées de f alterne**. Il en est de même si l'on suppose f impaire.

Ainsi, si f est paire, alors f'' également, et l'équation différentielle devient *dans ce cas particulier* : $f'' + f = \cos$. Nous savons à présent la résoudre par les méthodes standards. Si f est impaire, c'est à peine différent.

Mais on ne peut pas supposer que f est paire ou impaire juste parce que cela nous chante. La clé est alors de se souvenir que **toute fonction se décompose de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire**, explicitement ainsi :

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{\text{paire}} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{\text{impaire}}.$$

De plus, ces expressions explicites nous assurent que si f est de classe C^p avec $p \in \mathbb{N}$, alors sa partie paire $g : x \mapsto \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ et sa partie impaire $h : x \mapsto \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$ sont aussi de classe C^p.

L'unicité est PRIMORDIALE. Elle nous permet d'identifier : si $g_1 + h_1 = g_2 + h_2$ avec g_1, g_2 paires, et h_1, h_2 impaires, alors : $g_1 = g_2$ et $h_1 = h_2$.

Cela nous permet donc, dans une équation différentielle linéaire où il apparaît $f(-x)$, $f'(-x)$, etc., en remplaçant f par $g + h$, où g et h sont ses parties paire et impaire (explicites au besoin, nous l'avons vu ci-dessus), de ne plus avoir ces fâcheux $-x$ grâce à la parité ! Plus précisément :

1. On introduit g paire et h impaire telles que : $f = g + h$. On pense à mentionner que g et h sont dérivables aussi souvent que f, *via* l'écriture explicite ci-dessus.
2. On injecte cette expression de f dans l'équation différentielle où l'on veut éliminer les $-x$. **Par unicité de la décomposition en somme de fonctions paire et impaire**, on identifie la partie paire dans chaque membre de l'égalité et de même pour la partie impaire : cela nous donne des équations différentielles vérifiées par g et h, qu'on sait résoudre. Si l'on ne connaît pas la partie paire ou la partie impaire du membre de droite de l'équation différentielle, par exemple ici :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(-x) + f'(-x) + f(x) = e^{-x},$$

   il suffit de se souvenir qu'on a ci-dessus un moyen explicite de l'obtenir : la partie paire, ici, est $x \mapsto \dfrac{e^{-x} + e^{x}}{2}$, et la partie impaire est $x \mapsto \dfrac{e^{-x} - e^{x}}{2}$.

   Attention au fait que si g est paire, alors g' est impaire, et inversement pour h ! C'est pourquoi il peut apparaître des systèmes couplés faisant intervenir à la fois g et h.

   Remarque très utile. Nous conservons une équivalence ici, du fait que deux fonctions soient égales si et seulement si leurs parties paires et impaires sont égales : il est donc inutile de vérifier la réciproque à la fin.

3. On les résout, et **on vérifie que les solutions obtenues sont de la bonne parité pour être égales à g et h.** Cela nécessite de vérifier si l'on a bien $g(x) = g(-x)$ et $h(x) = -h(-x)$: on résout un système dont les inconnues sont les constantes multiplicatives qui apparaissent dans g et h. **Mais le plus simple, à mon avis**, est plutôt de regarder à quelle condition la partie impaire de l'expression de g obtenue est nulle (et de même avec la partie paire de h), qu'encore une fois on peut écrire explicitement au besoin, grâce à la décomposition explicite rappelée ci-dessus.
   J'estime cette approche plus simple, parce qu'elle ne nécessite pas d'argument sur la liberté d'une famille de fonctions, pour identifier « comme on voudrait » : situation qui se produit régulièrement si l'on cherche à quelle condition on a $g(x) = g(-x)$ (si on a une égalité du type : $\alpha e^x + \beta e^{-x} = \gamma e^x + \delta e^{-x}$, par exemple).
4. Il reste à écrire $f = g + h$ pour en déduire la forme des solutions.

Exemple 3. On cherche à déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(-x) + f(x) = e^x. \tag{E}$$

1. Pour cela, on note g et h les uniques fonctions paire et impaire telles que $f = g + h$. On l'a vu plus haut, g et h sont de classe C^2, et on a $f'' = g'' + h''$; de plus g'' est paire et h'' est impaire.
2. En remplaçant f et f'' par les expressions en fonction de g et h, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(-x) + f(x) = e^x \\
\iff & \forall x \in \mathbb{R}, \quad g''(-x) + h''(-x) + g(x) + h(x) = e^x = \underbrace{\frac{e^x + e^{-x}}{2}}_{\text{paire}} + \underbrace{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}_{\text{impaire}} && \text{(on décompose } e^x \text{ afin de pouvoir identifier)} \\
\iff & \forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{g''(x)}_{\text{paire}} - \underbrace{h''(x)}_{\text{impaire}} + \underbrace{g(x)}_{\text{paire}} + \underbrace{h(x)}_{\text{impaire}} = \underbrace{\frac{e^x + e^{-x}}{2}}_{\text{paire}} + \underbrace{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}_{\text{impaire}} && \text{(comme } g'' \text{ est paire et } h'' \text{ impaire, on simplifie : } g''(-x) = g''(x) \text{ et } h''(-x) = -h''(x)) \\
\iff & \forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} g''(x) + g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \\ -h''(x) + h(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \end{cases} && \text{(par unicité des parties paire et impaire)}
\end{aligned}$$

3. On sait résoudre ces deux équations différentielles : seule la recherche d'une solution particulière peut être un peu délicate, si on ne pense pas à utiliser le principe de superposition pour avoir tantôt $\dfrac{e^x}{2}$, tantôt $\dfrac{e^{-x}}{2}$, dans le membre de droite. **L'essentiel est de remarquer qu'on s'est ramené à une situation connue**. Après une résolution qu'on vous laisse compléter, vous obtenez que $f = g + h$ est solution de (E) si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(\gamma, \delta) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \alpha \cos(x) + \beta \sin(x) + \frac{e^x + e^{-x}}{4}, \quad h(x) = \gamma e^x + \delta e^{-x} - x\frac{e^x + e^{-x}}{4},$$

   avec g paire et h impaire. Comme g est paire, on peut être plus précis : sa partie impaire est nulle. On en déduit $\beta \sin = 0$, donc $\beta = 0$. De même, la partie paire de h, c'est-à-dire :

$$x \mapsto \gamma \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) + \delta \left(\frac{e^{-x} + e^x}{2}\right)$$

   est nulle (j'ai écrit la partie paire de chaque fonction de la somme ; noter que $x \mapsto x\dfrac{e^x + e^{-x}}{4}$ est impaire, puisque changer x en $-x$ la transforme en son opposée), ce qui implique : $\gamma = -\delta$. En résumé, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \alpha \cos(x) + \frac{e^x + e^{-x}}{4}, \quad h(x) = \gamma \left(e^x - e^{-x}\right) - x\frac{e^x + e^{-x}}{4}.$$

4. Comme $f = g + h$, on conclut que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\exists (\alpha, \gamma) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \alpha \cos(x) + \gamma \left(e^x - e^{-x}\right) + (1 - x)\frac{e^x + e^{-x}}{4}.$$

L'exemple qui suit montre que si les dérivées de f n'ont pas même parité que f, une subtilité apparaît. On doit résoudre un système différentiel.

Exemple 4. On cherche à déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(-x) + f(x) = x^2 + x + 1. \tag{E'}$$

1. Pour cela, on note g l'unique fonction paire et h l'unique fonction impaire telles que $f = g+h$. Alors g et h sont de classe C^1, et on a $f' = g' + h'$; de plus g' est **impaire** et h' est **paire** (attention !).
2. En remplaçant f et f' par les expressions en fonction de g et h, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(-x) + f(x) = x^2 + x + 1 \\
\iff & \forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(-x) + h'(-x) + g(x) + h(x) = x^2 + x + 1 \\
\iff & \forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{-g'(x)}_{\text{impaire}} + \underbrace{h'(x)}_{\text{paire}} + \underbrace{g(x)}_{\text{paire}} + \underbrace{h(x)}_{\text{impaire}} = \underbrace{x^2+1}_{\text{paire}} + \underbrace{x}_{\text{impaire}} \\
\iff & \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} h'(x) + g(x) & = & x^2+1, \\ -g'(x) + h(x) & = & x. \end{array} \right.
\end{aligned}$$

(comme g' est impaire et h' paire, on simplifie : $g'(-x) = -g'(x)$ et $h'(-x) = h'(x)$)

(par unicité des parties paire et impaire)

3. C'est un système différentiel couplé : on le met sous forme matricielle pour le résoudre. Posons $Y = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$. Alors f est solution de (E) si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Y'(x) = \begin{pmatrix} g'(x) \\ h'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(x) - x \\ -g(x) + x^2 + 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} g(x) \\ h(x) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} -x \\ x^2+1 \end{pmatrix}}_{=B(x)}$$

Pour résoudre $Y' = AY + B$, on diagonalise A : on peut démontrer que : $A = P \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$. Par conséquent, on posant : $Z = P^{-1}Y = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, on a *via* un raisonnement classique :

$$\begin{aligned}
Y' = AY + B \iff & P^{-1}Y' = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} P^{-1}Y + P^{-1}B \\
\iff & Z' = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} Z + P^{-1}B \\
\iff & \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} z_1'(x) & = & iz_1(x) + \frac{-x - i(x^2+1)}{2} \\ z_2'(x) & = & -iz_2(x) + \frac{-x + i(x^2+1)}{2} \end{array} \right. \\
\iff & \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2, \ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} z_1(x) & = & \alpha e^{ix} + \frac{x^2 - 3ix - 2}{2} \\ z_2(x) & = & \beta e^{-ix} + \frac{x^2 + 3ix - 2}{2} \end{array} \right. \\
\iff & \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ Y(x) = PZ(x) = \begin{pmatrix} \alpha e^{ix} + \beta e^{-ix} + x^2 - 2 \\ \alpha i e^{ix} - \beta i e^{-ix} + 3x \end{pmatrix} \\
\iff & \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2, \ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} g(x) & = & \alpha e^{ix} + \beta e^{-ix} + x^2 - 2 \\ h(x) & = & \alpha i e^{ix} - \beta i e^{-ix} + 3x \end{array} \right.
\end{aligned}$$

avec g paire et h impaire : ces conditions de parité équivalent à une condition sur α et β. Pour cela : soit on écrit les égalités $g(-x) = g(x)$ et $h(-x) = -h(x)$, et on identifie (ce qui nécessite d'utiliser un argument sur l'indépendance linéaire des fonctions : pourquoi ?), soit on utilise encore l'unicité de la décomposition en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire, sachant que la partie paire de $x \mapsto e^{ix}$ est $x \mapsto \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \cos(x)$ et la partie impaire est, par un raisonnement analogue : $x \mapsto i\sin(x)$. Ainsi l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \alpha e^{ix} + \beta e^{-ix} + x^2 - 2 = \underbrace{(\alpha+\beta)\cos(x) + x^2 - 2}_{\text{paire}} + \underbrace{i\,(\alpha-\beta)\sin(x)}_{\text{impaire}}$$

impose : $\alpha = \beta$ (pour que la partie impaire de g soit nulle), et : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 2\alpha\cos(x) + x^2 - 2$. Le même raisonnement avec h donne la même condition sur α et β, puis : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = -2\alpha\sin(x) + 3x$.

4. Finalement : $f = g + h$ est solution de (E') si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 2\alpha(\cos(x) - \sin(x)) + x^2 + 3x - 2.$$

Pour avoir les solutions f à valeurs réelles, il suffit de prendre $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 2.

1. Démontrer soi-même la diagonalisation de A proposée.
2. Calculer P^{-1}, et vérifier la justesse des deux équations différentielles vérifiées par z_1 et z_2.
3. Détailler la détermination explicite de z_1 et z_2.
4. Vérifier que h a bien l'expression finale annoncée.
5. Retrouver les expressions de g et h non pas à l'aide de l'unicité de la décomposition (comme utilisé ci-dessus), mais grâce aux égalités $g(-x) = g(x)$ et $h(-x) = -h(x)$.

2.2 Deuxième méthode

Une autre approche est de constater que si l'on remplace x par $-x$ dans l'équation différentielle étudiée, et que l'on dérive (d'abord s'assurer que c'est possible ! en exprimant la dernière dérivée de f en fonction des dérivées d'ordres inférieurs, ce qui justifie qu'elle est dérivable en tant que combinaison linéaire d'applications dérivables), alors on peut obtenir deux relations vérifiées par la fonction problématique $f(-x)$, ou $f'(-x)$, etc. En additionnant convenablement les deux relations obtenues, on élimine la fonction évaluée en $-x$, et on se retrouve avec une équation différentielle standard. Le défaut de l'approche est qu'en dérivant et en sommant, nous n'avons plus des équivalences : il reste donc une réciproque à vérifier à la fin, pour déterminer quelles sont les fonctions qui conviennent. De plus, en faisant cela, nous augmentons l'ordre des dérivées qui apparaissent dans l'équation, donc la résolution devient plus complexe.

Exemple 5. On reprend l'équation (E) ci-dessus :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(-x) + f(x) = e^x.$$

En remplaçant x par $-x$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) + f(-x) = e^{-x}$. Ceci montre que f'' est deux fois dérivable, en tant que différence d'une exponentielle et de $x \mapsto f(-x)$, qui sont deux fois dérivables.

Dérivons-la deux fois (pourquoi pas une seule fois ? parce qu'en faisant cela, on aurait $f'''(x)$ et $f'(-x)$ qui apparaîtraient : rien de commun avec l'équation de départ, donc aucune combinaison des deux équations obtenues ne permettrait d'annuler la fonction évaluée en $-x$). On obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(4)}(x) + f''(-x) = e^{-x}.$$

En soustrayant cette équation et (E), on obtient l'équation différentielle suivante vérifiée par f :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(4)}(x) - f(x) = e^{-x} - e^x,$$

qu'on sait résoudre avec les méthodes classiques. Cela revient en effet à résoudre le système matriciel :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Y'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Y(x) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ e^{-x} - e^{x} \end{pmatrix}$$

en posant $Y = \begin{pmatrix} f \\ f' \\ f'' \\ f''' \end{pmatrix}$. C'est lourd, mais c'est possible. Nous vous laissons le faire :

Exercice 3. On pose : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et : $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ e^{-x} - e^{x} \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'on a :

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & i & -i \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -i & i \end{pmatrix}$ (*remarque : A est une matrice compagnon, ce qui peut faciliter votre recherche des éléments propres*).

2. Soit Y l'application vectorielle ci-dessus. On pose : $Z = P^{-1}Y = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}$. Montrer que Y vérifie :

$Y' = AY + B$, si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} z_1'(x) &= z_1(x) + \frac{1}{4}\left(e^{-x} - e^{x}\right), \\ z_2'(x) &= -z_2(x) - \frac{1}{4}\left(e^{-x} - e^{x}\right), \\ z_3'(x) &= iz_3(x) + \frac{i}{4}\left(e^{-x} - e^{x}\right), \\ z_4'(x) &= -iz_4(x) - \frac{i}{4}\left(e^{-x} - e^{x}\right). \end{cases}$$

3. En déduire que $Y' = AY + B$ si et seulement si :

$$\exists (a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4,\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} z_1(x) &= ae^{x} + \frac{1}{8}\left(-e^{-x} - 2xe^{x}\right), \\ z_2(x) &= be^{-x} + \frac{1}{8}\left(-2xe^{-x} + e^{x}\right), \\ z_3(x) &= ce^{ix} + \frac{1}{8}\left((-1-i)e^{-x} + (1-i)e^{x}\right), \\ z_4(x) &= de^{-ix} + \frac{1}{8}\left((-1+i)e^{-x} + (1+i)e^{x}\right). \end{cases}$$

4. En déduire : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(4)}(x) - f(x) = e^{-x} - e^{x}$, si et seulement si :

$$\exists (a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4, \quad f(x) = ae^{x} + be^{-x} + ce^{ix} + de^{-ix} + \frac{(3-2x)e^{x} - (3+2x)e^{-x}}{8}.$$

5. En déduire que si f vérifie (E), alors il existe $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \alpha\cos(x) + \beta\sin(x) + \gamma e^{x} + \delta e^{-x} + \frac{(3-2x)e^{x} - (3+2x)e^{-x}}{8}.$$

(*Regarder à quelle condition on a :* $\forall x \in \mathbb{R}$, $\overline{f(x)} = f(x)$*, et identifier ; un argument d'indépendance linéaire peut être nécessaire pour permettre l'identification*).

Il faut encore vérifier à quelle condition sur $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ on a bien $f''(-x) + f(x) = e^x$. Des calculs lourds (avec un argument d'indépendance linéaire à invoquer sur une famille de fonctions, pour pouvoir identifier... si on n'est pas en mesure de l'invoquer, on simplifie l'égalité en prenant $x = 0$ par exemple) montrent que c'est vérifié si $\gamma + \delta = \frac{1}{2}$ et $2\beta = 0$. On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha\cos(x) + \gamma e^x + \left(\frac{1}{2} - \gamma\right)e^{-x} + \frac{(3-2x)e^x - (3+2x)e^{-x}}{8} \\ &= \alpha\cos(x) + \gamma(e^x - e^{-x}) + \frac{(3-2x)e^x + (1-2x)e^{-x}}{8}. \end{aligned}$$

Quitte à réarranger les termes, on peut se convaincre que cela donne bien les mêmes solutions que dans l'exemple 3. ← page 3

Exercice 4. Détailler l'argument menant aux conditions $\gamma + \delta = \frac{1}{2}$ et $2\beta = 0$.

Exemple 6. On reprend l'équation (E') ci-dessus :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(-x) + f(x) = x^2 + x + 1.$$

En remplaçant x par $-x$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) + f(-x) = x^2 - x + 1$. Ceci démontre que f' est dérivable, en tant que différence d'une application polynomiale et de $x \mapsto f(-x)$, qui sont dérivables. En dérivant la dernière égalité, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) - f'(-x) = 2x - 1.$$

En faisant la somme de cette équation et de (E'), on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) + f(x) = x^2 + 3x.$$

On sait résoudre une telle équation différentielle. On en déduit qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \alpha\cos(x) + \beta\sin(x) + x^2 + 3x - 2.$$

En vérifiant si réciproquement, une telle fonction définit une solution de (E), on s'aperçoit qu'on doit avoir $\beta = -\alpha$. On en déduit que f est solution de (E) si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \alpha(\cos(x) - \sin(x)) + x^2 + 3x - 2.$$

Comme toujours, quand nous avons deux méthodes, il est intéressant de regarder leurs mérites comparés, afin de décider laquelle privilégier.

	Avantages	Défauts
1re méthode	Ramène à des équations différentielles simples	Plus astucieuse. Se complique si les dérivées successives n'ont pas la même parité que la fonction.
2e méthode	Plutôt naturelle	Augmente l'ordre (et donc la complexité) des équations différentielles, et nécessite de vérifier une réciproque.

Comparez par exemple les deux traitements de l'équation différentielle (E) (exemples 3 et 5). Dans un cas, on résout deux équations différentielles d'ordre 2 ; dans l'autre, on résout une équation différentielle d'ordre 4. Constat analogue pour les exemples 4 et 6. ← page 3

2.3 ☢ Généralisation aux compositions avec des involutions

On appelle involution une application τ définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et telle que $\tau \circ \tau = \mathrm{Id}$. Les involutions les plus souvent rencontrées sont :

$$\tau : x \mapsto -x, \quad \tau : x \mapsto \frac{1}{x},$$

où l'on vérifie qu'effectivement : $-(-x) = x$, et $\frac{1}{\frac{1}{x}} = x$, pour tout x où ces quantités sont définies. Mais il y en a d'autres ; vous pouvez vérifier que les applications suivantes :

$$\tau : x \mapsto -\frac{1}{x}, \quad \tau : x \mapsto 1 - x, \quad \tau : x \mapsto \frac{3x+4}{4x-3}$$

conviennent aussi. Toute la section qui précède correspondait au cas $\tau : x \mapsto -x$, que nous généralisons ici partiellement.

Alors, lorsqu'on doit résoudre une équation différentielle faisant intervenir la composition de la fonction inconnue avec une involution τ, par exemple :

$$\forall x > 0, \quad f'\left(\frac{1}{x}\right) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(1-x) = f(x), \quad \forall x \in \left]\frac{3}{4}, +\infty\right[, \quad f'\left(\frac{3x+4}{4x-3}\right) + f(x) = 0,$$

la première méthode ci-dessus **ne se généralise pas** (ou, du moins, très mal, sauf dans des cas particuliers tels que les involutions de la forme $x \mapsto \alpha - x$). Par contre la seconde marche toujours : on remplace non plus x par $-x$, mais par $\tau(x)$ (du fait que $\tau(\tau(x)) = x$, cela fera disparaître quelques fonctions gênantes), et vous dérivez. Ensuite, vous sommez ou soustrayez les équations obtenues pour vous ramener à une équation différentielle plus classique (mais pas forcément aussi simple que dans le cas de l'involution $\tau : x \mapsto -x$).

Exemple 7. Soit f une application deux fois dérivable telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(\pi - x) = f(x). \qquad (E'')$$

Alors, en remplaçant x par $\pi - x$, comme $\pi - (\pi - x) = x$, on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = f(\pi - x)$. Ceci démontre que f'' est deux fois dérivable, en tant que composition de f et de $x \mapsto \pi - x$. En dérivant deux fois cette dernière égalité, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(4)}(x) = f''(\pi - x).$$

En combinant cette équation avec (E''), on voit que f vérifie l'équation différentielle : $y^{(4)} = y$. On sait la résoudre. Ensuite, toute la démarche imite celle dans le cas de l'involution $\tau : x \mapsto -x$.

Exercice 5. Achever la résolution de l'exemple ci-dessus, pour montrer qu'une telle fonction f est nécessairement de la forme :

$$f : x \mapsto \alpha\left(e^x + e^{\pi - x}\right) + \beta\cos(x),$$

avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Vous aurez à utiliser l'indépendance linéaire de $(x \mapsto e^x, x \mapsto e^{-x}, \cos, \sin)$.

Table des matières