MÉTHODES – Algèbre linéaire
✓ Décompositions en somme directe

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. On discute ici de la façon de démontrer que $E = F \oplus G$, en particulier dans les situations abstraites (section 2). La plupart des conseils s'adaptent au cas d'une somme directe de trois sous-espaces vectoriels ou plus.

1 ✓ Lorsqu'on connaît (ou peut connaître) la dimension des sous-espaces

C'est le cas favorable : si on connaît déjà la dimension des sous-espaces F et G, alors le cours vous enseigne que $E = F \oplus G$ si et seulement si, au choix :

— la concaténation d'une famille de F et d'une famille de G donne une base de E ;

— on a : $F \cap G = \{\vec{0}\}$, et : $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

La première méthode est à privilégier quand $E = \mathbb{R}^n$ avec n un entier de taille raisonnable ($n = 2$, 3...). Dans ce cas, il est souvent facile de trouver des bases de F et G, et un simple calcul de déterminant permet d'évacuer rapidement la question pour la concaténation de ces deux bases.

Exemple 1. Les sous-espaces vectoriels $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1,2,3)\right)$ et $G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1,1,1),(1,-1,1)\right)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$, puisque la concaténation de leurs bases a pour déterminant dans la base canonique :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$$

Ce calcul de déterminant montre que $((1,2,3),(1,1,1),(1,-1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, donc : $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

Lorsqu'on n'est pas dans ce cas de figure, il est fort probable que vous ne connaissiez pas de base (par exemple parce que les sous-espaces sont abstraits et que leurs dimensions ont été calculées par des moyens détournées), ou que les bases de F et G soient trop compliquées pour que vous puissiez étudier leur concaténation. Il vous reste alors à utiliser la seconde approche. Pour montrer que $F \cap G = \{\vec{0}\}$, introduisez un vecteur dans l'intersection, et pensez à traduire le fait d'appartenir à F, puis à G. Confrontez les deux relations que vous avez traduites, pour voir en quoi elles impliquent la nullité du vecteur.

Un cas particulier fréquent est la somme directe : $E = \ker(f) \oplus \mathrm{im}(f)$ (vraie seulement en ajoutant des hypothèses sur l'endomorphisme f). Il faut bien remarquer que dans ce cas, on sait immédiatement que $\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{im}(f)) = \dim(E)$: c'est le théorème du rang ! Dans ce cas, la deuxième méthode s'invite naturellement, et il ne reste qu'à vérifier que si $\vec{y} \in \ker(f) \cap \mathrm{im}(f)$, alors $\vec{y} = \vec{0}$. Dans ce cas $\ker(f) \cap \mathrm{im}(f) = \{\vec{0}\}$ et on a montré tout ce qu'il faut.

Pour montrer que $\vec{y} = \vec{0}$, commencez par traduire l'appartenance à l'image de f, en introduisant un antécédent de $\vec{y}$ par f, que vous appelez $\vec{x}$. On sait alors que $\vec{y} = f(\vec{x})$ et $f(\vec{y}) = \vec{0}$ (car $\vec{y} \in \ker(f)$), donc : $f^2(\vec{x}) = f(f(\vec{x})) = f(\vec{y}) = \vec{0}$. Il reste à utiliser les hypothèses sur f pour voir en quoi cela implique $\vec{y} = \vec{0}$.

Exemple 2. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie, vérifiant : $f^3 = f$. Montrons : $E = \ker(f) \oplus \mathrm{im}(f)$. Comme remarqué ci-dessus, grâce au théorème du rang on a déjà : $\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{im}(f)) = \dim(E)$, donc il suffit de montrer : $\ker(f) \cap \mathrm{im}(f) = \{\vec{0}\}$, pour que $\ker(f)$ et $\mathrm{im}(f)$ soient supplémentaires. Soit $\vec{y} \in \ker(f) \cap \mathrm{im}(f)$. Comme $\vec{y} \in \mathrm{im}(f)$, il existe $\vec{x} \in E$ tel que : $\vec{y} = f(\vec{x})$. De plus $f(\vec{y}) = \vec{0}$ car $\vec{y} \in \ker(f)$. Par conséquent, en évaluant l'égalité : $f^3 = f$, en $\vec{x}$, on a : $f^3(\vec{x}) = f(\vec{x})$, ou encore : $f^2(\vec{y}) = \vec{y}$. Mais le membre de gauche est nul, puisque : $f^2(\vec{y}) = f(f(\vec{y})) = f(\vec{0}) = \vec{0}$. Ainsi $\vec{y} = \vec{0}$, ce qu'il fallait démontrer. On a bien $\ker(f) \cap \mathrm{im}(f) = \{\vec{0}\}$ et $\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{im}(f)) = \dim(E)$, donc : $E = \ker(f) \oplus \mathrm{im}(f)$.

2 ✓ Lorsqu'on ne connaît pas la dimension, ou qu'on est en dimension infinie

Si le recours à la dimension est impossible ou difficile, il faut revenir à la définition de sous-espaces supplémentaires, c'est-à-dire : pour montrer que $E = F \oplus G$, il suffit de montrer que tout vecteur $\vec{x} \in E$ s'écrit de manière *unique* sous la forme $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ avec $\vec{y} \in F$ et $\vec{z} \in G$. Pour cela, on procède par *analyse* et *synthèse* :

— **l'analyse** pour trouver quels sont les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui *peuvent éventuellement* convenir : SI $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ avec $\vec{y} \in F$ et $\vec{z} \in G$, ALORS on a nécessairement $\vec{y} = \bigstar$ et $z = \spadesuit$ (ce qui prouve en même temps l'unicité de $\vec{y}$ et $\vec{z}$: il n'y a pas d'autre choix possible) ;

— **la synthèse** pour vérifier qu'effectivement, ces choix de $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent (ce qui prouve l'existence).

La synthèse ne nécessite pas de conseil particulier : on vérifie que $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$, ce qui est trivial, puis que $\vec{y} \in F$ et $\vec{z} \in G$. Cette vérification dépend du contexte.

L'analyse est la partie la plus délicate, parce que vous avez deux inconnues à déterminer ($\vec{y}$ et $\vec{z}$) pour une seule équation ($\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$). Heureusement, dès que vous avez déterminé l'une des deux inconnues, disons $\vec{y}$, alors vous avez automatiquement déterminé l'autre aussi, en écrivant simplement : $\vec{z} = \vec{x} - \vec{y}$. La difficulté se résume donc à savoir trouver soit $\vec{y}$, soit $\vec{z}$.

Pour ce faire, commencez d'abord par expliciter $\vec{y}$ et $\vec{z}$ autant que possible, grâce à leur appartenance à F et G (si les éléments de F et G sont suffisamment explicites, ce qui n'est pas toujours le cas). Ensuite, le principe est le même que dans le document *Indépendance linéaire* : **il faut produire autant d'équations que d'inconnues**. Puisqu'on a deux inconnues pour une seule équation, il faut donc produire **une** nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$ (et indépendante de la première, sinon on n'est guère avancé). Une opération convenable sur les lignes permet alors d'éliminer $\vec{y}$ ou $\vec{z}$, et d'expliciter une des deux inconnues.

Pour produire de nouvelles équations, regardez les identités vérifiées par $\vec{y}$ et $\vec{z}$ (toujours du fait d'appartenir à F et G), et faites subir une opération à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ afin de faire apparaître ces identités.

Par exemple, si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ sont des fonctions dépendant d'une variable x, et qui vérifient une propriété particulière quand on change x en $-x$, ou en x^2, etc., alors changez x en $-x$ (ou en x^2, etc.) dans l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$; si leurs propriétés particulières font intervenir leurs dérivées, alors dérivez l'égalité, etc. Si ce sont des matrices vérifiant des propriétés particulières vis-à-vis de la transposée, alors transposez l'égalité ; de même si l'on remplace la transposition par une autre opération linéaire. On s'adapte au contexte.

Exemple 3. Soient E l'espace vectoriel des suites à valeurs réelles convergentes, $F \subseteq E$ le sous-espace des suites ayant une limite nulle, et enfin $G \subseteq E$ le sous-espace des suites constantes. Montrons : $E = F \oplus G$, par une analyse et synthèse (E est de dimension infinie, comme on le montre dans l'exercice 2, donc on ne peut pas procéder autrement).

Faisons l'analyse : soit $u = (u_n)_{n \geqslant 0} \in E$, et soient $v = (v_n)_{n \geqslant 0} \in F$, $w = (w_n)_{n \geqslant 0} \in G$ telles que : $u = v + w$. Comme w est une suite constante, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = a$. Il est alors plus parlant d'écrire la chose ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + a$. Déterminer v et w revient à déterminer v_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et a. Conformément au conseil ci-dessus, je vais exploiter le fait que v appartienne à F (c'est-à-dire : vérifie $v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$) en prenant la limite quand $n \to +\infty$ dans l'égalité précédente. Comme toutes les suites sont convergentes par définition de E, c'est possible, et on obtient alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n + \lim\limits_{n \to +\infty} a = 0 + a = a$. Ainsi, si l'on note ℓ la limite de u, cette égalité nous donne : $a = \ell$. On a déjà explicité $w = (a)_{n \geqslant 0} = (\ell)_{n \geqslant 0}$. On en déduit v en écrivant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - w_n = u_n - \ell$. L'analyse est terminée.

Exercice 1. Effectuer la synthèse pour achever cet exemple.

Exercice 2. Démontrer qu'effectivement, l'espace vectoriel F de cet exemple est de dimension infinie (et donc E aussi, vu que $F \subseteq E$), en vérifiant que pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, la famille :

$$\left(\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\geqslant 0}, \left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)_{n\geqslant 0}, \dots, \left(\frac{1}{(n+1)^k}\right)_{n\geqslant 0}\right)$$

est libre.

Exercice 3. Revoir dans votre cours de 1re année comment vous aviez démontré :
- que toute fonction réelle s'écrit comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire ;
- que toute matrice s'écrit comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique ;

et comparez avec les conseils donnés dans cette section.

Il n'est pas à exclure que vos opérations effectuées pour accroître le nombre d'équations fasse apparaître, en chemin, de nouvelles inconnues (dans l'exemple suivant, il apparaît la « nouvelle inconnue » y_2', en plus de y_1 et y_2). Dans ce cas, pas le choix : deux équations ne suffisent pas. Il faut poursuivre jusqu'à en avoir autant que d'inconnues (par contre, si le nombre d'inconnues ne « stagne » jamais, c'est que vous vous y prenez mal). C'est la vie.

Exemple 4. On note E l'espace vectoriel des applications y de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et vérifiant : $y^{(3)} = y$. Soient, aussi, F et G les sous-espaces vectoriels de E (vous vérifiez les inclusions dans E, je les admets) des applications vérifiant respectivement :

$$y' = y \text{ (pour } F), \qquad \text{et : } \quad y'' = -y' - y \text{ (pour } G).$$

On va démontrer : $E = F \oplus G$, par une analyse et synthèse. Soit $y \in E$, et soit $(y_1, y_2) \in F \times G$ tel que : $y = y_1 + y_2$. Suivant les conseils ci-dessus, j'augmente le nombre d'équations en dérivant cette égalité, de sorte à pouvoir utiliser le fait que $y_1' = y_1$ (vu que $y_1 \in F$). On obtient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} y &=& y_1 + y_2 \\ y' &=& y_1' + y_2' \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} y &=& y_1 + y_2 \\ y' &=& y_1 + y_2' \end{array}\right.$$

Problème : il apparaît une troisième inconnue y_2', donc deux équations ne suffisent pas. C'est la vie, mais ce n'est pas grave : on dérive à nouveau, ce qui permettra par ailleurs d'utiliser le fait que $y_2'' = -y_2' - y_2$ (vu que $y_2 \in G$). On obtient alors :

$$\left\{\begin{array}{rcl} y &=& y_1 + y_2 \\ y' &=& y_1 + y_2' \\ y'' &=& y_1' + y_2'' \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} y &=& y_1 + y_2 \\ y' &=& y_1 + y_2' \\ y'' &=& y_1 - y_2 - y_2' \end{array}\right.$$

Cette fois-ci nous avons bien trois équations pour trois inconnues (y_1, y_2 et y_2') : on devrait pouvoir résoudre. Notez que déterminer y_2' ne nous intéresse pas : dès que l'on a réussi à trouver y_1 et y_2, on peut s'arrêter. Je résous ce système avec la méthode du pivot de Gauß :

$$\left\{\begin{array}{rcllll} y &=& y_1 & +y_2 & \\ y' &=& y_1 & & +y_2' \\ y'' &=& y_1 & -y_2 & -y_2' \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcllll} y &=& y_1 & +y_2 & \\ y' + y'' &=& 2y_1 & -y_2 & \\ y'' &=& y_1 & -y_2 & -y_2' \end{array}\right. \quad (L_2 \leftarrow L_2 + L_3)$$

J'ai choisi d'éliminer y_2' dans la seconde équation, à l'aide de la troisième, de sorte que les deux premières équations ne fassent plus intervenir que y_1 et y_2, à savoir les deux inconnues qui m'intéressent réellement. L'opération $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$ permet alors d'obtenir $y_1 = \dfrac{y + y' + y''}{3}$, tandis que l'opération $L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2$ (ou plus simplement, écrire que $y_2 = y - y_1$) donne : $y_2 = \dfrac{2y - y' - y''}{3}$. L'analyse est terminée : on a trouvé les y_1 et y_2 convenant potentiellement.

Exercice 4. Effectuer la synthèse pour achever cet exemple.

Table des matières