Méthodes – Équations différentielles linéaires d'ordre 2

1 ✓ Compléments sur les équations différentielles linéaires vues en 1re année

La plupart du contenu exigible sur les équations différentielles linéaires vues en 1re année, c'est-à-dire :
— celles d'ordre 1 ;
— celles d'ordre 2 à coefficients constants, et second membre de la forme « exponentielle × polynôme » ;
ne sera pas rappelé ici. Nous ne donnons ici que quelques compléments de méthodologie :
— pour accélérer la résolution des équations différentielles du premier ordre ;
— pour **les problèmes de raccords**.

1.1 Résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre « en un clin d'œil »

Nous proposons ici une façon de trouver la forme générale des solutions de :

$$\forall t \in I, \quad y'(t) + a(t)y(t) = c(t), \tag{E}$$

sans passer par la structure classique, à savoir :
— résolution de l'équation différentielle linéaire homogène associée ;
— recherche d'une solution particulière.
Le seul avantage de l'approche que nous proposons là est **rédactionnel** : c'est plus rapide. Mais attention à ne pas l'utiliser sans la maîtriser : vous envoyez un signal déplorable au correcteur si vous utilisez une méthode « hors des clous » en débitant des âneries.

L'idée est de faire apparaître, dans le membre de gauche, la dérivée d'un **produit** (ce qu'on saurait intégrer facilement). On note en effet que le membre de gauche est presque de la forme $u'v + uv'$; il manque simplement une fonction en facteur de y' pour que ce soit réellement de cette forme. On fait alors une multiplication convenable pour « vraiment » reconnaître la dérivée d'un produit. On y parvient en multipliant (E) par $e^{A(t)}$, où A est une primitive de a. On obtient alors l'équation équivalente :

$$\forall t \in I, \quad y'(t)e^{A(t)} + a(t)e^{A(t)}y(t) = c(t)e^{A(t)},$$

et le membre de gauche est la dérivée de $t \mapsto e^{A(t)}y(t)$ (dérivez, pour vous en convaincre ! c'est important de ne pas l'apprendre machinalement, ou vous ferez des bêtises). Par conséquent, en intégrant cette égalité entre t_0 et t (où t_0 est n'importe quel élément de I), *sans oublier la constante d'intégration*, on obtient :

$$\exists \alpha \in K, \quad \forall t \in I, \quad e^{A(t)}y(t) = \int_{t_0}^{t} c(x)e^{A(x)}\mathrm{d}x + \alpha.$$

À ce stade, il reste à :
— multiplier l'égalité ci-dessus par $e^{-A(t)}$ pour isoler $y(t)$;
— calculer une primitive de $x \mapsto c(x)e^{A(x)}$ pour simplifier l'intégrale ci-dessus (ce que vous auriez de toute façon dû faire en utilisant la méthode de variation de la constante : il n'y a donc pas d'étape supplémentaire ici) ;
et c'est terminé.

1.2 Problèmes de raccord

Lorsque nous étudions une équation différentielle du premier ordre :

$$\forall t \in I, \quad a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t), \tag{E}$$

avec a une application continue qui *s'annule* sur I (disons une seule fois en t_0, pour simplifier la discussion), nous avons à gérer des problèmes de raccord : on étudie l'équation différentielle sur $I_1 = I \cap]-\infty, t_0[$ et sur $I_2 = I \cap]t_0, +\infty[$, et on en déduit les solutions sur ces deux intervalles. Ensuite, il s'agit de déterminer les solutions sur I : pour cela, on dit qu'une telle solution définit, par restriction, des solutions sur I_1 et sur I_2. La résolution sur ces deux intervalles nous permet alors d'expliciter la restriction de y sur I_1 et I_2. **On fait attention à ne pas nommer avec la même lettre toutes les constantes multiplicatives qui apparaissent**.

Exemple 1. L'équation différentielle :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad ty'(t) + 2y(t) = t(3-t)e^{-t},$$

a pour solutions sur $I_1 =]-\infty, 0[$ et $I_2 =]0, +\infty[$ les applications de la forme $t \mapsto \frac{\lambda}{t^2} + t^3 e^{-t}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Donc, si y est une solution sur $\mathbb{R}$, c'est en particulier une solution sur I_1 et sur I_2, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall t \in I_1,\ y(t) = \frac{\lambda}{t^2} + te^{-t}, \quad \forall t \in I_2,\ y(t) = \frac{\mu}{t^2} + te^{-t}.$$

ON NE PREND PAS LE MÊME λ DANS LES DEUX CAS, ILS N'ONT AUCUNE RAISON D'ÊTRE ÉGAUX !

Ensuite, nous avons à déterminer à quelle condition l'application est dérivable (et donc continue) en le réel manquant. C'est l'objet de la section 1.2.2. Une fois qu'on a démontré la dérivabilité sur I, il n'est pas nécessaire de vérifier que y est bien solution sur I en détails : en effet, elle vérifie (E) pour $t \in I_1$ et $t \in I_2$ (vu qu'elle est égale à une des solutions explicitées dans l'étude sur I_1 et I_2), donc par continuité (effectivement démontrée !), quand $t \to t_0$, l'égalité reste valable. On se concentre donc sur le problème de dérivabilité. Mais avant cela, je dis quelques mots sur les valeurs absolues *a priori* gênantes qui apparaissent lors de la résolution sur I_1 et I_2. → page 3

1.2.1 ✓ Gérer les valeurs absolues

Lorsque nous étudions (E) sur l'intervalle I, avec a qui s'annule en $t_0 \in I$, et qu'après division par $a(t)$ nous obtenons une équation différentielle sur $I_1 = I \cap]-\infty, t_0[$ et sur $I_2 = I \cap]t_0, +\infty[$ de la forme :

$$y' + \frac{u'}{u}y = \frac{c}{a} \quad \text{(il devrait apparaître } \frac{b}{a} \text{ en facteur de } y, \text{ mais nous avons simplifié cette fraction),}$$

on sait que les solutions sur I_1 ou sur I_2 *de l'équation homogène associée* sont de la forme $\lambda e^{-\ln(|u|)}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$: on note la présence de valeurs absolues. C'est une situation très fréquente. Or vous n'aimez pas les valeurs absolues : nous allons voir ici qu'en vérité, elles s'enlèvent à très peu de frais, **et les solutions ont la même description sur I_1 et I_2**.

En effet, u ne s'annule pas sur I_1 ni sur I_2, donc par continuité **elle est de signe constant** (c'est une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires). Disons par exemple que u est négative sur I_1 et positive sur I_2. Alors sur I_1, on a $|u| = -u$ (c'est la définition de la valeur absolue : $|x| = -x$ si $x < 0$ et $|x| = x$ sinon), et les solutions sont donc de la forme :

$$\lambda e^{-\ln(|u|)} = \lambda e^{-\ln(-u)} = \frac{\lambda}{-u},$$

tandis que sur I_2 on a $|u| = u$, donc les solutions sont de la forme :

$$\lambda e^{-\ln(u)} = \frac{\lambda}{u}.$$

En apparence, nous n'avons pas les mêmes solutions. Mais puisque l'ensemble des solutions d'une équation homogène est un espace vectoriel, *l'engendrer par une fonction ou par la fonction opposée ne change rien.* Ainsi, les solutions homogènes sur I_1 sont aussi de la forme : $\frac{\lambda}{u}$.

Cela revient aussi à changer λ en $\lambda' = -\lambda$. Quand λ parcourt $\mathbb{R}$, λ' parcourt aussi $\mathbb{R}$, donc on paramètre ainsi le même ensemble de solutions.

En conclusion : peu importe l'intervalle où l'on se restreint, l'ensemble des solutions homogènes reste le même.

Vous ferez donc EXACTEMENT les mêmes calculs sur I_1 et I_2, en particulier lors de la recherche d'une solution particulière : si vous n'avez pas la même solution obtenue sur I_1 et sur I_2 (disons par la méthode de variation de la constante), **vous avez fait une erreur de calcul** (en général l'oubli d'un signe moins).

1.2.2 ✓ Le raccord : cas de la dérivabilité

Une fois qu'on a déterminé y sur I_1 et sur I_2, voyons comment étudier efficacement à quelle condition cela définit une solution sur I. Nous avons déjà dit ci-dessus que cela revient à étudier la dérivabilité en le point de raccord t_0. En fait, comme une condition nécessaire (mais non suffisante) pour être dérivable est d'être continue, et que cette condition est en général plus facile à vérifier, c'est souvent la première chose qu'on vérifie, en regardant à quelle condition $\lim\limits_{t_0} y$ existe et est finie ; auquel cas, la limite trouvée est la valeur de y en t_0 (précisément par continuité), et on a comme solution :

$$y : \begin{cases} I & \to \quad \mathbb{R} \\ t & \mapsto \quad \begin{cases} \text{expression sur } I_1 & \text{si } t \in I_1 \\ \text{expression sur } I_2 & \text{si } t \in I_2 \\ \text{limite trouvée en } t_0 & \text{si } t = t_0. \end{cases} \end{cases}$$

(c'est souvent la même que sur I_2 et dans ce cas cette ligne est superflue)

Il reste à vérifier que y est bien dérivable en t_0.

Dans ce qui suit, nous ne nous intéressons qu'aux cas problématiques, où la condition de dérivabilité ne se voit pas « à l'œil nu ». Nous nous intéressons uniquement au cas **où il apparaît une forme indéterminée en le point de raccord t_0.**

✓ Utilisation d'un développement limité En général, calculer $\lim\limits_{t_0} y$, pour déterminer si y est continue en t_0, se fait relativement bien en levant la forme indéterminée grâce à un équivalent ou à un développement limité. C'est plus calculatoire pour le calcul de $\lim\limits_{t_0} y'$. Et c'est encore pire lorsqu'il s'agit d'étudier un problème de raccord dans le cas d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 : nous devons encore étudier la dérivée seconde !

Nous proposons une méthode qui permet d'expédier la vérification de la continuité, puis de la dérivabilité en t_0, EN MÊME TEMPS ! On se souvient en effet d'un résultat de 1re année :

$$y \text{ admet un développement limité au premier ordre en } t_0 \iff y \text{ est dérivable en } t_0.$$

Or il est parfois très rapide d'obtenir un développement limité à l'ordre 1 en 0 :

— si y s'écrit à l'aide de fonctions usuelles, dont on connaît les développements limités ;

— si y est un quotient dont le dénominateur est une puissance de t, ou peut facilement se mettre sous la forme $1-u$ (après un développement limité), afin d'utiliser le développement de $t \mapsto \frac{1}{1-t}$.

Si le point de raccord n'est pas 0, ce n'est pas grave : il suffit de s'y ramener *via* le changement de variable $u = t - t_0$ ou $u = t_0 - t$.

Exemple 2. Imaginons qu'on ait à étudier le problème de raccord d'une équation différentielle d'ordre 2, dont les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ sont de la forme :

$$y : t \mapsto \frac{\alpha\cos(t) + \beta\sin(t) + e^t}{t^2}, \qquad \text{avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

Pour déterminer si cela définit une fonction dérivable en 0 (sachant qu'il n'y a pas de difficulté ailleurs), on cherche à quelle condition y admet un développement limité à l'ordre 1 en zéro. Pour cela, grâce aux développements limités usuels, on sait que pour tout t au voisinage de 0 on a :

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{\alpha\left(1 - \frac{t^2}{2} + \underset{t\to 0}{o}(t^3)\right) + \beta\left(t - \frac{t^3}{6} + \underset{t\to 0}{o}(t^3)\right) + \left(1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \underset{t\to 0}{o}(t^3)\right)}{t^2} \\ &= \frac{\alpha+1}{t^2} + \frac{\beta+1}{t} + \frac{1-\alpha}{2} + \frac{1-\beta}{6}t + \underset{t\to 0}{o}(t). \end{aligned}$$

On pousse les développements limités au numérateur à l'ordre 3, puisqu'on veut obtenir un développement de y à l'ordre 1 et qu'il faut bien tenir compte de la division par t^2.

On observe que y est dérivable en 0 si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en 0, à condition que les termes en $\frac{1}{t^2}$ et $\frac{1}{t}$ soient nuls, ce qui impose $\alpha = \beta = -1$. On en déduit que la seule solution dérivable est ici :

$$y : t \mapsto \frac{e^t - \cos(t) - \sin(t)}{t^2},$$

et il resterait encore à vérifier qu'elle est bien deux fois dérivable (vérification qui serait immédiate avec les séries entières, voir plus bas). Mais une grande partie du travail est effectuée.

Remarque. Il est aussi possible, en certaines circonstances, de reconnaître un taux d'accroissement, si y est de la forme :

$$t \mapsto \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}, \text{ ou } t \mapsto \frac{t - t_0}{f(t) - f(t_0)},$$

par exemple : $t \mapsto \dfrac{e^t - 1}{t}$, $t \mapsto \dfrac{t-1}{\ln(t)}$, etc. Dans ce cas, le calcul de la limite en t_0 est immédiat, par définition de la dérivée. Mais nous ne proposons pas cette approche ici, parce que procéder par un développement limité *la contient et la généralise* : calculer une limite par un taux d'accroissement est exactement équivalent à l'utilisation d'un développement limité à l'ordre 1.

✓ **Le théorème de la limite de la dérivée** Ci-dessus, nous avons une approche pour déterminer si y est dérivable en t_0, ce qui est suffisant en général. Mais s'il nous faut démontrer qu'elle est même de classe C^1 (inutile sauf exigence spécifique de l'énoncé), voire deux fois dérivable, ce n'est plus suffisant. Pour cela, on utilise le théorème de la limite de la dérivée, dont nous rappelons l'énoncé le plus général possible.

Théorème 1. *Soit $y : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application. Soit $k \in \mathbb{N}$ (en général $k = 0$). On suppose que :*

- *y est de classe C^k sur $[a, b]$;*
- *y est de classe C^{k+1} sur $]a, b]$ (par exemple y est obtenu par un prolongement en a d'une autre fonction définie sur $]a, b]$, et la régularité au voisinage de a reste à déterminer) ;*
- *$y^{(k+1)}$ admet une limite finie en a.*

Alors y est de classe C^{k+1} sur $[a, b]$, et on a : $y^{(k+1)}(a) = \lim\limits_{t\to a} y^{(k+1)}(t)$.

Ce n'est pas un *prolongement* de la dérivée $(k+1)^{\mathrm{e}}$ en a : elle existe, point barre, et on a sa valeur.

Il suffit donc de calculer $\lim\limits_{t_0} y'$ ou $\lim\limits_{t_0} y''$, selon la régularité qu'on veut, ce qu'on fait par les mêmes méthodes que d'habitude : équivalents et développements limités. Mais c'est coûteux en calculs.

✓ **Utilisation d'un développement en série entière** Si vous démontrez que y est développable en série entière, alors vous avez immédiatement la classe C^∞ sur son intervalle ouvert de convergence (donc en particulier autour du point de raccord problématique), et donc toutes les régularités que vous désirez *d'un seul coup*. Or obtenir un développement en série entière est immédiat dans les cas où :

— y s'écrit à l'aide de fonctions usuelles, dont on connaît les développements en série entière ;

— y est un quotient dont le dénominateur est une puissance de t.

Si ce n'est pas sous cette forme, cela peut faire l'affaire si y est *l'inverse* d'une telle fonction.

Exemple 3. On étudie la régularité en 1 de la fonction $t \mapsto \begin{cases} \dfrac{t-1}{\ln(t)} & \text{si } t \neq 1, \\ 1 & \text{si } t = 1 \end{cases}$. Quitte à faire un changement de variable, cela revient à étudier la régularité en 0 de l'application :

$$y : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x}{\ln(1+x)} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Or, pour tout $x \in]-1,1[$ *non nul*, on a :

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n+1},$$ (x est supposé non nul puisqu'on a besoin de diviser par x)

tandis que pour $x = 0$, on a : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n+1} = 1$. On en déduit que l'application :

$$S : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est une somme de série entière, donc elle est de classe C^∞ sur son intervalle ouvert de convergence $]-1,1[$; en passant à l'inverse, on en déduit que $y : x \mapsto \dfrac{1}{S(x)}$ également, ce qui résout le raccord en 0.

Nous proposons donc trois méthodes, dont nous récapitulons les mérites comparés.

	Avantages	Défauts
Existence d'un DL_1	Rapide, donne *à la fois* continuité et dérivabilité	Ne suffit que pour la dérivabilité : un DL_2 ne démontre rien sur y''.
Théorème de la limite de la dérivée	Pas besoin de flair : cela marche toujours	Rédaction longue, et calculs lourds pour la limite de y' ou y''.
Développement en série entière	Rapide, peu calculatoire, donne même la classe C^∞	Il faut remarquer quand c'est possible ; pire : ne marche pas toujours (par exemple si la fonction à développer en série entière est au dénominateur d'un quotient).

2 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients non constants

Dans toute cette section, on cherche à déterminer les solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 de la forme :

$$\forall t \in I, \quad a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = d(t), \tag{E}$$

où a, b, c et d sont des applications continues, *a priori* non constantes. Il n'y a pas de méthode générale à connaître, en général on vous donnera des indications pour trouver des solutions ; sauf éventuellement dans le cas de la recherche de solutions développables en série entière (voir le document *Méthodes* du chapitre sur les séries entières, section 3).

2.1 Utilisation d'un changement de variable

C'est une des méthodes les plus fréquemment utilisées. Avec un changement de variable adéquat $x = \varphi(t)$ (de sorte qu'on n'étudie plus $y(t)$ mais $y(\varphi^{-1}(x))$), on se ramène à une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, qu'on sait résoudre. Les plus fréquentes sont les équations différentielles d'Euler.

Un changement de variable ne se fait pas comme en Physique. En particulier :

> Lorsqu'on fait un changement de variable, il FAUT changer le nom de la fonction !

Faire un changement de variable en mathématiques revient à composer avec une fonction (celle de changement de variable, justement), donc ce n'est plus la même. On lui donne un autre nom pour y voir clair. La méthode s'articule donc comme suit :

1. Si l'énoncé nous dit « de poser $x = \varphi(t)$ », ou $t = \psi(x)$ (où $\psi = \varphi^{-1}$: nécessairement bijective pour que cette méthode marche), plus précisément, on étudie : $\forall x \in J$, $z(x) = y(\psi(x))$, où $J = \varphi(I)$.
2. On calcule z' et z''. **Attention au fait qu'on dérive une application composée**. Par exemple :
$$\forall x \in J, \quad z'(x) = \psi'(x)y'(\psi(x)).$$
3. On en déduit $y(\psi(x))$, $y'(\psi(x))$ et $y''(\psi(x))$ en fonction des dérivées de ψ et z.
4. En injectant ces expressions dans (E), on en déduit que y est solution de (E) si et seulement si z est solution d'une équation différentielle (E'), qu'on sait résoudre (si l'on écrit correctement le problème, il s'agit bien d'une équivalence, sans réciproque à vérifier).
5. On en déduit z, puis y grâce au fait que : $\forall x \in J$, $z(x) = y(\psi(x)) \iff \forall t \in I$, $y(t) = z(\varphi(t))$.

Cette exposition de la méthode part du principe que « l'ancienne variable » est notée t, cf. l'équation différentielle (E) plus haut ; mais évidemment, si elle s'appelle x dans l'exercice que vous traitez, il faut inverser les notations par rapport à celles ici.

2.2 Utilisation d'un changement de fonction inconnue

Ce cas de figure est plus rare (sauf le cas déjà vu de changement de fonction vectorielle $Z = P^{-1}Y$ lorsqu'on résout $Y' = AY$ après avoir réduit A). Il est aussi plus facile à écrire rigoureusement, je pense, que le cas précédent d'un changement de variable. Si l'on cherche à résoudre (E) :

1. On considère une application y (qu'on aimerait être solution de (E)) de classe C^2, et on pose :
$$\forall t \in I, \quad z(t) = y(t) \times (\text{une certaine fonction}) \quad (\textbf{toujours} \text{ indiquée par l'énoncé}).$$
Je note f la fonction par laquelle on multiplie, dans ce qui suit, de sorte que $z = y \cdot f$.
2. La relation précédente implique : $y = \dfrac{z}{f}$ (du moins, sur tout intervalle où f ne s'annule pas), ce qui permet d'exprimer les dérivées successives de y en fonction de celles de z :
$$y' = \left(\frac{1}{f}\right)' z + \frac{1}{f}z', \quad y'' = \left(\frac{1}{f}\right)'' z + 2\left(\frac{1}{f}\right)' z' + \frac{1}{f}z''.$$
(N'appliquez pas bêtement ces formules avec un f générique : refaites le calcul dans chaque cas particulier rencontré, en reconnaissant la dérivée d'un produit ou d'un quotient).
3. En injectant ces expressions dans (E), on en déduit que y est solution de (E) si et seulement si z est solution d'une équation différentielle (E'), qu'on sait résoudre.
4. On en déduit z, puis y grâce à la formule $y = \dfrac{z}{f}$.

Notons que si f s'annule, des problèmes de raccord sont aussi à étudier.

2.3 Utilisation d'un changement de fonction inconnue lorsqu'on connaît déjà une solution : méthode de l'abaissement de l'ordre

C'est une situation *très* classique : nous avons une équation différentielle linéaire homogène du 2e ordre :

$$\forall x \in I, \quad y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0, \tag{E}$$

dont nous avons *déjà* trouvé une solution explicite f, par exemple sous forme de somme de série entière. L'objectif est alors de trouver une deuxième solution g non proportionnelle à f : **d'après le théorème de Cauchy linéaire**, on sait que l'espace vectoriel des solutions de cette équation différentielle est de dimension 2. Donc, si (f, g) est une famille de deux solutions linéairement indépendantes, c'est une base de cet espace de solutions, et je sais que toute autre solution est combinaison linéaire de ces deux-là.

En fait, il s'avère qu'en trouvant f, nous avons fait le plus dur, parce qu'il existe une méthode systématique pour obtenir une deuxième solution g, qui ressemble beaucoup à la méthode de la variation de la constante :

1. Soit $z : I \to \mathbb{R}$ une application de classe C^2 sur I (qui sera à déterminer). On pose : $g = fz$.
2. On regarde à quelle condition nécessaire et suffisante g vérifie (E), en injectant dans l'équation (E) son expression en fonction de f et z. Il faut pour cela calculer g' et g'' ; notez que $g' = f'z + fz'$, et directement d'après la formule de dérivation de Leibniz : $g'' = f''z + 2f'z' + fz''$. **Ne remplacez pas encore f par son expression explicite**, pour minimiser les risques d'erreurs de calcul. Alors, g vérifie (E) si et seulement si :

$$g'' + ag' + bg = 0 \iff (f''z + 2f'z' + fz'') + a\,(f'z + fz') + bfz = 0.$$

Regroupez les termes en z, en z', en z'', et voyez que la magie opère :

$$g'' + ag' + bg = 0 \iff fz'' + (2f' + af)\,z' + \underbrace{(f'' + af' + bf)}_{=0}\,z = 0,$$

car f vérifie l'équation (E) : **c'est là qu'une erreur de calcul, avec une expression explicite de f, pourrait tout gâcher !** À quoi bon calculer une quantité qui, de toute façon, disparaîtra ?

3. À présent, on remplace f par son expression explicite, et l'on voit que z' est solution de l'équation différentielle linéaire **du premier ordre** (et qu'on sait donc résoudre) :

$$fy' + (2f' + af)y = 0.$$

On la résout, et on en déduit **un choix** de z' qui convient (en prenant une constante multiplicative égale à 1 par exemple), puis **un choix** de z qui convient en intégrant (et en prenant une constante d'intégration égale à 0 par exemple). On ne s'encombre pas des différentes constantes : on ne veut pas toutes les fonctions z qui marchent, on n'en veut **qu'une**, pour en déduire ensuite **une** solution g indépendante de f, ce qui suffira pour obtenir un système fondamental de solutions.

4. On déduit de ce qui précède une solution $g = fz$ de (E), et elle n'est pas proportionnelle à f à moins qu'on n'ait choisi z constante, c'est-à-dire $z' = 0$ (ce qui serait idiot). D'après tout ce que l'on a raconté plus haut, on en déduit que (f, g) est un système fondamental de solutions de (E), et donc une application $y : I \to \mathbb{R}$ de classe C^2 est solution de (E) si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $y = \alpha f + \beta g$.

Changement de fonction inconnue, quand on connaît une solution f

1. Introduire une fonction $z : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable, et poser : $g = fz$.
2. Injecter g dans (E) (sans remplacer f par son expression), et montrer que g vérifie (E) si et seulement si z' vérifie une équation différentielle (E') du **premier ordre**.
3. Résoudre (E') pour en déduire z', puis z par intégration, puis les solutions g de (E) grâce à $g = fz$.

Pour obtenir (E') : factoriser par z lorsqu'on injecte g. Le terme en facteur est nécessairement $f'' + af' + bf = 0$.

Notez quelques points communs avec l'approche dans le cas d'un changement de fonction inconnue, section 2.2. ← page 6

3 Équations fonctionnelles se ramenant à des équations différentielles

3.1 Équations faisant apparaître une intégrale

Considérons des équations de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t, \qquad \text{ou : } \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) + f(x) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t, \text{ etc.}$$

On parle parfois d'équation *intégrale* pour une telle équation, bien que la terminologie pose problème.

Pour déterminer les fonctions qui vérifient de telles équations, il suffit de dériver l'égalité de sorte à ne plus avoir d'intégrale : on a alors une équation différentielle qu'on résout avec les approches classiques. Ensuite, **on n'oublie pas de vérifier la réciproque :** en effet, en dérivant, nous n'avons pas une équivalence, donc rien n'assure que les solutions de l'équation différentielle obtenue soient les mêmes que les solutions de l'équation intégrale de départ. La réciproque se vérifie en injectant les solutions candidates dans l'équation intégrale de départ, et en regardant si elle est bien vérifiée.

Il y a néanmoins un point de détail à justifier : au nom de quoi pourrait-on dériver **si f n'est pas supposée dérivable, mais seulement continue par exemple** ? Pour cela, **on utilise le théorème fondamental de l'analyse** qui, pour rappel, dit que si g est continue, alors l'application $x \mapsto \int_0^x g(t)\mathrm{d}t$ est de classe C^1 (et sa dérivée égale g). Alors, si l'on parvient à exprimer f en fonction d'une telle intégrale, elle est de classe C^1 et on peut la dériver. En fait, par récurrence, on peut souvent démontrer que dans une telle situation, l'application est même indéfiniment dérivable.

Attention à ne pas dire de bêtise si l'intégrale n'a pas de variable dans les bornes : si l'on reprend l'exemple ci-dessus, $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ est une CONSTANTE ! Elle est donc dérivable, certes, mais de dérivée NULLE.

Exemple 4. Dans le premier exemple ci-dessus : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$, on note que si f vérifie cette égalité, alors $t \mapsto tf(t)$ est continue en tant que produit de fonctions continues, donc d'après le théorème fondamental de l'analyse l'application $x \mapsto \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (et sa dérivée est $x \mapsto xf(x)$). Par conséquent f aussi est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et en dérivant cette égalité on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = xf(x)$. C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre, qu'on sait résoudre.

Exemple 5. Dans le deuxième exemple ci-dessus : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) + f(x) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ (nécessairement f est dérivable sinon on ne pourrait pas écrire $f'(x)$), on note que si f vérifie cette égalité, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f'(x) = -f(x) + \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$: en tant que différence de f et d'une constante, qui sont dérivables, f' est aussi dérivable, et on a après dérivation : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = -f'(x)$. C'est une équation différentielle linéaire du second ordre (et même du premier ordre vérifiée par f'), qu'on sait résoudre.

Exercice 1. En déduire les solutions des équations intégrales ci-dessus : achever la résolution.

3.2 Équations faisant apparaître une involution ($f(-x)$, $f\left(\frac{1}{x}\right)$, etc.)

Vous croiserez en exercice des équations différentielles « tordues », avec quelque part $-x$ au lieu de x. Exemple :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(-x) + f(x) = \cos(x).$$

En général, il n'apparaîtra que f et f'' : cela simplifie les considérations sur la parité.

Nous sommes ennuyés pour traiter ce type d'équation différentielle à cause de ce $f''(-x)$: ce n'est pas une équation vérifiée par f, puisqu'il apparaît non pas f'', mais la dérivée de la composée de f avec $x \mapsto -x$.

3.2.1 Première méthode

L'idée est alors de se dire : comment pourrions-nous « enlever » ce signe moins ? On note que si f était une fonction *paire* ou *impaire*, alors le problème serait résolu : dans ce cas ses dérivées ont aussi une parité. En effet, supposons par exemple que f soit paire :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = f(-x),$$

alors, en dérivant cette relation (ne pas oublier de dériver $x \mapsto -x$), on a :

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = -f'(-x), \quad f''(x) = f''(-x), \quad f^{(3)}(x) = -f^{(3)}(-x), \quad \text{etc.}$$

On remarque que **la parité des dérivées de f alterne**. Il en est de même si l'on suppose f impaire.

Ainsi, si f est paire, alors f'' également, et l'équation différentielle devient *dans ce cas particulier* : $f'' + f = \cos$. Nous savons à présent la résoudre par les méthodes standards. Si f est impaire, c'est à peine différent.

Mais on ne peut pas supposer que f est paire ou impaire juste parce que cela nous chante. La clé est alors de se souvenir que **toute fonction se décompose de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire**, explicitement ainsi :

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{\text{paire}} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{\text{impaire}}.$$

De plus, ces expressions explicites nous assurent que si f est de classe C^p avec $p \in \mathbb{N}$, alors sa partie paire $g : x \mapsto \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ et sa partie impaire $h : x \mapsto \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$ sont aussi de classe C^p.

L'unicité est PRIMORDIALE. Elle nous permet d'identifier : si $g_1 + h_1 = g_2 + h_2$ avec g_1, g_2 paires, et h_1, h_2 impaires, alors : $g_1 = g_2$ et $h_1 = h_2$.

Cela nous permet donc, dans une équation différentielle linéaire où il apparaît $f(-x)$, $f'(-x)$, etc., en remplaçant f par $g + h$, où g et h sont ses parties paire et impaire (explicites au besoin, nous l'avons vu ci-dessus), de ne plus avoir ces fâcheux $-x$ grâce à la parité ! Plus précisément :

1. On introduit g paire et h impaire telles que : $f = g + h$. On pense à mentionner que g et h sont dérivables aussi souvent que f, *via* l'écriture explicite ci-dessus.
2. On injecte cette expression de f dans l'équation différentielle où l'on veut éliminer les $-x$. **Par unicité de la décomposition en somme de fonctions paire et impaire**, on identifie la partie paire dans chaque membre de l'égalité et de même pour la partie impaire : cela nous donne des équations différentielles vérifiées par g et h, qu'on sait résoudre. Si l'on ne connaît pas la partie paire ou la partie impaire du membre de droite de l'équation différentielle, par exemple ici :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(-x) + f'(-x) + f(x) = e^{-x},$$

il suffit de se souvenir qu'on a ci-dessus un moyen explicite de l'obtenir : la partie paire, ici, est $x \mapsto \dfrac{e^{-x}+e^{x}}{2}$, et la partie impaire est $x \mapsto \dfrac{e^{-x}-e^{x}}{2}$.

Attention au fait que si g est paire, alors g' est impaire, et inversement pour h ! C'est pourquoi il peut apparaître des systèmes couplés faisant intervenir à la fois g et h.

Remarque très utile. Nous conservons une équivalence ici, du fait que deux fonctions soient égales si et seulement si leurs parties paires et impaires sont égales : il est donc inutile de vérifier la réciproque à la fin.

3. On les résout, et **on vérifie que les solutions obtenues sont de la bonne parité pour être égales à g et h.** Cela nécessite de vérifier si l'on a bien $g(x) = g(-x)$ et $h(x) = -h(-x)$: on résout un système dont les inconnues sont les constantes multiplicatives qui apparaissent dans g et h. **Mais le plus simple, à mon avis**, est plutôt de regarder à quelle condition la partie impaire de l'expression de g obtenue est nulle (et de même avec la partie paire de h), qu'encore une fois on peut écrire explicitement au besoin, grâce à la décomposition explicite rappelée ci-dessus.

   J'estime cette approche plus simple, parce qu'elle ne nécessite pas d'argument sur la liberté d'une famille de fonctions, pour identifier « comme on voudrait » : situation qui se produit régulièrement si l'on cherche à quelle condition on a $g(x) = g(-x)$ (si on a une égalité du type : $\alpha e^{x} + \beta e^{-x} = \gamma e^{x} + \delta e^{-x}$, par exemple).
4. Il reste à écrire $f = g + h$ pour en déduire la forme des solutions.

Exemple 6. On cherche à déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(-x) + f(x) = e^{x}. \tag{E}$$

1. Pour cela, on note g et h les uniques fonctions paire et impaire telles que $f = g + h$. On l'a vu plus haut, g et h sont de classe C^2, et on a $f'' = g'' + h''$; de plus g'' est paire et h'' est impaire.
2. En remplaçant f et f'' par les expressions en fonction de g et h, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(-x) + f(x) = e^{x} \\
\iff & \forall x \in \mathbb{R}, \quad g''(-x) + h''(-x) + g(x) + h(x) = e^{x} = \underbrace{\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}}_{\text{paire}} + \underbrace{\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}}_{\text{impaire}} && \text{(on décompose e^{x} afin de pouvoir identifier)} \\
\iff & \forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{g''(x)}_{\text{paire}} - \underbrace{h''(x)}_{\text{impaire}} + \underbrace{g(x)}_{\text{paire}} + \underbrace{h(x)}_{\text{impaire}} = \underbrace{\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}}_{\text{paire}} + \underbrace{\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}}_{\text{impaire}} && \text{(comme g'' est paire et h'' impaire, on simplifie : $g''(-x) = g''(x)$ et $h''(-x) = -h''(x)$)} \\
\iff & \forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} g''(x) + g(x) = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}, \\ -h''(x) + h(x) = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}. \end{cases} && \text{(par unicité des parties paire et impaire)}
\end{aligned}$$

3. On sait résoudre ces deux équations différentielles : seule la recherche d'une solution particulière peut être un peu délicate, si on ne pense pas à utiliser le principe de superposition pour avoir tantôt $\dfrac{e^{x}}{2}$, tantôt $\dfrac{e^{-x}}{2}$, dans le membre de droite. **L'essentiel est de remarquer qu'on s'est ramené à une situation connue**. Après une résolution qu'on vous laisse compléter, vous obtenez que $f = g + h$ est solution de (E) si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(\gamma, \delta) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \alpha \cos(x) + \beta \sin(x) + \frac{e^{x}+e^{-x}}{4}, \quad h(x) = \gamma e^{x} + \delta e^{-x} - x\frac{e^{x}+e^{-x}}{4},$$

   avec g paire et h impaire. Comme g est paire, on peut être plus précis : sa partie impaire est nulle. On en déduit $\beta \sin = 0$, donc $\beta = 0$. De même, la partie paire de h, c'est-à-dire :

$$x \mapsto \gamma \left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2} \right) + \delta \left(\frac{e^{-x}+e^{x}}{2} \right)$$

est nulle (j'ai écrit la partie paire de chaque fonction de la somme ; noter que $x \mapsto x\dfrac{e^x + e^{-x}}{4}$ est impaire, puisque changer x en $-x$ la transforme en son opposée), ce qui implique : $\gamma = -\delta$. En résumé, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \alpha\cos(x) + \frac{e^x + e^{-x}}{4}, \quad h(x) = \gamma\left(e^x - e^{-x}\right) - x\frac{e^x + e^{-x}}{4}.$$

4. Comme $f = g + h$, on conclut que f est solution de (E) si et seulement si :

$$\exists(\alpha,\gamma) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \alpha\cos(x) + \gamma\left(e^x - e^{-x}\right) + (1-x)\,\frac{e^x + e^{-x}}{4}.$$

L'exemple qui suit montre que si les dérivées de f n'ont pas même parité que f, une subtilité apparaît. On doit résoudre un système différentiel.

Exemple 7. On cherche à déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(-x) + f(x) = x^2 + x + 1. \tag{E'}$$

1. Pour cela, on note g l'unique fonction paire et h l'unique fonction impaire telles que $f = g + h$. Alors g et h sont de classe C^1, et on a $f' = g' + h'$; de plus g' est **impaire** et h' est **paire** (attention !).
2. En remplaçant f et f' par les expressions en fonction de g et h, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(-x) + f(x) = x^2 + x + 1 \\
\iff & \forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(-x) + h'(-x) + g(x) + h(x) = x^2 + x + 1 \\
\iff & \forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{-g'(x)}_{\text{impaire}} + \underbrace{h'(x)}_{\text{paire}} + \underbrace{g(x)}_{\text{paire}} + \underbrace{h(x)}_{\text{impaire}} = \underbrace{x^2+1}_{\text{paire}} + \underbrace{x}_{\text{impaire}} \qquad \text{(comme } g' \text{ est impaire et } h' \text{ paire, on simplifie : } g'(-x) = -g'(x) \text{ et } h'(-x) = h'(x)\text{)} \\
\iff & \forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} h'(x) + g(x) = x^2 + 1, \\ -g'(x) + h(x) = x. \end{cases} \qquad \text{(par unicité des parties paire et impaire)}
\end{aligned}$$

3. C'est un système différentiel couplé : on le met sous forme matricielle pour le résoudre. Posons $Y = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$. Alors f est solution de (E) si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Y'(x) = \begin{pmatrix} g'(x) \\ h'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(x) - x \\ -g(x) + x^2 + 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} g(x) \\ h(x) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} -x \\ x^2 + 1 \end{pmatrix}}_{=B(x)}$$

Pour résoudre $Y' = AY + B$, on diagonalise A : on peut démontrer que : $A = P\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}P^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$. Par conséquent, on posant : $Z = P^{-1}Y = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, on a *via* un raisonnement classique :

$$\begin{aligned}
Y' = AY + B &\iff P^{-1}Y' = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} P^{-1}Y + P^{-1}B \\
&\iff Z' = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} Z + P^{-1}B \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R},\ \left\{ \begin{array}{rcl} z_1'(x) & = & iz_1(x) + \frac{-x-i(x^2+1)}{2} \\ z_2'(x) & = & -iz_2(x) + \frac{-x+i(x^2+1)}{2} \end{array} \right. \\
&\iff \exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \left\{ \begin{array}{rcl} z_1(x) & = & \alpha e^{ix} + \frac{x^2-3ix-2}{2} \\ z_2(x) & = & \beta e^{-ix} + \frac{x^2+3ix-2}{2} \end{array} \right. \\
&\iff \exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ Y(x) = PZ(x) = \begin{pmatrix} \alpha e^{ix} + \beta e^{-ix} + x^2 - 2 \\ \alpha i e^{ix} - \beta i e^{-ix} + 3x \end{pmatrix} \\
&\iff \exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \left\{ \begin{array}{rcl} g(x) & = & \alpha e^{ix} + \beta e^{-ix} + x^2 - 2 \\ h(x) & = & \alpha i e^{ix} - \beta i e^{-ix} + 3x \end{array} \right.
\end{aligned}$$

avec g paire et h impaire : ces conditions de parité équivalent à une condition sur α et β. Pour cela : soit on écrit les égalités $g(-x) = g(x)$ et $h(-x) = -h(x)$, et on identifie (ce qui nécessite d'utiliser un argument sur l'indépendance linéaire des fonctions : pourquoi ?), soit on utilise encore l'unicité de la décomposition en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire, sachant que la partie paire de $x \mapsto e^{ix}$ est $x \mapsto \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \cos(x)$ et la partie impaire est, par un raisonnement analogue : $x \mapsto i\sin(x)$. Ainsi l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \alpha e^{ix} + \beta e^{-ix} + x^2 - 2 = \underbrace{(\alpha+\beta)\cos(x) + x^2 - 2}_{\text{paire}} + \underbrace{i(\alpha-\beta)\sin(x)}_{\text{impaire}}$$

impose : $\alpha = \beta$ (pour que la partie impaire de g soit nulle), et : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 2\alpha\cos(x) + x^2 - 2$. Le même raisonnement avec h donne la même condition sur α et β, puis : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = -2\alpha\sin(x) + 3x$.

4. Finalement : $f = g + h$ est solution de (E') si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 2\alpha(\cos(x) - \sin(x)) + x^2 + 3x - 2.$$

Pour avoir les solutions f à valeurs réelles, il suffit de prendre $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 2.

1. Démontrer soi-même la diagonalisation de A proposée.
2. Calculer P^{-1}, et vérifier la justesse des deux équations différentielles vérifiées par z_1 et z_2.
3. Détailler la détermination explicite de z_1 et z_2.
4. Vérifier que h a bien l'expression finale annoncée.
5. Retrouver les expressions de g et h non pas à l'aide de l'unicité de la décomposition (comme utilisé ci-dessus), mais grâce aux égalités $g(-x) = g(x)$ et $h(-x) = -h(x)$.

3.2.2 Deuxième méthode

Une autre approche est de constater que si l'on remplace x par $-x$ dans l'équation différentielle étudiée, et que l'on dérive (d'abord s'assurer que c'est possible ! en exprimant la dernière dérivée de f en fonction des dérivées d'ordres inférieurs, ce qui justifie qu'elle est dérivable en tant que combinaison linéaire d'applications dérivables), alors on peut obtenir deux relations vérifiées par la fonction problématique $f(-x)$, ou $f'(-x)$, etc. En additionnant convenablement les deux relations obtenues, on élimine la fonction évaluée en $-x$, et on se retrouve avec une équation différentielle standard. Le défaut de l'approche est qu'en dérivant et en sommant, nous n'avons plus des équivalences : il reste donc une réciproque à vérifier à la fin, pour déterminer quelles sont les fonctions qui conviennent. De plus, en faisant cela, nous augmentons l'ordre des dérivées qui apparaissent dans l'équation, donc la résolution devient plus complexe.

Exemple 8. On reprend l'équation (E) ci-dessus :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(-x) + f(x) = e^x.$$

En remplaçant x par $-x$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x)+f(-x) = e^{-x}$. Ceci montre que f'' est deux fois dérivable, en tant que différence d'une exponentielle et de $x \mapsto f(-x)$, qui sont deux fois dérivables.

Dérivons-la deux fois (pourquoi pas une seule fois ? parce qu'en faisant cela, on aurait $f'''(x)$ et $f'(-x)$ qui apparaîtraient : rien de commun avec l'équation de départ, donc aucune combinaison des deux équations obtenues ne permettrait d'annuler la fonction évaluée en $-x$). On obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(4)}(x) + f''(-x) = e^{-x}.$$

En soustrayant cette équation et (E), on obtient l'équation différentielle suivante vérifiée par f :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(4)}(x) - f(x) = e^{-x} - e^x,$$

qu'on sait résoudre avec les méthodes classiques. Cela revient en effet à résoudre le système matriciel :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Y'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Y(x) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ e^{-x} - e^x \end{pmatrix}$$

en posant $Y = \begin{pmatrix} f \\ f' \\ f'' \\ f''' \end{pmatrix}$. C'est lourd, mais c'est possible. Nous vous laissons le faire :

Exercice 3. On pose : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et : $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ e^{-x} - e^x \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'on a :

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & i & -i \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -i & i \end{pmatrix}$ (*remarque : A est une matrice compagnon, ce qui peut faciliter votre recherche des éléments propres*).

2. Soit Y l'application vectorielle ci-dessus. On pose : $Z = P^{-1}Y = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}$. Montrer que Y vérifie : $Y' = AY + B$, si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} z_1'(x) &= z_1(x) + \frac{1}{4}\left(e^{-x} - e^x\right), \\ z_2'(x) &= -z_2(x) - \frac{1}{4}\left(e^{-x} - e^x\right), \\ z_3'(x) &= iz_3(x) + \frac{i}{4}\left(e^{-x} - e^x\right), \\ z_4'(x) &= -iz_4(x) - \frac{i}{4}\left(e^{-x} - e^x\right). \end{cases}$$

3. En déduire que $Y' = AY + B$ si et seulement si :

$$\exists(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4,\ \forall x \in \mathbb{R},\quad \begin{cases} z_1(x) &= ae^x + \frac{1}{8}\left(-e^{-x} - 2xe^x\right), \\ z_2(x) &= be^{-x} + \frac{1}{8}\left(-2xe^{-x} + e^x\right), \\ z_3(x) &= ce^{ix} + \frac{1}{8}\left((-1-i)e^{-x} + (1-i)e^x\right), \\ z_4(x) &= de^{-ix} + \frac{1}{8}\left((-1+i)e^{-x} + (1+i)e^x\right). \end{cases}$$

4. En déduire : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(4)}(x) - f(x) = e^{-x} - e^x$, si et seulement si :

$$\exists(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4, \quad f(x) = ae^x + be^{-x} + ce^{ix} + de^{-ix} + \frac{(3-2x)e^x - (3+2x)e^{-x}}{8}.$$

5. En déduire que si f vérifie (E), alors il existe $(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \alpha\cos(x) + \beta\sin(x) + \gamma e^x + \delta e^{-x} + \frac{(3-2x)e^x - (3+2x)e^{-x}}{8}.$$

(*Regarder à quelle condition on a :* $\forall x \in \mathbb{R}$, $\overline{f(x)} = f(x)$, *et identifier ; un argument d'indépendance linéaire peut être nécessaire pour permettre l'identification*).

Il faut encore vérifier à quelle condition sur $(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^4$ on a bien $f''(-x) + f(x) = e^x$. Des calculs lourds (avec un argument d'indépendance linéaire à invoquer sur une famille de fonctions, pour pouvoir identifier... si on n'est pas en mesure de l'invoquer, on simplifie l'égalité en prenant $x = 0$ par exemple) montrent que c'est vérifié si $\gamma + \delta = \frac{1}{2}$ et $2\beta = 0$. On en déduit que f est solution de (E) si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha\cos(x) + \gamma e^x + \left(\frac{1}{2} - \gamma\right)e^{-x} + \frac{(3-2x)e^x - (3+2x)e^{-x}}{8} \\ &= \alpha\cos(x) + \gamma(e^x - e^{-x}) + \frac{(3-2x)e^x + (1-2x)e^{-x}}{8}. \end{aligned}$$

Quitte à réarranger les termes, on peut se convaincre que cela donne bien les mêmes solutions que dans l'exemple 6. ← page 10

Exercice 4. Détailler l'argument menant aux conditions $\gamma + \delta = \frac{1}{2}$ et $2\beta = 0$.

Exemple 9. On reprend l'équation (E') ci-dessus :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(-x) + f(x) = x^2 + x + 1.$$

En remplaçant x par $-x$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) + f(-x) = x^2 - x + 1$. Ceci démontre que f' est dérivable, en tant que différence d'une application polynomiale et de $x \mapsto f(-x)$, qui sont dérivables. En dérivant la dernière égalité, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) - f'(-x) = 2x - 1.$$

En faisant la somme de cette équation et de (E'), on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) + f(x) = x^2 + 3x.$$

On sait résoudre une telle équation différentielle. On en déduit qu'il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \alpha\cos(x) + \beta\sin(x) + x^2 + 3x - 2.$$

En vérifiant si réciproquement, une telle fonction définit une solution de (E), on s'aperçoit qu'on doit avoir $\beta = -\alpha$. On en déduit que f est solution de (E) si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \alpha(\cos(x) - \sin(x)) + x^2 + 3x - 2.$$

Comme toujours, quand nous avons deux méthodes, il est intéressant de regarder leurs mérites comparés, afin de décider laquelle privilégier.

	Avantages	Défauts
1re méthode	Ramène à des équations différentielles simples	Plus astucieuse. Se complique si les dérivées successives n'ont pas la même parité que la fonction.
2e méthode	Plutôt naturelle	Augmente l'ordre (et donc la complexité) des équations différentielles, et nécessite de vérifier une réciproque.

Comparez par exemple les deux traitements de l'équation différentielle (E) (exemples 6 et 8). Dans un cas, on résout deux équations différentielles d'ordre 2 ; dans l'autre, on résout une équation différentielle d'ordre 4. Constat analogue pour les exemples 7 et 9. ← page 10

3.2.3 ☢ Généralisation aux compositions avec des involutions

On appelle involution une application τ définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et telle que $\tau \circ \tau = \mathrm{Id}$. Les involutions les plus souvent rencontrées sont :

$$\tau : x \mapsto -x, \quad \tau : x \mapsto \frac{1}{x},$$

où l'on vérifie qu'effectivement : $-(-x) = x$, et $\frac{1}{\frac{1}{x}} = x$, pour tout x où ces quantités sont définies. Mais il y en a d'autres ; vous pouvez vérifier que les applications suivantes :

$$\tau : x \mapsto -\frac{1}{x}, \quad \tau : x \mapsto 1 - x, \quad \tau : x \mapsto \frac{3x+4}{4x-3}$$

conviennent aussi. Toute la section qui précède correspondait au cas $\tau : x \mapsto -x$, que nous généralisons ici partiellement.

Alors, lorsqu'on doit résoudre une équation différentielle faisant intervenir la composition de la fonction inconnue avec une involution τ, par exemple :

$$\forall x > 0, \quad f'\left(\frac{1}{x}\right) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(1-x) = f(x), \quad \forall x \in \left]\frac{3}{4}, +\infty\right[, \quad f'\left(\frac{3x+4}{4x-3}\right) + f(x) = 0,$$

la première méthode ci-dessus **ne se généralise pas** (ou, du moins, très mal, sauf dans des cas particuliers tels que les involutions de la forme $x \mapsto \alpha - x$). Par contre la seconde marche toujours : on remplace non plus x par $-x$, mais par $\tau(x)$ (du fait que $\tau(\tau(x)) = x$, cela fera disparaître quelques fonctions gênantes), et vous dérivez. Ensuite, vous sommez ou soustrayez les équations obtenues pour vous ramener à une équation différentielle plus classique (mais pas forcément aussi simple que dans le cas de l'involution $\tau : x \mapsto -x$).

Exemple 10. Soit f une application deux fois dérivable telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(\pi - x) = f(x). \tag{E''}$$

Alors, en remplaçant x par $\pi - x$, comme $\pi - (\pi - x) = x$, on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = f(\pi - x)$. Ceci démontre que f'' est deux fois dérivable, en tant que composition de f et de $x \mapsto \pi - x$. En dérivant deux fois cette dernière égalité, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(4)}(x) = f''(\pi - x).$$

En combinant cette équation avec (E''), on voit que f vérifie l'équation différentielle : $y^{(4)} = y$. On sait la résoudre. Ensuite, toute la démarche imite celle dans le cas de l'involution $\tau : x \mapsto -x$.

Exercice 5. Achever la résolution de l'exemple ci-dessus, pour montrer qu'une telle fonction f est nécessairement de la forme :

$$f : x \mapsto \alpha\left(e^x + e^{\pi - x}\right) + \beta \cos(x),$$

avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Vous aurez à utiliser l'indépendance linéaire de $(x \mapsto e^x, x \mapsto e^{-x}, \cos, \sin)$.

4 Le théorème de Cauchy linéaire : comment utiliser l'unicité des solutions

Ce théorème ne permet pas une détermination pratique des solutions, mais intervient dans les questions théoriques (lorsque les solutions ne sont pas explicitées, mais qu'on désire tout de même savoir des choses dessus). Nous traduisons là l'unicité des solutions à un problème de Cauchy :

Théorème de Cauchy : utilisation pratique

1. Pour montrer que deux solutions sont **égales**, il suffit de montrer que leurs dérivées (à un ordre suffisant) sont **égales en un seul réel**.
2. Pour montrer qu'une solution est **nulle**, il suffit de montrer que ses dérivées (à un ordre suffisant) sont simultanément **nulles en un seul réel**.

Par contraposée, si une solution et ses dérivées ne **s'annulent pas** simultanément en un réel, alors elle est **non identiquement nulle**.

C'est bien sûr très économique de se ramener aux valeurs en un seul point. D'où l'intérêt.

Exemple 11. Soit y une application de classe C^1 sur I et vérifiant : $y' = ay$, avec $a : I \to \mathbb{R}$ une application continue. On aimerait rendre rigoureux ce raisonnement :

$$y' = ay \iff \frac{y'}{y} = a \iff \exists c \in \mathbb{R},\ \ln(|y|) = A + c \iff \exists c \in \mathbb{R},\ y = \pm e^c e^A,$$

où A est une primitive de a. Il permet en effet de retrouver rapidement la structure des solutions de l'équation différentielle $y' = ay$. Il n'est pas rigoureux du fait que y peut s'annuler sur I *a priori*. Grâce au théorème de Cauchy, montrons que ce n'est pas le cas, sauf si c'est la fonction nulle : s'il existe $t_0 \in I$ tel que $y(t_0) = 0$, montrons que $y = 0$; cela revient à démontrer que y et la fonction nulle sont égales. Or y et la fonction nulle sont solutions du même problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' & = & ay, \\ y(t_0) & = & 0. \end{cases}$$

puisque la fonction nulle s'annule en particulier en t_0. Donc, par unicité de la solution (théorème de Cauchy linéaire), on en déduit : $y = 0$. Par contraposition, une solution non nulle ne s'annule jamais, et la division par y ci-dessus est donc licite.

Exemple 12. Soient $a, b : I \to \mathbb{R}$ deux applications continues sur I. Soit $y : I \to \mathbb{C}$ une application de classe C^2 sur I et solution de $(E) : y'' + ay' + by = 0$. Nous allons montrer que, pour que y soit à valeurs réelles, il suffit que y et y' prennent une valeur réelle *en un seul réel* t_0 !

Pour cela, notons que y est à valeurs réelles si et seulement si : $\forall t \in I,\ y(t) = \overline{y(t)}$. Autrement dit, l'application y est à valeurs réelles si et seulement si les fonctions y et $\bar{y}$ sont égales : on est bien dans le cas d'étude de l'encadré ci-dessus... Du moins, si $\bar{y}$ est bien une solution de (E) : c'est une évidence, si l'on considère le conjugué de l'égalité $y'' + ay' + b = 0$, en se souvenant que a et b sont supposées à valeurs réelles.

Ainsi, y et $\bar{y}$ sont deux solutions de (E), donc d'après le théorème de Cauchy linéaire elles sont égales si et seulement si (y, y') et $(\bar{y}, \bar{y}')$ coïncident en au moins un réel t_0. Or $y(t_0) = \overline{y(t_0)}$ signifierait que $y(t_0) \in \mathbb{R}$, et de même pour $y'(t_0)$: d'où le résultat annoncé.

Exemple 13. Soit $a : I \to \mathbb{R}$ une application continue et *paire* sur un intervalle I centré en 0. Soit $y : I \to \mathbb{C}$ une application de classe C^2 sur I et solution de $(E) : y'' + ay = 0$. On se demande à quelle condition y est elle-même une fonction paire, c'est-à-dire : à quelle condition a-t-on $y(t) = y(-t)$ pour tout $t \in I$? Pour cela, on note que si y est solution de (E), alors $y_{\text{sym}} : t \mapsto y(-t)$ est aussi solution de (E), vu que :

$$\forall t \in I,\ y'_{\text{sym}}(t) = -y'(-t), \quad \text{et :} \quad \forall t \in I,\ y''_{\text{sym}}(t) = (-1)^2 y''(-t) = y''(-t),$$

de sorte que :

$$\begin{aligned}\forall t \in I, \quad y''_{\text{sym}}(t) + a(t)y_{\text{sym}}(t) = y''(-t) + a(t)y(-t) &= y''(-t) + a(-t)y(-t) && \text{(car } a \text{ est paire)}\\ &= 0 && \text{(car } y \text{ vérifie } (E)).\end{aligned}$$

Ainsi y et y_{sym} sont solutions de la même équation différentielle (E) du second ordre : elles sont donc égales si et seulement si elles vérifient la même condition initiale. Or :

$$y_{\text{sym}}(0) = y(0), \quad y'_{\text{sym}}(0) = -y'(0),$$

donc y et y_{sym} sont égales si et seulement si elles vérifient la même condition initiale, si et seulement si : $y(0) = y(0)$, et : $y'(0) = -y'(0)$. La première condition est toujours vérifiée, et la seconde est vérifiée si et seulement si $y'(0) = 0$.

En conclusion, une solution y de (E) est paire si et seulement si : $y'(0) = 0$.

Exercice 6.

1. Trouver un résultat analogue pour les solutions *impaires* (on garde la même hypothèse sur a).
2. Trouver un résultat analogue dans le cas d'une équation différentielle de la forme $y'' + ay' + by = 0$. Soyez vigilants : si a et b sont paires, le raisonnement ci-dessus ne fonctionne plus, cherchez pourquoi. Vous devez changer l'hypothèse de parité, sur a ou sur b.

4.1 ☢ L'isomorphisme $\Phi : S \to K^2$ du théorème de structure

Lorsque les rappels de l'encart de la page 16 ne sont d'aucune utilité, on peut recourir à une formulation équivalente (mais plus puissante car elle a de la *structure*) du théorème de Cauchy linéaire. La démonstration du théorème de structure de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2, montre aussi en passant que pour $t_0 \in I$ fixé, l'application :

$$\Phi : y \mapsto (y(t_0), y'(t_0))$$

est un isomorphisme entre l'espace vectoriel des solutions de $y'' + ay' + b = 0$ (qu'on note S ici) et K^2. Comme un isomorphisme préserve tous les résultats relatifs à la structure d'espace vectoriel, on en déduit en particulier que Φ préserve les familles libres : ainsi (f, g) est une famille libre de S si et seulement si $\Phi((f,g)) = \left(\begin{pmatrix} f(t_0) \\ f'(t_0)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g(t_0) \\ g'(t_0)\end{pmatrix}\right)$ est libre (de même avec les bases ; c'est de toute façon équivalent pour une famille de cardinal 2). Ceci permet souvent d'avoir des informations sur le comportement global des fonctions, à l'aide seulement d'informations locales (c'est-à-dire *en un seul point* t_0), et inversement.

Exemple 14. Soient $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue sur $\mathbb{R}$, et (f, g) un système fondamental de solutions de l'équation différentielle : $y''+qy = 0$. Montrons que f et g ne peuvent pas s'annuler en le même réel : il serait insuffisant d'invoquer l'unicité de la solution à un problème de Cauchy ici, puisque pour une équation différentielle d'ordre 2 il nous faut aussi une condition initiale sur la dérivée (ce que nous n'avons pas ici). Puisque c'est insuffisant, songeons au résultat rappelé ci-dessus : si f et g s'annulent en le même réel t_0, alors : $f(t_0) = g(t_0) = 0$. Mais alors, la famille $\left(\begin{pmatrix} f(t_0) \\ f'(t_0)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g(t_0) \\ g'(t_0)\end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ f'(t_0)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ g'(t_0)\end{pmatrix}\right)$ est clairement liée, donc $\Phi^{-1}\left(\begin{pmatrix} f(t_0) \\ f'(t_0)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g(t_0) \\ g'(t_0)\end{pmatrix}\right) = (f, g)$ est aussi liée (puisque Φ^{-1} est un isomorphisme, il conserve tous les résultats relatifs à la structure d'espace vectoriel) ; ainsi (f, g) n'est pas un système fondamental de solutions : absurde.

Un autre argument serait que si f et g s'annulent en t_0, alors toute autre solution aussi, puisqu'elle est combinaison linéaire de f et g ; mais alors, les problèmes de Cauchy imposant une valeur non nulle en condition initiale n'auraient pas de solution. C'est absurde, puisque le théorème de Cauchy linéaire assure l'existence de solutions vérifiant n'importe quelle condition initiale prescrite.

Si l'utilisation des isomorphismes vous paraît trop savante : le wronskien permet le même type de raisonnement, mais avec l'avantage (selon les goûts) d'être un outil pouvant être manipulé de façon purement calculatoire : nulle abstraction là derrière. Voir la section 5.2 pour en savoir plus.

Exercice 7. Montrer que, avec les mêmes notations que dans l'exemple 14, les zéros de f et g sont « entrelacés », c'est-à-dire : si a et b sont deux zéros consécutifs de f, alors il existe $t_0 \in]a, b[$ tel que : $g(t_0) = 0$. C'est plus difficile que dans l'exemple ci-dessus, parce qu'on ne peut pas se contenter de raisonner sur un t_0 fixé : considérer l'application $W : t \mapsto \begin{vmatrix} f(t) & g(t) \\ f'(t) & g'(t) \end{vmatrix}$, qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ si f et g forment un système fondamental de solutions (pourquoi ?).

5 Utilisation du wronskien

Soient f et g deux solutions de l'équation différentielle $(E) : y'' + ay' + by = 0$. Le wronskien de f et g, souvent noté $W_{f,g}$ est défini par :

$$W_{f,g} = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g.$$

Un exercice classique est de démontrer que $W_{f,g}$ vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre, afin d'en déduire que $W_{f,g}$ est, à constante multiplicative près, une exponentielle :

$$\forall x \in I, \quad W_{f,g}(x) = \lambda e^{-A(x)}.$$

Ne nous soucions ici pas de savoir ce qu'est A, ni comment on démontre cela : je le laisse en exercice. L'important est la forme de $W_{f,g}$: c'est une exponentielle, et elle est explicite si a et b sont explicites (on n'a pas besoin de connaître f et g pour cela : c'est une donnée très importante ; en revanche λ est une constante dépendant de f et g).

La question est ici : *que nous enseigne le wronskien de f et g ?* À quoi sert-il ? Quel type de problème permet-il de résoudre ?

5.1 Pour trouver une solution d'une équation différentielle d'ordre 2, quand on connaît déjà une

On a déjà vu, dans le cours et dans la section 2.3 de ce document, la méthode de l'abaissement de l'ordre qui permet de trouver une deuxième solution à une équation différentielle d'ordre 2 lorsqu'on en connaît déjà une (afin d'en déduire un système fondamental de solutions). Le wronskien est un autre moyen d'y parvenir *. En effet, notons f une première solution de (E) trouvée, et soit g une application de classe C^2. Si g est solution de (E), alors d'après ce que l'on a dit plus haut on a : ← page 7

$$fg' - f'g = W_{f,g} = \lambda e^{-A}. \tag{$*$}$$

On l'a dit, e^{-A} est explicite si l'équation différentielle est explicite. Comme f est déjà connue, on sait calculer f'. On en déduit que g vérifie l'équation différentielle linéaire *du premier ordre* : $fy' - f'y = \lambda e^{-A}$, dont tous les coefficients sont explicites. En la résolvant (pour une valeur de λ non nulle que vous choisissez, par exemple $\lambda = 1$ puisqu'il n'y a aucune raison de se compliquer la vie), vous en déduisez une solution g de (E) (il y a en principe une réciproque à vérifier). Elle est nécessairement non proportionnelle à f si vous avez pris $\lambda \neq 0$ (pourquoi ? une partie de l'explication est dans la section suivante), donc (f, g) fournit un système fondamental de solutions de (E).

Cette méthode est en principe plus simple que celle de l'abaissement de l'ordre, parce qu'il n'y a qu'une seule équation différentielle d'ordre 1 à résoudre (et on l'obtient assez facilement), là où la méthode de l'abaissement de l'ordre nécessite d'abord de trouver ladite équation différentielle d'ordre

*. Notons qu'aucune des deux méthodes n'est officiellement au programme, donc on peut vous faire privilégier l'une ou l'autre approche selon le goût des concepteurs de sujet : si je n'ai exposé que la méthode de l'abaissement de l'ordre dans le cours, c'est parce que c'est l'approche la plus directe, au contraire du wronskien qui est inutilisable tant qu'on n'a pas démontré les résultats annoncés en début de section.

1 (ce qui peut parfois prendre un peu de temps), de la résoudre, d'intégrer les solutions obtenues, puis d'effectuer une multiplication par f pour enfin en déduire une seconde solution de (E) linéairement indépendante.

Remarque. J'explique dans la section 1.1 comment résoudre des équations différentielles du premier ordre rapidement, en reconnaissant la dérivée d'un produit. Ce serait possible pour $(*)$, mais plus laborieux. Mieux ici : reconnaître la dérivée d'un quotient ! On reconnaît en effet le numérateur de la fameuse identité $\left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{g'f - gf'}{f^2}$. On fait apparaître le dénominateur par une division par f^2 (si elle est possible), et alors : ← page 1

$$fg' - f'g = W_{f,g} = \lambda e^{-A} \iff \frac{fg' - f'g}{f^2} = \lambda \frac{e^{-A}}{f^2} \iff \left(\frac{g}{f}\right)' = \lambda \frac{e^{-A}}{f^2}.$$

En intégrant cette égalité (sans oublier la constante d'intégration) on en déduit $\frac{g}{f}$, puis g.

5.2 Pour démontrer et utiliser des résultats d'indépendance linéaire entre solutions

Nous avons dit dans la section 4 comment l'unicité dans le théorème de Cauchy linéaire peut être utilisée pour avoir des informations qualitatives sur les solutions d'une équation différentielle. C'est une conséquence puissante de ce théorème, mais elle est insuffisante lorsque, dans notre étude, nous n'avons pas (ou ne cherchons pas) des données *en un seul réel* t_0, mais plusieurs (voire sur tout l'intervalle d'étude). Pour un exemple concret, voir l'exercice 7 de ce document où le théorème de Cauchy n'était d'aucune aide parce qu'on y étudiait les solutions d'une équation différentielle en plusieurs points différents (à savoir : deux zéros consécutifs d'une solution f, et un zéro de g). ← page 16 ← page 18

Lorsqu'on est dans ce cas de figure (comportement de deux solutions d'une équation différentielle *en plus qu'un seul point*), il y a deux solutions :

— utiliser l'isomorphisme $y \mapsto (y(t), y'(t))$ de la section 4.1 mais en variant les choix de t ; ← page 17

— utiliser le wronskien (et nous expliquons comment ici, dans les grandes lignes).

Pour comprendre l'apport théorique du wronskien de deux solutions f et g, rappelons que le wronskien est un *déterminant* : en vérité, l'expression $W_{f,g} = fg' - f'g$ n'est pas très instructive, et il est largement préférable (du moins pour les questions théoriques) d'utiliser l'expression équivalente : $W_{f,g} = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix}$.

On en déduit notamment :

$$(f, g) \text{ est liée } \iff W_{f,g} = 0.$$

Exercice 8. Démontrer cette équivalence. Le sens réciproque est plus difficile qu'il n'y paraît : lorsqu'on affirme que (f, g) est liée, les scalaires de la relation de dépendance sont des *constantes*.

Cette équivalence ne serait pas très intéressante si l'on n'avait pas un moyen simple de tester l'annulation de $W_{f,g}$. Or, comme nous l'avons dit plus haut, on peut démontrer que $W_{f,g}$ est de la forme : $W_{f,g} = \lambda e^A$. Comme une exponentielle ne s'annule jamais, la nullité de $W_{f,g}$ se ramène à celle de la constante λ : affaire très simple à trancher ! On a en effet :

$$\forall x \in I,\ W_{f,g}(x) = 0 \iff \exists x_0 \in I,\ W_{f,g}(x_0) = 0 \iff \lambda = 0.$$

Exercice 9. Démontrer ces équivalences.

En combinant toutes les équivalences qui précèdent, on obtient quelque chose de remarquable : pour que (f, g) soit liée (respectivement libre), il suffit D'UN SEUL RÉEL t_0 tel que $W_{f,g}(t_0) = 0$ (respectivement $W_{f,g}(t_0) \neq 0$). La liberté de $\left(\begin{pmatrix} f(t) \\ f'(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g(t) \\ g'(t) \end{pmatrix}\right)$ en un seul réel $t = t_0$ implique la liberté PARTOUT, ainsi que la liberté de la famille (f, g) ! Diantre. Et un intérêt (pour vous) est que vous pouvez tester cette liberté *par le pur calcul*, vu que W peut être rendu explicite à peu de frais.

Exercice 10. Redémontrer le résultat de l'exemple 14, mais cette fois-ci en utilisant le wronskien de f et g : on commencera par démontrer qu'il est constant en étudiant sa dérivée. On s'inspirera alors de la discussion de cette section pour montrer le résultat voulu.

Table des matières