Méthodes– Polynômes

Décomposition en éléments simples de fractions rationnelles

1 Principe général

La décomposition en éléments simples permet de simplifier des *fractions rationnelles* (c'est-à-dire : des quotients $x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$ d'applications polynomiales), pour les écrire comme des sommes de fractions plus simples (comme le nom l'indique...), où les dénominateurs sont de petit degré. Dans la majeure partie des cas, les dénominateurs de ces « éléments simples » sont de degré 1 ou 2, si bien qu'une décomposition en éléments simples est *souvent* de la forme :

$$\forall x \in \bigstar, \quad \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0}{x+\alpha_0} + \frac{a_1}{x+\alpha_1} + \cdots + \frac{a_m}{x+\alpha_m} + \frac{b_1 x + c_1}{x^2+\beta_1 x + \gamma_1} + \cdots \frac{b_n x + c_n}{x^2+\beta_n x + \gamma_n}.$$

(La quantification $\bigstar$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, au choix, dont on exclut les endroits où les dénominateurs s'annulent. Quant aux coefficients a_i, b_i, c_i, ils appartiennent au même corps que les coefficients du dénominateur.)

Les fractions du membre de droite sont ce qu'on appelle les *éléments simples*. Cette écriture correspond au cas le plus fréquemment rencontré : $\deg(P) < \deg(Q)$, et Q sans racine multiple. **On verra dans les sections 4 et 6 des décompositions en éléments simples d'une autre forme**. → page 5 → page 9

Pour savoir quels sont les dénominateurs du membre du droite : on écrit Q comme un produit de facteurs irréductibles (c'est-à-dire, si l'on est dans $\mathbb{R}$: comme produit de polynômes de degré 1, ou de degré 2 sans racine réelle ; dans $\mathbb{C}$: comme produit de polynômes de degré 1). Les facteurs irréductibles sont alors les dénominateurs du membre de droite.

Exemple 1. Si l'on veut décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $x \mapsto \dfrac{x^2+x}{x^3-x}$, on note que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $x^3 - x = x(x^2-1) = x(x-1)(x+1)$. La décomposition en éléments simples est donc de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1,0,-1\}, \quad \frac{x^2+x}{x^3-x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1},$$

où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ est à expliciter.

Exemple 2. Si l'on veut décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $x \mapsto \dfrac{1}{x^3+x}$, on note que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $x^3 + x = x(x^2+1)$. Si l'on s'en tient à des fractions rationnelles réelles, on ne peut pas aller plus loin car X^2+1 n'a pas de racine réelle (et ne peut donc pas s'écrire comme produit de polynômes réels de degré 1). Sa décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ est donc de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{1}{x^3+x} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1},$$

où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ est à expliciter (**attention à bien mettre $bx+c$, et non seulement une constante b, au numérateur de la seconde fraction**).

Si l'on est embêté par le dénominateur de degré 2, il faut se placer sur $\mathbb{C}$, de sorte que $x \mapsto x^2+1$ puisse se scinder (mais cela peut avoir de très nombreux désavantages dans nos applications pratiques : on ne le fera qu'exceptionnellement). On a : $\forall x \in \mathbb{C}$, $x^2+1 = (x+i)(x-i)$, donc : $\forall x \in \mathbb{C}$, $x^3+x = x(x+i)(x-i)$. La décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ devient donc :

$$\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{0, i, -i\}, \quad \frac{1}{x^3+x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+i} + \frac{c}{x-i},$$

où $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ est à expliciter (les b et c ne sont *a priori* pas les mêmes que dans la décomposition sur $\mathbb{R}$).

Dans les exemples ci-dessus, Q n'a pas de racine multiple, et $\deg(P) < \deg(Q)$. Dans le cas où $\deg(P) \geqslant \deg(Q)$, ou quand il y a des racines multiples, la décomposition en éléments → page 5 → page 9

simples est sensiblement différente : voir les sections 4 et 6.

Remarque spécifique au programme de PSI. On ne se soucie pas de la théorie : vous n'avez en particulier pas à savoir pourquoi une telle décomposition est toujours possible. Je donne toutefois une démonstration dans l'exercice ci-dessous, dans un cas particulier (décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$, avec $\deg(P) < \deg(Q)$ et Q sans racine multiple ; on peut adapter la démonstration au cas général, mais la formalisation est plus lourde) :

Exercice 1. Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On suppose que Q n'a pas de racine multiple ; on peut donc l'écrire : $Q = \prod_{k=1}^{n}(X - \alpha_k)$, où les α_k sont des nombres complexes DISTINCTS. Notons $I = \mathbb{C} \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$.

On pose également : $E = \left\{x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)} \mid P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]\right\}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{C}^0(I, \mathbb{C})$.
2. Montrer que E admet pour base :

$$\left(x \mapsto \frac{x^k}{Q(x)}\right)_{0 \leqslant k \leqslant n-1} = \left(x \mapsto \frac{1}{Q(x)}, x \mapsto \frac{x}{Q(x)}, \dots, x \mapsto \frac{x^{n-1}}{Q(x)}\right),$$

   et en déduire la dimension de E.
3. On pose : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\forall x \in I$, $f_k(x) = \frac{1}{x-\alpha_k}$. Montrer que $(f_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est une famille libre de E.
4. En déduire que pour tout $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$, il existe un UNIQUE $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que :

$$\forall x \in I, \quad \frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{x - \alpha_k}.$$

On attend seulement de vous de savoir trouver *en pratique* la décomposition en éléments simples. C'est-à-dire : savoir expliciter les coefficients des numérateurs des éléments simples.

Votre approche naïve (qui consiste à mettre toutes les fractions du membre de droite au même dénominateur, et à identifier les numérateurs de chaque membre) **est terriblement inefficace** : elle donne en effet $n + 1$ équations pour $n + 1$ inconnues (si Q est de degré n), ce qui est vite sujet aux erreurs de calcul. Pire : si n est trop élevé, vous ne saurez plus résoudre ces équations. Pour en juger, essayez de déterminer les réels $a_0, \dots, a_{100}$ dans la décomposition en éléments simples suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-100, \dots, 0\}, \quad \frac{1}{x(x+1) \times \cdots \times (x+99)(x+100)} = \frac{a_0}{x} + \frac{a_1}{x+1} + \cdots + \frac{a_{99}}{x+99} + \frac{a_{100}}{x+100}.$$

Avec la méthode que mes prédécesseurs vous ont enseignée, et que je vous rappelle dans la section suivante, c'est l'affaire de seulement quelques lignes.

2 ✓ Cas le plus fréquent : dénominateur scindé à racines simples

On suppose ici que Q est un produit de facteurs de degré 1, sans racine multiple (on dit dans ce cas que Q est *scindé à racines simples*). On exclut en particulier le cas où Q admettrait des facteurs de degré 2 sans racine. Dans ce cas Q est de la forme : $Q = \prod_{k=1}^{n}(X - \alpha_k)$, où les α_k sont TOUS DISTINCTS, et d'après la section précédente une décomposition en éléments simples de $x \mapsto \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ avec $\deg(P) < \deg(Q)$ est de la forme :

$$\forall x \in \bigstar, \quad \frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{x - \alpha_k}. \qquad (*)$$

où les a_k sont à expliciter.

Méthode. Soit $j \in [\![1,n]\!]$. On multiplie l'égalité $(*)$ par $x-\alpha_j$. Comme $Q = \prod_{k=1}^{n}(X-\alpha_k)$, cela donne :

$$\forall x \in \bigstar, \quad \frac{P(x)}{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(x-\alpha_k)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k(x-\alpha_j)}{x-\alpha_k} = a_j + \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\frac{a_k(x-\alpha_j)}{x-\alpha_k}$$

Le $x-\alpha_j$ apparaît en effet au numérateur et au dénominateur du membre de gauche, donc il se simplifie. Quand $x \to \alpha_j$, tous les termes de la somme du membre de droite valent 0, à cause du $x-\alpha_j$ en facteur. On obtient alors : $\dfrac{P(\alpha_j)}{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(\alpha_j-\alpha_k)} = a_j$, ce qui explicite le j^{e} coefficient. On suit ce procédé pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, et on détermine ainsi tous les coefficients de la décomposition en éléments simples, *sans avoir à résoudre le moindre système linéaire.*

Exemple 3. Décomposons en éléments simples la fraction rationnelle $x \mapsto \dfrac{1}{x(x+1)}$. On écrit qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0,-1\}, \quad \frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}.$$

En multipliant par x cette égalité, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{0,-1\}$: $\frac{1}{x+1} = a + \frac{bx}{x+1}$. Quand $x \to 0$, le terme $\frac{bx}{x+1}$ s'annule, et on obtient : $\frac{1}{0+1} = a$, c'est-à-dire : $a = 1$.

De même, en multipliant par $x+1$ l'égalité ci-dessus, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{0,-1\}$: $\frac{1}{x} = \frac{a(x+1)}{x} + b$. Quand $x \to -1$, le terme $\frac{a(x+1)}{x}$ s'annule, et on obtient : $\frac{1}{-1} = b$, c'est-à-dire : $b = -1$.

En conclusion :

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0,-1\}, \quad \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}.$$

La différence de deux inverses consécutifs est donc égale à l'inverse de leur produit : cette décomposition en éléments simples est très fréquente et vous gagneriez beaucoup à la connaître par cœur.

Exemple 4. Décomposons en éléments simples la fraction rationnelle $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-1}$. On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2-1 = (x-1)(x+1)$. On en déduit qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1,-1\}, \quad \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}.$$

En multipliant par $x-1$ cette égalité, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{1,-1\}$: $\frac{1}{x+1} = a + \frac{b(x-1)}{x+1}$. Quand $x \to 1$, le terme $\frac{b(x-1)}{x+1}$ s'annule, et on obtient : $\frac{1}{2} = a$.

De même, en multipliant par $x+1$ l'égalité ci-dessus, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{1,-1\}$: $\frac{1}{x-1} = \frac{a(x+1)}{x-1} + b$. Quand $x \to -1$, le terme $\frac{a(x+1)}{x-1}$ s'annule, et on obtient : $\frac{1}{-2} = b$, c'est-à-dire : $b = -\frac{1}{2}$.

En conclusion :

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1,-1\}, \quad \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right).$$

On observe que a et b sont opposés : on pouvait le « prédire » grâce à la parité de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-1}$. Voir la section 1, exemple 10. **Cette décomposition en éléments simples est très fréquente et à savoir retrouver rapidement**. → page 7

Quand la méthode est acquise, vous pouvez sauter des étapes. Par exemple, ci-dessus, après avoir écrit l'égalité : $\frac{1}{x^2-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$ (tout cela étant convenablement quantifié), j'accepte une rédaction se bornant à : « en multipliant par $x-1$ cette égalité et en prenant $x \to 1$, on obtient : $a = \frac{1}{2}$. De même, en multipliant par $x+1$ et en prenant $x \to -1$, on obtient : $b = -\frac{1}{2}$. »

Exercice 2. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$. On suppose : $\alpha \neq \beta$. Décomposer en éléments simples $x \mapsto \dfrac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)}$.

Exercice 3. Décomposer en éléments simples $x \mapsto \dfrac{1}{x(x+1)\times\cdots\times(x+99)(x+100)} = \dfrac{1}{\prod\limits_{i=0}^{100}(x+i)}$.

3 ✓ Cas de racines complexes non réelles au dénominateur

On suppose dans cette section qu'on cherche une décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$, et que Q n'est plus scindé, c'est-à-dire : il est divisible par des polynômes de degré 2 sans racine réelle (ce qui revient à dire qu'ils sont de discriminants strictement négatifs). Néanmoins on suppose toujours que Q est sans racine multiple. Dans ce cas Q est de la forme : $Q = \prod\limits_{k=1}^{m}(X-\alpha_k) \times \prod\limits_{\ell=1}^{n}(X^2+\beta_\ell X+\gamma_\ell)$, et la décomposition en éléments simples de $x \mapsto \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, avec $\deg(P) < \deg(Q)$, est de la forme donnée en début de section 1 ; nous la réécrivons ici, de façon plus compacte :

$$\forall x \in \bigstar, \quad \frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k}{x-\alpha_k} + \sum_{\ell=1}^{n} \frac{b_\ell x + c_\ell}{x^2+\beta_\ell x+\gamma_\ell}. \tag{$\dagger$}$$

Bien remarquer que le numérateur est éventuellement de degré 1 **si le dénominateur est de degré** 2. On retiendra que dans tous les cas, le numérateur peut être n'importe quel polynôme de degré strictement inférieur à celui du dénominateur.

Méthode. On suit la même démarche que dans le cas favorable de la section précédente, où Q est scindé et à racines simples. Il n'y a rien de neuf pour déterminer les a_k ; pour déterminer les b_ℓ et c_ℓ, on multiplie encore une fois l'égalité ci-dessus par $x^2+\beta_j x+\gamma_j$ avec $j \in [\![1,n]\!]$, et on prend la limite quand x tend vers l'une des deux racines de $x^2+\beta_j x+\gamma_j$ (cela vous nécessite d'avoir calculé ces racines : notons ω l'une des deux). On obtient alors, après les simplifications de rigueur, avec les notations ci-dessus :

$$\frac{P(\omega)}{\prod\limits_{k=1}^{m}(\omega-\alpha_k)\prod\limits_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq j}}^{n}(\omega^2+\beta_\ell\omega+\gamma_\ell)} = b_j\omega + c_j.$$

À ce stade, une possibilité pour conclure (on en propose une autre dans la section 3.1) est d'écrire les deux membres de cette égalité sous forme algébrique, et d'identifier parties réelles et imaginaires. Cela fournit deux équations vérifiées par les deux inconnues b_j et c_j : on sait résoudre.

Exemple 5. Décomposons en éléments simples la fraction rationnelle $x \mapsto \dfrac{x-2}{(x+1)(x^2+1)}$. Comme X^2+1 n'a pas de racine réelle, on ne peut pas factoriser outre mesure le dénominateur sur $\mathbb{R}$. On en déduit qu'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{C}\setminus\{-1,i,-i\}, \quad \frac{x-2}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2+1}.$$

Quand on multiplie par $x+1$ cette égalité, et qu'on prend $x \to -1$, on obtient : $a = \frac{-3}{(-1)^2+1} = -\frac{3}{2}$. Ensuite, quand on multiplie par x^2+1 cette égalité, et qu'on prend $x \to i$ (notons que les racines de X^2+1 sont i et $-i$), on a : $bi+c = \frac{i-2}{i+1} = \frac{(i-2)(-i+1)}{|i+1|^2} = \frac{-1+3i}{2}$. Par unicité des parties réelle et imaginaire, on en déduit : $b = \frac{3}{2}$, $c = -\frac{1}{2}$. On obtient donc :

$$\forall x \in \mathbb{C}\setminus\{-1,i,-i\}, \quad \frac{x-2}{(x+1)(x^2+1)} = -\frac{3}{2(x+1)} + \frac{\frac{3x}{2}-\frac{1}{2}}{x^2+1} = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{x+1} + \frac{3x-1}{x^2+1}\right).$$

3.1 Se simplifier la vie dans l'identification, quand i n'est pas racine

L'identification des parties réelle et imaginaire peut être assez fastidieuse quand $\pm i$ n'est pas une racine d'un polynôme du second degré apparaissant dans les éléments simples. En fait, il n'est pas du tout nécessaire de procéder ainsi : si l'on reprend les notations de la section précédente, avec ω une racine d'un polynôme $X^2 + \beta_j X + \gamma_j$ apparaissant dans la décomposition en éléments simples, alors il suffit d'écrire $\frac{P(\omega)}{\prod\limits_{k=1}^{m} (\omega-\alpha_k) \prod\limits_{\substack{\ell=1 \\ \ell\neq j}}^{n} (\omega^2+\beta_\ell \omega+\gamma_\ell)}$ sous la forme $u\omega + v$, puisque en effet, on aurait l'égalité : $b_j\omega + c_j = u\omega + v$, et **on peut identifier dans cette somme**. Cela tient au fait que si $\omega \notin \mathbb{R}$, alors la famille $(1, \omega)$ est $\mathbb{R}$-libre (très facile à vérifier). Pour voir quel est le rapport avec l'indépendance linéaire, remarquez que la relation ci-dessus implique : $(b_j - u)\omega + (c_j - v) \cdot 1 = 0$, et donc par liberté : $b_j - u = 0$, $c_j - v = 0$, ce qui donne bien $b_j = u$ et $c_j = v$.

On peut toujours mettre $\frac{P(\omega)}{\prod\limits_{k=1}^{m} (\omega-\alpha_k) \prod\limits_{\substack{\ell=1 \\ \ell\neq j}}^{n} (\omega^2+\beta_\ell \omega+\gamma_\ell)}$ sous la forme $u\omega + v$, sans avoir d'ailleurs besoin d'écrire ω sous sa forme explicite (tant mieux, sinon on ne verrait pas le gain de mon approche). Les relations suivantes, qui découlent toutes du fait d'être racine de $X^2 + \beta_j X + \gamma_j$, suffisent amplement :

$$\omega^2 = -\beta_j\omega - \gamma_j, \quad 2\mathrm{Re}(\omega) = \omega + \bar{\omega} = -\beta_j, \quad |\omega|^2 = \omega\bar{\omega} = \gamma_j.$$

Les deux dernières relations proviennent des relations coefficients-racines, du fait que si ω est racine de $X^2+\beta_j X+\gamma_j \in \mathbb{R}[X]$, alors $\bar{\omega}$ est l'autre racine de ce polynôme : $X^2+\beta_j X+\gamma_j = (X-\omega)(X-\bar{\omega})$.

Exemple 6. Décomposons en éléments simples la fraction rationnelle $x \mapsto \dfrac{x}{x^3-1}$. On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$, et $X^2 + X + 1$ n'a pas de racine réelle. Notons j et $\bar{j}$ ses deux racines complexes. La décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \dfrac{x}{x^3-1}$ est donc de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{1, j, \bar{j}\}, \quad \frac{x}{x^3-1} = \frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1},$$

où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ est à expliciter. Quand on multiplie cette égalité par $x - 1$, et qu'on prend $x \to 1$, on obtient : $a = \frac{1}{3}$. Quand on multiplie par $x^2 + x + 1$, et qu'on prend $x \to j$, on obtient :

$$bj + c = \frac{j}{j-1} = \frac{j(\bar{j}-1)}{|j-1|^2} = \frac{j\bar{j} - j}{|j|^2 - 2\mathrm{Re}\,(j) + |1|^2}.$$

Or, d'après les relations coefficients-racines : $|j|^2 = j\bar{j} = 1$ (le produit des racines égale le coefficient constant de $X^2 + X + 1$), et : $2\mathrm{Re}(j) = j + \bar{j} = -1$ (la somme des racines égale l'opposé du coefficient en X de $X^2 + X + 1$), donc :

$$bj + c = \frac{1-j}{2-(-1)} = \frac{1-j}{3}.$$

Comme la famille $(1, j)$ est $\mathbb{R}$-libre du fait que $j \notin \mathbb{R}$, on peut identifier et on en déduit : $c = \frac{1}{3}$, $b = -\frac{1}{3}$. Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{1, j, \bar{j}\}, \quad \frac{x}{x^3-1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{-x+1}{x^2+x+1}\right).$$

4 Cas de racines multiples

Cette situation est plus délicate et vous la rencontrerez rarement. Ce qu'il faut savoir est que, si un facteur irréductible de Q apparaît à un exposant strictement supérieur à 1 : $Q = (X - \alpha)^\delta R$, avec $\delta \geqslant 2$ et R un polynôme, alors dans la décomposition en éléments simples de $x \mapsto \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, **il apparaît autant de fractions avec $x - \alpha$ au dénominateur que la puissance de $X - \alpha$ dans la factorisation**

de Q (c'est-à-dire δ avec la notation ci-dessus). C'est-à-dire, la décomposition en éléments simples de $x \mapsto \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ est de la forme :

$$\forall x \in \bigstar, \quad \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_1}{x-\alpha} + \frac{a_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{a_\delta}{(x-\alpha)^\delta} + \cdots.$$

où les termes cachés dans les derniers points de suspension se décrivent de même, en fonction des autres facteurs irréductibles de Q (nous n'avons fait apparaître que ce qui dépend de $X-\alpha$, dans un souci de clarté). Il en est de même si l'on remplace $X-\alpha$ par un polynôme de degré 2 sans racine réelle, en n'oubliant pas que les numérateurs sont éventuellement de degré 1.

Exemple 7. La décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $x \mapsto \dfrac{1}{x^2(x+1)^2}$:

$$\text{N'EST PAS :} \quad \frac{1}{x^2(x+1)^2} = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{(x+1)^2}, \quad \text{NI :} \quad \frac{1}{x^2(x+1)^2} = \frac{ax+b}{x^2} + \frac{cx+d}{(x+1)^2},$$

mais de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0,-1\}, \quad \frac{1}{x^2(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2}.$$

Attention !

Exemple 8. La décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $x \mapsto \dfrac{1}{x(x^2+x+1)^3}$ est de la forme :

$$\forall x \in \bigstar, \quad \frac{1}{x(x^2+x+1)^3} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+x+1} + \frac{dx+e}{(x^2+x+1)^2} + \frac{fx+g}{(x^2+x+1)^3},$$

où $(a,b,c,d,e,f,g) \in \mathbb{R}^7$.

Je suis assez optimiste sur le fait que vous ne croiserez jamais le cas où $\delta \geqslant 3$. Pour $\delta = 2$, vous aurez donc une décomposition de la forme :

$$\forall x \in \bigstar, \quad \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_1}{x-\alpha} + \frac{a_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots,$$

où les points de suspension ne dépendent pas de $x-\alpha$. La méthode antérieure permet toujours de déterminer a_2, en multipliant par $(x-\alpha)^2$, mais le problème est qu'elle ne permet pas d'obtenir a_1 : multiplier par $x-\alpha$ uniquement donne des limites infinies dans chaque membre de l'égalité, du fait que $(x-\alpha) \times \frac{a_2}{(x-\alpha)^2} = \frac{a_2}{x-\alpha}$ tende vers $\pm\infty$ quand $x \to \alpha$.

Méthode. On détermine d'abord a_2 par la méthode classique. On soustrait alors $\frac{a_2}{(x-\alpha)^2}$ à chaque membre de l'égalité, et on simplifie le membre de gauche en mettant tout au même dénominateur. Il y aura *systématiquement* une factorisation possible du numérateur par $x-\alpha$, ce qui permet de le simplifier avec le $(x-\alpha)^2$ au dénominateur : **ainsi on abaisse l'exposant, et l'on se ramène à la situation connue**.

Exemple 9. Décomposons en éléments simples $x \mapsto \dfrac{1}{x(x+1)^2}$. On a l'existence de $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1{,}0\}, \quad \frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}.$$

Multiplier par x cette égalité, et prendre $x \to 0$, donne : $a = 1$. En faire de même avec $(x+1)^2$, et faire tendre x vers -1, donne : $c = -1$. Il reste à trouver b. Pour cela, on soustrait $\frac{c}{(x+1)^2} = -\frac{1}{(x+1)^2}$ à chaque membre de l'égalité ci-dessus, et on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1{,}0\}, \quad \frac{1}{x} + \frac{b}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1+x}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x(x+1)}.$$

On se retrouve dans une situation classique avec des racines simples. En multipliant par $x+1$ et en faisant tendre x vers -1, on obtient : $b = -1$, et c'est terminé.

Exercice 4. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $x \mapsto \dfrac{1}{x^2(x+1)^2}$.

5 ✓ Se simplifier la vie quand la fraction rationnelle est paire ou impaire

Quand $x \mapsto \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ admet une parité (c'est-à-dire : lorsque $\dfrac{P(-x)}{Q(-x)} = \pm\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ pour tout x), il y a des relations fortes entre les coefficients de la décomposition en éléments simples, ce qui permet de diminuer le nombre d'inconnues. Voici comment procéder pour trouver ces relations : supposons d'abord qu'on est dans le cas *pair*. On reprend la décomposition en éléments simples de $x \mapsto \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ écrite en (†), mais en changeant x en $-x$. On a alors, par parité : ← page 4

$$\forall x \in \bigstar, \quad \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k}{-x-\alpha_k} + \sum_{\ell=1}^{n} \frac{-b_\ell x + c_\ell}{x^2 - \beta_\ell x + \gamma_\ell} = \frac{P(-x)}{Q(-x)} = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Cela fournit alors deux écritures différentes de la décomposition en éléments simples de $x \mapsto \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ (celle ci-dessus, et celle en (†)). Or la clé est qu'elle doit être **unique** : on peut donc identifier les deux décompositions en éléments simples proposées, ce qui fournit des relations entre les coefficients.

Si $x \mapsto \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ est *impaire*, c'est presque pareil, sauf que ci-dessus on obtient $-\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ à la place. Il ne faut pas oublier de multiplier par -1 l'égalité obtenue pour retomber sur une décomposition en éléments simples de $x \mapsto \dfrac{P(x)}{Q(x)}$. Nous donnons un exemple concret plus bas : exemple 12.

Exemple 10. Décomposons en éléments simples la fraction rationnelle $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-1}$. On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. On en déduit qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1,-1\}, \quad \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}. \tag{1}$$

Or $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-1}$ est une fonction paire, car : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1,-1\}$, $(-x)^2 - 1 = x^2 - 1$. Par conséquent, en changeant x en $-x$ dans l'égalité ci-dessus, le membre de gauche reste inchangé, et on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1,-1\}, \quad \frac{1}{(-x)^2-1} = \frac{a}{-x-1} + \frac{b}{-x+1} \iff \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1,-1\}, \quad \frac{1}{x^2-1} = -\frac{a}{x+1} - \frac{b}{x-1}. \tag{2}$$

En identifiant les membres de droite de (1) et (2), ce qui est possible par *unicité* des coefficients d'une décomposition en éléments simples, on obtient : $a = -b$, et : $b = -a$ (ce qui est redondant). On a donc une inconnue en moins à trouver dans la décomposition de $x \mapsto \frac{1}{x^2-1}$:

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1,-1\}, \quad \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{a}{x-1} - \frac{a}{x+1} = a\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right).$$

On trouve ensuite a par la méthode habituelle : multiplier par $x-1$ l'égalité, et prendre $x \to 1$, donne : $a = \frac{1}{2}$. Et c'est fini. C'est bien ce qu'on avait obtenu dans l'exemple 4. ← page 3

Exemple 11. Décomposons en éléments simples la fraction rationnelle $x \mapsto \dfrac{1}{x^4-1}$. On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^4 - 1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$, et X^2+1 est sans racine réelle. On en déduit l'existence de $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1{,}1\}, \quad \frac{1}{x^4-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{cx+d}{x^2+1}. \tag{3}$$

Or l'application $x \mapsto \dfrac{1}{x^4-1}$ est paire. Donc, en changeant x en $-x$ dans cette égalité, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1{,}1\}, \quad \frac{1}{(-x)^4-1} = \frac{a}{-x-1} + \frac{b}{-x+1} + \frac{-cx+d}{(-x)^2+1}$$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1{,}1\}, \quad \frac{1}{x^4-1} = -\frac{a}{x+1} - \frac{b}{x-1} + \frac{-cx+d}{x^2+1}. \tag{4}$$

Ainsi (3) et (4) fournissent *a priori* deux décompositions en éléments simples de la même fraction rationnelle $x \mapsto \dfrac{1}{x^4-1}$. Par *unicité* de cette décomposition, on a : $a=-b$, $b=-a$, $c=-c$ et $d=d$. En particulier : $c=0$. La décomposition fait apparaître moins d'inconnues désormais :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1{,}1\}, \quad \frac{1}{x^4-1} = \frac{a}{x-1} - \frac{a}{x+1} + \frac{d}{x^2+1}.$$

Exercice 5. Achever cet exemple en déterminant a et d.

Exemple 12. (un exemple où la fraction rationnelle n'est pas paire, mais *impaire*) Si, cette fois-ci, nous décomposons en éléments simples la fraction rationnelle $x \mapsto \dfrac{x}{x^4-1}$, on a l'existence de $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1{,}1\}, \quad \frac{x}{x^4-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{cx+d}{x^2+1}. \tag{5}$$

Or l'application $x \mapsto \dfrac{x}{x^4-1}$ est IMPAIRE. Donc, en changeant x en $-x$ dans cette égalité, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1{,}1\}, \quad \frac{-x}{(-x)^4-1} = \frac{a}{-x-1} + \frac{b}{-x+1} + \frac{-cx+d}{(-x)^2+1} \\
\Longleftrightarrow\ &\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1{,}1\}, \quad -\frac{x}{x^4-1} = -\frac{a}{x+1} - \frac{b}{x-1} + \frac{-cx+d}{x^2+1} \\
\overset{(\times -1)}{\Longleftrightarrow}\ &\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1{,}1\}, \quad \frac{x}{x^4-1} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} + \frac{cx-d}{x^2+1}. \qquad (6)
\end{aligned}$$

Ainsi (5) et (6) fournissent *a priori* deux décompositions en éléments simples de la même fraction rationnelle $x \mapsto \dfrac{x}{x^4-1}$. Par *unicité* de cette décomposition, on a : $a=b$, $b=a$, $c=c$ et $d=-d$. En particulier : $d=0$. La décomposition fait apparaître moins d'inconnues désormais :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1{,}1\}, \quad \frac{x}{x^4-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{a}{x+1} + \frac{cx}{x^2+1}.$$

Exercice 6. Achever cet exemple en déterminant a et c.

Exemple 13. Décomposons en éléments simples la fraction rationnelle $x \mapsto \dfrac{1}{x^4+1}$. Ce n'est pas de tout repos : avant tout, comment écrire X^4+1 comme produit de facteurs de degré 2 sans racine réelle ? (On peut se convaincre aisément que X^4+1 n'a pas de racine réelle, en disant que $x^4+1 \geqslant 1 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.) Deux façons de procéder :

— en trouvant les racines *complexes*, qui sont solutions de $x^4=-1$ d'inconnue $x \in \mathbb{C}$; vous avez vu comment résoudre de telles équations l'an dernier, en mettant chaque membre de l'égalité sous forme exponentielle, et en identifiant modules et arguments (modulo 2π), et vous trouvez ici que les racines sont : $e^{\pm\frac{i\pi}{4}}$, $e^{\pm\frac{3i\pi}{4}}$; on en déduit :

$$X^4+1 = \left(X - e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\left(X - e^{-\frac{i\pi}{4}}\right)\left(X - e^{\frac{3i\pi}{4}}\right)\left(X - e^{-\frac{3i\pi}{4}}\right),$$

or : $\left(X - e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\left(X - e^{-\frac{i\pi}{4}}\right) = X^2 - \left(e^{\frac{i\pi}{4}} + e^{-\frac{i\pi}{4}}\right)X + e^{\frac{i\pi}{4}}e^{-\frac{i\pi}{4}} = X^2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)X + 1 = X^2 - \sqrt{2}X + 1$; on procède de même avec $\left(X - e^{\frac{3i\pi}{4}}\right)\left(X - e^{-\frac{3i\pi}{4}}\right)$, et on en déduit :

$$X^4+1 = \left(X^2 - \sqrt{2}X + 1\right)\left(X^2 + \sqrt{2}X + 1\right) ;$$

— plus rapide mais astucieux : on fait apparaître « de force » une identité remarquable, en ajoutant et soustrayant $2X^2$, de sorte que :

$$X^4+1 = X^4+2X^2+1-2X^2 = \left(X^2+1\right)^2 - \left(\sqrt{2}X\right)^2 = \left(X^2+1-\sqrt{2}X\right)\left(X^2+1+\sqrt{2}X\right).$$

Cela nous donne la forme de la décomposition en éléments simples : il existe $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{x^4+1} = \frac{ax+b}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{cx+d}{x^2+\sqrt{2}x+1}. \tag{7}$$

Si l'on change x en $-x$ dans cette égalité, la parité du membre de gauche nous permet d'obtenir :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{x^4+1} = \frac{-ax+b}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{-cx+d}{x^2-\sqrt{2}x+1}. \tag{8}$$

En identifiant les membres de droite de (7) et (8), on obtient alors : $-a=c$, $b=d$, $-c=a$ et $b=d$. La décomposition en éléments simples ne nécessite plus que de déterminer deux inconnues :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{x^4+1} = \frac{ax+b}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{-ax+b}{x^2+\sqrt{2}x+1}$$

Exercice 7. Achever cet exemple en montrant que $a = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$ et $b = \frac{1}{2}$.

6 Cas où le numérateur est de degré plus élevé que le dénominateur

6.1 Cas général

Si vous regardez les décompositions en éléments simples des sections précédentes (en particulier l'identité en début de section 1, page 1), il est facile de se convaincre qu'une telle égalité est impossible ← page 1 si $\deg(P) \geqslant \deg(Q)$. En effet, le membre de droite ne fait intervenir que des quotients où le numérateur est de degré *strictement inférieur* à celui du dénominateur. Par quel miracle, en les sommant, pourrait-on avoir un numérateur P subitement de degré plus grand que le dénominateur Q ? On sait en effet que le degré ne peut que diminuer (au pire) quand on somme, et non augmenter. Par conséquent, tout ce qui précède NE s'applique *a priori* PAS aux fractions rationnelles $x \mapsto \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ où $\deg(P) \geqslant \deg(Q)$.

Il est cependant assez facile de se ramener au cas des sections précédentes par une division euclidienne. On fait la division euclidienne de P par Q, ce qui permet d'écrire P sous la forme $P = QT + R$ avec $\deg(R) < \deg(Q)$. On a alors :

$$\forall x \in \bigstar, \quad \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Q(x)T(x)+R(x)}{Q(x)} = T(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

Il y a un terme polynomial (explicite) $T(x)$ en plus, par rapport à l'habitude. Comme $\deg(R) < \deg(Q)$, la fraction rationnelle $x \mapsto \dfrac{R(x)}{Q(x)}$ se décompose en éléments simples en suivant les méthodes des sections précédentes : mission accomplie.

6.2 Cas particulier où $\deg(P) = \deg(Q)$

Notons que dans la division euclidienne ci-dessus, on a $\deg(T) = \deg(P) - \deg(Q)$ (pourquoi ?). Donc, si $\deg(P) = \deg(Q)$, on a plus précisément $\deg(T) = 0$, c'est-à-dire : T est une constante a. Ainsi la décomposition en éléments simples de $x \mapsto \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ressemble à :

$$\forall x \in \bigstar, \quad \frac{P(x)}{Q(x)} = a + \frac{R(x)}{Q(x)} = a + \sum \cdots,$$

où les éléments de la somme sont comme d'habitude les éléments simples, qu'on obtient par les méthodes précédentes. Il est en fait possible de trouver a directement, sans passer par une division euclidienne, mais par un calcul de limite. En effet, tous les éléments simples de la somme sont de la forme $\frac{a_k}{x-\alpha_k}$ ou $\frac{b_\ell x + c_\ell}{x^2+\beta_\ell x+\gamma_\ell}$ (du moins si Q n'a pas de racine multiple, mais cela ne change rien à mon propos). En tous les cas, le numérateur étant de degré strictement inférieur à celui du dénominateur, ces fractions rationnelles tendent vers 0 quand $x \to \pm\infty$. Par conséquent, quand $x \to \pm\infty$, on obtient ci-dessus : $a = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$, sachant que cette limite est triviale à calculer : un bête passage par les équivalents asymptotiques montrent qu'elle est égale à $\frac{\text{coeff. dominant de } P}{\text{coeff. dominant de } Q}$ si $\deg(P) = \deg(Q)$, ce qui donne la valeur de a à l'œil nu.

Exemple 14. Décomposons en éléments simples $x \mapsto \dfrac{2x^2+1}{x^2+3x+2}$. On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2+3x+2 = (x+2)(x+1)$, ce qui permet de décréter l'existence de $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,-2\}, \quad \frac{2x^2+1}{x^2+3x+2} = \frac{2x^2+1}{(x+2)(x+1)} = a + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{x+1}.$$

Quand $x \to +\infty$, cette relation donne : $2 = a$.

Exercice 8. Achever cet exemple en déterminant b et c.

Exercice 9. Trouver une méthode analogue, dans le cas où $\deg(P) = \deg(Q)+1$, pour déterminer les coefficients a et b de l'écriture : $\forall x \in \bigstar$, $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = ax + b + \sum \cdots$.

En fait, le cas $\deg(P) = \deg(Q)$ sera souvent rencontré avec des fractions rationnelles de la forme $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ (on parle d'*homographies* dans ce cas). Il est dans ce cas plutôt facile de décomposer en éléments simples « à la main », en ajoutant et soustrayant une quantité convenable au numérateur pour y reconnaître le dénominateur. Par exemple :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad \frac{2x+3}{x-1} = \frac{2x-2+2+3}{x-1} = \frac{2x-2}{x-1} + \frac{5}{x-1} = 2 + \frac{5}{x-1}.$$

Pour plus de détails, voir *L'art de la majoration*, section 2.2.

7 ✓ Utilisation de la décomposition en éléments simples

L'intérêt de la décomposition en éléments simples est de ramener un quotient de polynômes « compliqués » (comprendre : éventuellement de degré élevé) à une somme de quotients dont les polynômes sont de degré 1 ou 2 au pire. Donc moralement, si l'on sait résoudre un problème avec des quotients polynomiaux de dénominateur « petit », alors on sait aussi résoudre ce même problème avec des dénominateurs « gros ».

Or les polynômes sont omniprésents en mathématiques, donc les fractions rationnelles aussi, et les applications de la décomposition en éléments simples ne manquent pas. Nous donnons dans les sections suivantes les trois principales applications rencontrées.

7.1 ✓ Pour le calcul d'intégrales de fractions rationnelles

On veut calculer $\displaystyle\int_I \frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x$, où P et Q sont des polynômes, et I un intervalle où Q ne s'annule pas. Grâce à une décomposition en éléments simples de $\dfrac{P}{Q}$, on se ramène à des intégrales d'éléments simples de la forme $x \mapsto \dfrac{1}{(x-\alpha_k)^\delta}$ ou $x \mapsto \dfrac{bx+c}{x^2+\beta x+\gamma}$ (je mets de côté le cas des éléments simples de la forme $x \mapsto \dfrac{bx+c}{(x^2+\beta x+\gamma)^\epsilon}$ avec $\epsilon > 1$: on ne les croise que dans les situations théoriques). Or on sait intégrer toutes ces quantités :

— l'application $x \mapsto \dfrac{1}{x-\alpha_k}$ est de la forme $\dfrac{u'}{u}$, donc admet pour primitive $\ln(|u|) : x \mapsto \ln(|x-\alpha_k|)$ (SAUF SI $\alpha_k \notin \mathbb{R}$) ;

— si $\delta \geqslant 2$, l'application $x \mapsto \dfrac{1}{(x-\alpha_k)^\delta}$ est de la forme $\dfrac{u'}{u^\delta}$, donc admet pour primitive $\dfrac{1}{1-\delta}\dfrac{1}{u^{\delta-1}}$: $x \mapsto \dfrac{1}{1-\delta}\dfrac{1}{(x-\alpha_k)^{\delta-1}}$;

— pour intégrer l'application $x \mapsto \dfrac{bx+c}{x^2+\beta x+\gamma}$, on modifie l'expression pour faire apparaître l'application $x \mapsto \dfrac{2x+\beta}{x^2+\beta x+\gamma}$ (qui est de la forme $\dfrac{u'}{u}$: une primitive est donc $x \mapsto \ln\left(\left|x^2+\beta x+\gamma\right|\right)$) ; si c'est bien fait, il restera alors à intégrer une autre quantité de la forme $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+\beta x+\gamma}$, qu'on écrit en mettant sous forme canonique le dénominateur :

$$\frac{1}{x^2+\beta x+\gamma} = \frac{1}{\left(x+\frac{\beta}{2}\right)^2+\left(\gamma-\frac{\beta^2}{4}\right)} = etc.,$$

l'idée étant de faire apparaître une quantité de la forme $\dfrac{u'}{u^2+1}$, dont une primitive est $\arctan(u)$.

On est alors en mesure de donner une primitive de $\dfrac{P}{Q}$, et de calculer $\displaystyle\int_I \frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x$.

Si l'on doit intégrer $x \mapsto \dfrac{1}{x-\alpha_k}$ avec $\alpha_k \notin \mathbb{R}$, alors il suffit de multiplier et diviser par $x-\bar{\alpha_k}$ pour se ramener à des fractions rationnelles dont le dénominateur est réel, de sorte qu'on sache les intégrer comme indiqué ci-dessus. Par exemple :

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x-i} = \int_a^b \frac{x+i}{|x-i|^2}\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x + i\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \left[\frac{\ln(x^2+1)}{2}\right]_a^b + i\left[\arctan(x)\right]_a^b.$$

Exemple 15. On cherche à déterminer une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-1}$ sur $]-1,1[$: cela revient à calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1}$ (pour $x \in]-1,1[$). Or on a décomposé en éléments simples $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-1}$ dans les exemples 4 et 10. Cela nous permet d'écrire : ♡

← page 7

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1} = \frac{1}{2}\int_0^x \left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\ln(|t-1|)-\ln(|t+1|)\right]_0^x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right).$$

Exemple 16. On cherche à calculer : $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{x}{x^3-1}\mathrm{d}x$. D'après la décomposition en éléments simples de l'exemple 6, on a :

← page 5

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^0 \frac{x}{x^3-1}\mathrm{d}x &= \frac{1}{3}\left(\int_{-1}^0 \frac{\mathrm{d}x}{x-1} + \int_{-1}^0 \frac{-x+1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\left[\ln(|x-1|)\right]_{-1}^0 - \frac{1}{2}\int_{-1}^0 \frac{2x-2}{x^2+x+1}\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(-\ln(2) - \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^0 \frac{2x+1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x - \int_{-1}^0 \frac{3\mathrm{d}x}{x^2+x+1}\right)\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(-\ln(2) - \frac{1}{2}\left(\left[\ln(|x^2+x+1|)\right]_{-1}^0 - 3\int_{-1}^0 \frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right)\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(-\ln(2) + 2\int_{-1}^0 \frac{\mathrm{d}x}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2+1}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(-\ln(2) + 2\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)\right]_{-1}^0\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{3}\left(-\ln(2) + \sqrt{3}\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)\right)\\
&= \frac{1}{3}\left(-\ln(2) + 2\sqrt{3}\frac{\pi}{6}\right)\\
&= -\frac{\ln(2)}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.
\end{aligned}
$$

Exemple 17. On cherche à calculer : $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$. D'après la décomposition en éléments simples de l'exemple 13 (et l'exercice qui suit), on a :

$$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^4+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\int_{-1}^{1}\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1}\frac{-x+\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\mathrm{d}x\right).$$

Calculons la première intégrale en suivant la méthode décrite ci-dessus. On fait apparaître $\dfrac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}$ (qui est de la forme $\dfrac{u'}{u}$) ainsi :

$$\forall x \in [-1,1], \qquad \frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} = \frac{1}{2}\frac{2x+2\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right).$$

On en déduit :

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\left(\left[\ln\left(\left|x^2+\sqrt{2}x+1\right|\right)\right]_{-1}^{1} + \sqrt{2}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\right)\\
&= \frac{\ln(2+\sqrt{2}) - \ln(2-\sqrt{2})}{2} + \sqrt{2}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\left(\sqrt{2}x+1\right)^2+1}\\
&= \frac{\ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)}{2} + \sqrt{2}\left[\frac{\arctan\left(\sqrt{2}x+1\right)}{\sqrt{2}}\right]_{-1}^{1}\\
&= \frac{\ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)}{2} + \arctan\left(1+\sqrt{2}\right) - \arctan\left(1-\sqrt{2}\right).
\end{aligned}
$$

D'où le résultat. On calcule de même $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{-x+\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\mathrm{d}x$, et on en déduit $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$.

Exercice 10.

1. À l'aide d'un changement de variable, montrer : $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{-x+\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\mathrm{d}x$.
2. Simplifier l'expression obtenue dans l'exemple, pour obtenir :

$$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^4+1} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\right).$$

Vous aurez besoin de remarquer qu'on a : $\frac{1}{1-\sqrt{2}} = -(1+\sqrt{2})$, *et de formules vérifiées par l'arc tangente.*

7.2 ✓ Pour le calcul de sommes dont le terme général est une fraction rationnelle

Voir *Méthodes* du chapitre sur les séries numériques, section **??** (*Sommes dont le terme général est une fraction rationnelle*).

7.3 ✓ Pour le calcul de sommes de séries entières

Voir *Méthodes* du chapitre sur les séries entières, section 2.2.3 (*Somme de la forme* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} x^n$, *où* P *et* Q *sont polynomiales*).

Table des matières