MÉTHODES – Algèbre linéaire
Utilisation de la notion de dimension

La notion de dimension étant la plus importante de l'algèbre linéaire (et l'une des plus importantes des mathématiques en général), il serait vain d'en donner toutes les applications ici. J'ai choisi de me concentrer sur un aspect dont l'élève de PSI moyen n'a que rarement conscience, à savoir :

Comment la connaissance de la dimension d'un sous-espace vectoriel (qu'on cherche à déterminer) permet de l'expliciter ?

Nous sommes en général confrontés à des sous-espaces vectoriels « inconnus », et qu'on cherche à expliciter, lorsque nous cherchons les solutions d'une équation ; que ce soit :

- les solutions d'un système linéaire (ce qui se traduit par l'appartenance à un noyau, en vertu de l'équivalence : $AX = 0_{\mathrm{M}_{n,1}(K)} \iff X \in \ker(A)$; or un noyau est bien un sous-espace vectoriel),
- les solutions d'une équation différentielle linéaire, ou d'une relation de récurrence linéaire ;
- l'ensemble des vecteurs orthogonaux à un ensemble donné (cela revient à déterminer l'orthogonal d'un ensemble, qui est un sous-espace vectoriel) ;
- etc.

Un autre cas de figure où l'on peut avoir besoin d'expliciter un sous-espace vectoriel inconnu, est lorsqu'on se demande si un objet mathématique de la forme « ★ » peut s'écrire sous la forme alternative « ♠ ». Cela revient en pratique à déterminer **l'image** d'une certaine application. Par exemple, si l'on se demande : « à quelle condition peut-on écrire un réel y sous la forme d'un carré ? », cela revient à se demander à quelle condition on peut écrire $y \in \mathbb{R}$ sous la forme $y = x^2$ avec $x \in \mathbb{R}$, et donc à quelle condition y appartient à l'image de l'application $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{cases}$ (attention au fait que là, f n'est pas linéaire, donc son image n'est *a priori* pas un espace vectoriel ; je voulais seulement illustrer mon propos sur un exemple familier).

Ainsi le problème formulé ci-dessus peut se poser dans des contextes variés, même s'il n'y paraît pas au premier abord. Pour le résoudre, on a principalement besoin de deux résultats vus en 1re année :

1. Une famille de vecteurs de E, libre et de cardinal $\dim(E)$, est une base de E.
2. Si $F \subseteq E$ et $\dim(F) = \dim(E)$, alors : $F = E$.

L'usage de ces deux propositions est OMNIPRÉSENT. Nous illustrons l'utilisation de ces deux résultats dans les deux sections suivantes.

Mais avant cela, on peut se demander : comment est-il possible de connaître la dimension d'un espace s'il nous est inconnu ? Ne faut-il pas justement l'expliciter *d'abord* pour connaître sa dimension *ensuite* (grâce à une base) ?

En fait, la théorie de la dimension permet de formuler rigoureusement des « contraintes spatiales », qui « forcent » la dimension d'un sous-espace vectoriel (même inconnu) à être égale à un certain entier, si du moins l'on connaît explicitement un *autre* sous-espace vectoriel avec lequel il « partage le même espace ambiant » (par exemple : dans un espace vectoriel E de dimension 3, on ne peut pas « couvrir plus que trois directions » ; par conséquent, si un sous-espace F de E est « transversal à une droite », qui « compte déjà pour une direction », alors il ne peut pas « couvrir plus que deux autres directions », donc $\dim(F) \leqslant 2$; ce vocabulaire informel est justifié par les notions de somme directe et de supplémentaire d'un sous-espace vectoriel). Ainsi on peut connaître la dimension d'un espace inconnu par des moyens détournés. Les principales formules de votre cours qui le permettent sont dans la figure 1.

Par exemple, dans le cas où l'espace à déterminer est un orthogonal $F^{\perp}$, connaître F permet de connaître $\dim(F)$, et donc $\dim\left(F^{\perp}\right)$ grâce à la relation ci-dessus. De même pour les autres égalités.

Figure 1 – Calcul de la dimension d'un sous-espace « inconnu » à déterminer

Espaces supplémentaires $F \oplus G = E$:	$\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$	
Noyau et image :	$\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{im}(f)) = \dim(E)$	(théorème du rang)
Supplémentaire orthogonal :	$\dim\left(F^{\perp}\right) = \dim(E) - \dim(F)$	(espaces euclidiens)
Sous-espace propre E_λ :	$\dim(E_\lambda) \leqslant$ multiplicité de λ	(réduction)
(cas d'une valeur propre simple)	$\dim(E_\lambda) = 1$	(réduction)
(cas diagonalisable)	$\dim(E_\lambda) =$ multiplicité de λ	(réduction)
(cas diagonalisable)	$\sum_\lambda \dim(E_\lambda) = \dim(E)$	(réduction)

1 ✓ Pour rapidement expliciter des bases

Ayez bien conscience qu'expliciter une base d'un sous-espace vectoriel F, c'est expliciter F. En effet, si l'on *sait* que F admet pour base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$, où les $\vec{e}_i$ sont CONNUS, alors on sait aussi que tout vecteur $\vec{x}$ de F s'écrit sous la forme : $\vec{x} = \lambda_1\vec{e}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{e}_n$, où les λ_i sont des scalaires : c'est par définition d'une famille génératrice (ce qu'est une base en particulier). Comme les $\vec{e}_i$ sont connus, il en est de même de tout $\vec{x} \in F$ grâce à cette égalité.

Par conséquent, dès qu'on a trouvé une base d'un sous-espace vectoriel, on a positivement répondu à la question de l'explicitation posée en début de section . Cette question peut donc se reformuler en :

Comment la connaissance de la dimension d'un sous-espace vectoriel (qu'on cherche à déterminer) peut-elle aider à en expliciter une base ?

Pour cela : disons que le sous-espace F qu'on veut déterminer est de dimension n. Il arrive « qu'à l'œil nu », ou en tâtonnant un peu (mais sans rien résoudre !), on trouve rapidement n vecteurs $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ linéairement indépendants qui appartiennent à F. C'est le cas si F est l'espace des solutions d'une équation ou d'un système d'équations, où l'on trouve rapidement des solutions avec de nombreuses coordonnées nulles. Les vecteurs trouvés sont indépendants si l'on évite des choix idiots. Alors, ayant trouvé une famille libre $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ de cardinal $n = \dim(F)$, on en déduit que c'est une base de F : c'est terminé !

Cas particulier de la dimension 1. Pour engendrer un espace vectoriel F de dimension 1, il suffit de prendre *n'importe quel vecteur non nul dans* F (ce qui est très visuel si l'on se souvient qu'un espace vectoriel de dimension 1 est une *droite*). En effet, une famille constituée d'un seul vecteur $(\vec{e})$ est libre dès qu'il est non nul : si $\lambda \in K$ vérifie $\lambda\vec{e} = \vec{0}$, alors $\vec{e} \neq \vec{0}$ implique nécessairement $\lambda = 0$, et la vérification de l'indépendance linéaire est terminée.

C'est donc un cas particulier très simple. En fait, il est souvent mobilisé pour montrer une égalité du type $\vec{x} = \lambda\vec{y}$ (par exemple lorsqu'on manipule deux fonctions f et g solutions de la même équation différentielle). On montre que $\vec{x}$ et $\vec{y}$ appartiennent à un certain espace vectoriel de dimension 1 : alors $(\vec{y})$ en forme une base (si $\vec{y} \neq \vec{0}$), de sorte qu'elle engendre F, et donc $\vec{x}$ en est combinaison linéaire.

Exemple 1. (base d'un noyau de matrice) Déterminons le noyau de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ avec le moins de calculs possibles. Pour cela, on note que A est de rang 1 (l'espace vectoriel engendré par les colonnes est de dimension 1, car elles sont toutes proportionnelles à $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$), donc d'après le théorème du rang on a : $\dim(\ker(A)) = 3 - 1 = 2$. Utilisons la connaissance de cette dimension pour déterminer $\ker(A)$ *sans résoudre* $AX = 0_{\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$ *en détails.*

Pour cela, on note que les colonnes de A vérifient $C_1 = C_2$ et $C_1 = C_3$, donc : $C_1 - C_2 = 0$, $C_1 - C_3 = 0$. On en déduit (comment ?) que $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont dans le noyau de A. Ils sont clairement linéairement indépendants, donc ils forment une famille libre de cardinal 2, dans un espace vectoriel de dimension 2. On en déduit que c'est une base de $\ker(A)$, et donc :

$$\ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

On aurait aussi pu utiliser le fait que $\ker(A) = \mathrm{im}(A)^{\perp}$ pour une matrice symétrique réelle (chapitre de 2^e^ année sur les espaces euclidiens). Ainsi on est ramené à chercher deux vecteurs indépendants et orthogonaux à $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exemple 2. (bases de sous-espaces propres, cas de valeurs propres simples) La détermination des sous-espaces propres des matrices compagnons est très rapide *via* la méthode de cette section, si l'on est dans le cas où des valeurs propres sont simples. Illustrons-le avec la matrice compagnon suivante : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculons d'abord ses valeurs propres : soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ 2 & -1 & x-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ x-1 & x & -1 \\ x-1 & -1 & x-2 \end{vmatrix} \quad (C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3) \quad = \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ 0 & x+1 & -1 \\ 0 & 0 & x-2 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \\ (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{matrix}$$

donc : $\chi_A = (X-1)(X+1)(X-2)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-1,1,2\}$, et les valeurs propres sont toutes simples. Cela nous enseigne plus particulièrement :

$$\dim(\ker(A - \mathrm{I}_3)) = \dim(\ker(A + \mathrm{I}_3)) = \dim(\ker(A - 2\mathrm{I}_3)) = 1.$$

Puisque chaque sous-espace propre est de dimension 1, un seul vecteur propre suffit à les engendrer. Or on vérifie que $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartient à $\ker(A - \mathrm{I}_3)$, en calculant directement AX_1 :

$$AX_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = X_1.$$

Puisque $AX_1 = X_1$, on a $X_1 \in \ker(A - \mathrm{I}_3)$. Or $X_1 \neq 0_{\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$, donc d'après la remarque ci-dessus X_1 suffit à engendrer $\ker(A - \mathrm{I}_3)$. On a bien : $\ker(A - \mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(X_1)$.

De même, on vérifie que $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartient à $\ker(A + \mathrm{I}_3)$:

$$AX_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -X_2.$$

Puisque $AX_2 = -X_2$, on a $X_2 \in \ker(A + \mathrm{I}_3)$ (pour comprendre comment j'ai « pu deviner » que ce choix de X_2 allait convenir, voir le dernier paragraphe de cet exemple). Or $X_2 \neq 0_{\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$, donc d'après la remarque ci-dessus X_2 suffit à engendrer $\ker(A + \mathrm{I}_3)$. On a : $\ker(A + \mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(X_2)$.

On vous laisse déterminer de même $\ker(A-2\mathrm{I}_3)$ pour conclure, *sans avoir résolu le moindre système linéaire*, qu'on a :

$$\ker(A-\mathrm{I}_3)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right),\ \ker(A+\mathrm{I}_3)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right),\ \ker(A-2\mathrm{I}_3)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}\right).$$

Plus généralement, c'est un exercice classique que si λ est une valeur propre d'une matrice compagnon d'ordre n, alors le sous-espace propre associé est de dimension 1, engendré par : $\begin{pmatrix}1\\\lambda\\\vdots\\\lambda^{n-1}\end{pmatrix}$. La démarche de cet exemple permet de le redémontrer très rapidement dans le cas d'une valeur propre simple. Par contre, en cas de valeur propre multiple, vous devez résoudre l'équation $AX=\lambda X$ pour le démontrer, car l'ordre de multiplicité de la valeur propre ne vous permet pas de conclure que le sous-espace propre associé est de dimension 1, et qu'un seul vecteur non nul suffit à l'engendrer.

Exemple 3. (bases de sous-espaces propres) Déterminons les sous-espaces propres de la matrice :

$$A=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&2\\2&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&2\\2&\cdots&2&1\end{pmatrix}\in\mathrm{M}_n(\mathbb{R}),$$

sans passer par des résolutions de systèmes linéaires. Pour cela, on note que $A+\mathrm{I}_n=\begin{pmatrix}2&2&\cdots&2\\2&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&2\\2&\cdots&2&2\end{pmatrix}$ est de rang 1, donc d'après le théorème du rang : $\dim\left(\ker\left(A+\mathrm{I}_n\right)\right)=n-1$. On en déduit que -1 est valeur propre de A, et on connaît la dimension du sous-espace propre associé. Voyons comment cela peut nous permettre d'en déduire une base de $\ker\left(A+\mathrm{I}_n\right)$: en raisonnant un peu comme dans l'exemple 1, on trouve comme vecteurs dans ce noyau :

$$X_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\\vdots\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ X_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ \ldots,\ X_{n-1}=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\\vdots\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

Ils sont échelonnés, donc linéairement indépendants. Ainsi la famille $(X_1,\ldots,X_{n-1})$ est dans $\ker\left(A+\mathrm{I}_n\right)$, libre, de cardinal $n-1=\dim\left(\ker\left(A+\mathrm{I}_n\right)\right)$, donc c'est une base de $\ker\left(A+\mathrm{I}_n\right)$. On a déterminé $\ker\left(A+\mathrm{I}_n\right)=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((X_1,\ldots,X_{n-1})\right)$ sans résoudre de système linéaire.

De plus A est symétrique réelle, donc d'après le théorème spectral elle est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont orthogonaux deux à deux. On en déduit, pour des contraintes dimensionnelles (la somme des dimensions des sous-espaces propres égale n, or $\dim\left(\ker\left(A+\mathrm{I}_n\right)\right)=n-1$), que A admet au plus une seule autre valeur propre $\lambda\in\mathbb{R}$, et on a nécessairement : $\dim(\ker(A-\lambda\mathrm{I}_n))=1$. Un vecteur non nul suffit à l'engendrer ; pour le trouver (alors même qu'on ne connaît pas encore λ), on se souvient que l'orthogonalité des sous-espaces propres (et le fait qu'il n'y en ait que deux) implique : $\ker(A-\lambda\mathrm{I}_n)=\ker\left(A+\mathrm{I}_n\right)^{\perp}=\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((X_1,\ldots,X_{n-1})\right)^{\perp}$, donc un vecteur X appartient à $\ker(A-\lambda\mathrm{I}_n)$ si et seulement s'il est orthogonal à tous les X_i explicités ci-dessus. On voit sans effort que le vecteur $X_n=\begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ est orthogonal à $X_1,\ldots,X_{n-1}$, donc il est non nul et appartient à $\ker(A-\lambda\mathrm{I}_n)$; comme c'est un espace de dimension 1, cela suffit pour l'engendrer, donc : $\ker(A - \lambda I_n) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(X_n)$.

On a explicité des bases de tous les sous-espaces propres *sans passer par une résolution de système linéaire*. Si l'on veut expliciter λ, on note qu'il doit vérifier : $AX_n = \lambda X_n$. Or un calcul montre que : $AX_n = (2n-1)X_n$, donc : $\lambda = 2n - 1$.

Exemple 4. (base d'un supplémentaire orthogonal) Déterminons le supplémentaire orthogonal (dans $\mathbb{R}^3$) de $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((1,2,3))$. Pour cela, on se souvient que : $\dim(F^{\perp}) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(F) = 3 - 1 = 2$, donc il suffit de trouver deux vecteurs linéairement indépendants de $F^{\perp}$ pour qu'ils en forment une base. Or on trouve facilement, à l'œil nu, que $(3,0,-1)$ et $(2,-1,0)$ sont orthogonaux à $(1,2,3)$ (qui engendre F), donc orthogonaux à F, et on en déduit qu'ils appartiennent à $F^{\perp}$. Ainsi $((3,0,-1),(2,-1,0))$ est une famille de $F^{\perp}$, libre car échelonnée, et de cardinal $2 = \dim\left(F^{\perp}\right)$: c'en est une base, et en particulier : $F^{\perp} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((3,0,-1),(2,-1,0))$. On a explicité $F^{\perp}$, *sans résoudre le moindre système linéaire.*

Exemple 5. (application en dimension 1**)** Nous avons expliqué plus haut comment les sous-espaces vectoriels de dimension 1 permettaient d'obtenir des égalités entre vecteurs, à peu de frais. Pour l'illustrer, nous allons redémontrer grâce à la théorie de la dimension que la fonction exponentielle vérifie : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $e^{x+y} = e^x e^y$. Pour cela : fixons $y \in \mathbb{R}$, et remarquons que les fonctions $f : x \mapsto e^{x+y}$ et $g : x \mapsto e^x$ vérifient toutes les deux l'équation différentielle : $y' = y$ (la vérification est facile, faites-la). Or le cours de 1re année vous apprend que l'espace vectoriel des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 est de dimension 1, donc une seule solution non nulle suffit à l'engendrer. Par exemple g l'engendre, et on en déduit que toute autre solution est proportionnelle à g ; c'est en particulier le cas de f, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $f = \lambda g$. C'est-à-dire : $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{x+y} = \lambda e^x$. On détermine λ grâce à la valeur en $x = 0$: on a $e^y = \lambda e^0 = \lambda$. Donc finalement : $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{x+y} = e^y e^x$, ce qu'on voulait démontrer.

Des démonstrations du chapitre sur les équations différentielles utilisent également cette approche : pour résoudre une équation différentielle linéaire homogène du second ordre, il suffit de trouver deux solutions linéairement indépendantes (par exemple une solution développable en série entière, et une autre avec la méthode d'abaissement de l'ordre), car on sait que l'espace vectoriel des solutions de $y'' + ay' + by = 0$ est de dimension 2.

Remarque sur les systèmes fondamentaux de solutions des équations différentielles. Nous voyons dans le chapitre sur les équations différentielles comment cette stratégie permet de résoudre des équations différentielles linéaires d'ordre 2 : nous ne proposons donc pas d'exemple dans ce document. Mentionnons tout de même quelques conséquences utiles de la connaissance *a priori* de l'espace vectoriel des solutions d'une équation différentielle, pour détecter vos erreurs :

- puisque l'espace vectoriel des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 est de dimension 1, vous ne pouvez pas trouver deux solutions non proportionnelles d'une même équation différentielle $y' = ay$ (ce qui se produit lorsque vous utilisez la méthode d'abaissement de l'ordre pour résoudre une équation différentielle d'ordre 2, et que vous essayez de conclure en bluffant car vous échouez dans vos calculs) ;
- puisque l'espace vectoriel des solutions de $y'' + ay' + by = 0$ est de dimension 2, il n'est pas possible que vous ne trouviez qu'une fonction dans votre système fondamental de solutions : vous avez forcément fait une erreur.

2 Pour montrer des égalités entre sous-espaces

On rappelle le résultat suivant : si E et F sont deux espaces vectoriels tels que : $F \subseteq E$, alors on a : $\dim(F) = \dim(E) \iff F = E$. Dans cette section nous ne parlons que de l'implication directe, qui sert effectivement à expliciter un sous-espace inconnu F : il arrive qu'on parvienne à montrer par des manipulations élémentaires que l'espace inconnu F est inclus dans un espace vectoriel usuel E. Pour expliciter F, il suffirait alors de montrer l'inclusion réciproque, puisque $F \subseteq E$ et $E \subseteq F$ impliquent $F = E$ (ce qui explicite F vu que E est supposé connu). Mais si l'on parvient, en général grâce aux formules de la figure 1, à montrer que $\dim(F) = \dim(E)$, alors on a l'égalité $F = E$ **sans avoir à démontrer l'autre inclusion** $E \subseteq F$.

C'est très avantageux parce que l'une des deux inclusions peut être *très* difficile à démontrer. C'est le cas notamment si F est défini comme l'ensemble des vecteurs $\vec{x}$ tels qu'il existe ★ vérifiant ♠ (la propriété ♠ dépendant de $\vec{x}$) : cela peut être délicat car, pour montrer cette existence, il faut en général *construire explicitement l'élément ★ qui convient*, et fabriquer cet élément peut être difficile voire impossible si l'espace est trop abstrait (ou la condition ♠ trop complexe).

Exemple 6. On pose :

$$F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(x \mapsto (\cos(x))^k\right)_{k\in[\![0,n]\!]}\right), \quad \text{et :} \quad G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((x \mapsto \cos(kx))_{k\in[\![0,n]\!]}\right).$$

Nous allons démontrer : $F = G$, avec une seule inclusion et l'égalité des dimensions.

Encore faut-il connaître les dimensions de F et G : je laisse de côté la démonstration que $\dim(F) = \dim(G) = n+1$, et je la renvoie à l'exercice 1 ci-dessous. Montrons qu'on a : $F \subseteq G$. Pour cela, il suffit de montrer que pour tout $\ell \in [\![0,n]\!]$, l'application $x \mapsto (\cos(x))^\ell$ appartient à G (un résultat de 1re année vous enseigne que $F \subseteq G$ si et seulement si tous les vecteurs d'une partie génératrice de F appartiennent à G), c'est-à-dire que pour tout $\ell \in [\![0,n]\!]$, l'application $x \mapsto (\cos(x))^\ell$ est une combinaison linéaire des applications $x \mapsto \cos(kx)$ avec $k \in [\![0,n]\!]$. Montrons-le par linéarisation de fonction trigonométrique : soit $\ell \in [\![0,n]\!]$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a, d'après les formules d'Euler et du binôme de Newton :

$$(\cos(x))^\ell = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^\ell = \frac{1}{2^\ell}\sum_{k=0}^{\ell}\binom{\ell}{k}\left(e^{ix}\right)^{\ell-k}\left(e^{-ix}\right)^k = \frac{1}{2^\ell}\sum_{k=0}^{\ell}\binom{\ell}{k}e^{i(\ell-2k)x}.$$

On prend la partie réelle dans cette égalité. Le membre de gauche reste inchangé, et dans celui de droite on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall k \in [\![0,\ell]\!]$, $\mathrm{Re}\left(e^{i(\ell-2k)x}\right) = \cos((\ell-2k)x)$. Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\cos(x))^\ell = \frac{1}{2^\ell}\sum_{k=0}^{\ell}\binom{\ell}{k}\cos((\ell-2k)x).$$

On a presque ce qu'on veut : encore faut-il s'assurer qu'on a bien $x \mapsto \cos((\ell-2k)x) \in G$, ce qui n'est pas clair si $\ell - 2k \notin [\![0,n]\!]$ au vu de la définition de G. Regardons à quelle condition on a bien $\ell - 2k \in [\![0,n]\!]$: si $k \in [\![0,\ell]\!]$, alors :

$$\ell - 2k \in [\![0,n]\!] \iff 0 \leqslant \ell - 2k \leqslant n \iff \frac{\ell-n}{2} \leqslant k \leqslant \frac{\ell}{2}.$$

Comme $\frac{\ell-n}{2} \leqslant 0$ et $0 \leqslant k$, la première inégalité est toujours vraie. Ainsi $\ell - 2k \in [\![0,n]\!]$ si et seulement si : $k \leqslant \frac{\ell}{2}$. Il semble donc que tous les cosinus de la somme ci-dessus ne soient pas dans G... On y remédie en transformant $x \mapsto \cos((\ell-2k)x)$ par parité lorsque $k > \frac{\ell}{2}$:

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\cos(x))^\ell &= \frac{1}{2^\ell}\sum_{0\leqslant k\leqslant \frac{\ell}{2}}\binom{\ell}{k}\cos((\ell-2k)x) + \frac{1}{2^\ell}\sum_{\frac{\ell}{2}<k\leqslant \ell}\binom{\ell}{k}\cos((\ell-2k)x)\\ &= \frac{1}{2^\ell}\sum_{0\leqslant k\leqslant \frac{\ell}{2}}\binom{\ell}{k}\cos((\ell-2k)x) + \frac{1}{2^\ell}\sum_{\frac{\ell}{2}<k\leqslant \ell}\binom{\ell}{k}\cos((2k-\ell)x).\end{aligned}$$

Tous les cosinus de la première somme appartiennent bien à G, d'après l'étude ci-dessus. Pour la seconde somme, on note que si : $\frac{\ell}{2} < k \leqslant \ell$, on a : $0 < 2k - \ell \leqslant \ell$, donc $x \mapsto \cos((2k-\ell)x) \in G$: on a donc bien écrit $x \mapsto (\cos(x))^\ell$ comme combinaison linéaire d'éléments de G, et on en déduit : $\forall \ell \in [\![0,n]\!]$, $x \mapsto (\cos(x))^\ell \in G$. Comme ces puissances de cosinus engendrent F, on a par linéarité : $F \subseteq G$. Or $\dim(F) = \dim(G) = n+1$ comme c'est démontré dans l'exercice 1, donc : $F = G$.

Cette égalité entre sous-espaces vectoriels nous enseigne notamment, sans recourir à l'anti-linéarisation ni effectuer le moindre calcul, que $x \mapsto \cos(kx)$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de puissances de cosinus (puisque c'est un élément de $G = F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(x \mapsto (\cos(x))^k\right)_{k\in[\![0,n]\!]}\right)$). Notez l'économie.

Exercice 1.

1. Démonstration que $\dim(F) = n+1$. Posons : $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_k(x) = (\cos(x))^k$.
   (a) Montrer que s'il existe $(a_0,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que : $\sum\limits_{k=0}^{n} a_i f_k = 0$, alors le polynôme $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_i X^i$ admet pour racines tous les réels de $[-1{,}1]$.
   (b) En déduire que la famille $(f_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est libre. Conclure que $\dim(F) = n+1$.
2. Démonstration que $\dim(G) = n+1$. Posons : $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_k(x) = \cos(kx)$.
   (a) Montrer que l'application $\delta : f \mapsto f''$ (qui, à une fonction, associe sa dérivée seconde) est un endomorphisme de G, et qu'on a : $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\delta(g_k) = -k^2 g_k$.
   (b) En déduire, soit par récurrence sur n, soit en invoquant directement un résultat du chapitre de réduction, que la famille $(g_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est libre. Conclure que $\dim(G) = n+1$.

Exercice 2. Refaire cet exemple, mais sans recours à la dimension, en montrant la double inclusion.

Listons des résultats de cours dont les démonstrations utilisent cette approche :

— cours de 1re année : si $f : E \to F$ est une application linéaire entre deux espaces vectoriels *de même dimension* (finie), alors : f est injective si et seulement si f est surjective (et donc bijective) ;

— cours de 1re année : pour que deux sous-espaces F et G d'un espace euclidien soient supplémentaires orthogonaux ($G = F^{\perp}$ et $F = G^{\perp}$), il suffit de montrer que $\dim(F)+\dim(G) = \dim(E)$ et $F \perp G$;

— chapitre sur les espaces euclidiens : si f est autoadjoint, alors : $\ker(f) = (\mathrm{im}(f))^{\perp}$ et $(\ker(f))^{\perp} = \mathrm{im}(f)$.

Nous vous invitons à relire leurs démonstrations en ayant en tête les principes de cette section.

2.1 Cas particulier fréquent : l'image d'une application linéaire

Nous avons dit ci-dessus que l'inclusion $E \subseteq F$ est difficile à démontrer lorsque la définition des vecteurs de F fait intervenir le quantificateur « $\exists$ ». C'est en particulier le cas lorsque F est l'image d'une application linéaire f, puisque en effet on a par définition :

$$\mathrm{im}(f) = \{\vec{y} \in \cdots \mid \exists x \in \cdots,\ \vec{y} = f(\vec{x})\}.$$

Étant donné $\vec{y}$, comment *fabriquer* le vecteur $\vec{x}$ qui convient ? Même pour des applications linéaires f relativement simples, cette construction est difficile. Alors que dire si f est une application abstraite ?

La stratégie de la section précédente peut être profitable dans cette configuration : on montre que $\mathrm{im}(f)$ est inclus dans un espace classique E (en montrant concrètement qu'un élément de la forme $f(\vec{x}) \in \mathrm{im}(f)$ vérifie la condition pour appartenir à E). C'est en général l'inclusion la plus abordable. **Grâce au théorème du rang**, on calcule la dimension de $\mathrm{im}(f)$ (il faut donc avoir explicité $\ker(f)$ avant ; l'idée étant que $\ker(f)$ est presque systématiquement plus facile à obtenir que $\mathrm{im}(f)$, vu que $\ker(f)$ revient seulement à résoudre une équation linéaire, et non à *construire* un objet vérifiant une certaine propriété), en espérant qu'elle vérifie : $\dim(\mathrm{im}(f)) = \dim(E)$. Ayant une inclusion et l'égalité des dimensions, on en déduit : $\mathrm{im}(f) = E$, **sans avoir eu à montrer que tout élément de E admet un antécédent par f.**

Pour avoir une idée de l'ensemble E auquel est égal $\mathrm{im}(f)$, commencez si besoin par calculer des valeurs explicites $f(\vec{x})$ avec des $\vec{x}$ EXPLICITES et SIMPLES. Regardez la propriété commune vérifiée par toutes les images que vous avez calculées, et prenez pour E un espace vectoriel usuel dont les vecteurs vérifient tous cette propriété.

Un choix intelligent est de prendre $\vec{x}$ dans une base de l'espace de départ de f : voyez dans l'exemple 8 en quoi cela accélère la vérification ultérieure de l'inclusion $\mathrm{im}(f) \subseteq E$.

Déterminer $\mathrm{im}(f)$:

1. Conjecturer un espace *simple* E (usuel) auquel $\mathrm{im}(f)$ est égal, en calculant $f(\vec{x})$ pour $\vec{x}$ explicite.
2. Montrer que $f(\vec{x}) \in E$ pour tout $\vec{x}$, et en déduire : $\mathrm{im}(f) \subseteq E$.
3. Calculer $\ker(f)$ pour en déduire $\dim(\mathrm{im}(f))$ grâce au théorème du rang. Si $\dim(\mathrm{im}(f)) = \dim(E)$, alors : $\mathrm{im}(f) = E$.

Sauf cas particuliers, cette stratégie n'est pas très utile pour un endomorphisme de K^n, car la méthode du pivot de Gauß permet aisément d'obtenir son noyau et son image en même temps (comment ?). Par contre elle nous rend bien service pour des applications linéaires définies sur (ou à valeurs dans) $\mathrm{M}_n(K)$, $K_n[X]$, etc., où les objets mathématiques sont plus complexes.

Exemple 7. (exemple dans $\mathrm{M}_n(K)$) Considérons l'endomorphisme $f : \begin{cases} \mathrm{M}_n(K) & \to & \mathrm{M}_n(K) \\ M & \mapsto & M + M^\top \end{cases}$, et cherchons son image. Si vous faites quelques essais avec $n = 2$ et des matrices explicites M (FAITES-LE VRAIMENT), vous constatez que $f(M)$ est systématiquement une matrice symétrique. Ainsi nous conjecturons, et allons démontrer *via* la stratégie de cette section, que : $\mathrm{im}(f) = \mathrm{S}_n(K)$.

Démonstration de l'inclusion $\mathrm{im}(f) \subseteq \mathrm{S}_n(K)$. Par définition, une matrice A de $\mathrm{S}_n(K)$ vérifie : $A^\top = A$. Pour montrer : $\mathrm{im}(f) \subseteq \mathrm{S}_n(K)$, il suffit donc de montrer que pour toute matrice $M \in \mathrm{M}_n(K)$, on a : $f(M) \in \mathrm{S}_n(K)$, c'est-à-dire : $f(M)^\top = f(M)$. C'est facile, puisque :

$$\forall M \in \mathrm{M}_n(K), \quad f(M)^\top = \left(M + M^\top\right)^\top = M^\top + \left(M^\top\right)^\top = M^\top + M = M + M^\top = f(M),$$

ce qu'on voulait démontrer.

Démonstration de l'égalité entre dimensions. Comme indiqué, on détermine d'abord $\ker(f)$ (ce qui ne sera l'affaire que de quelques secondes), et on en déduit $\dim(\mathrm{im}(f))$ grâce au théorème du rang. Soit $M \in \mathrm{M}_n(K)$. On a : $f(M) = 0_{\mathrm{M}_n(K)}$, si et seulement si : $M^\top = -M$, si et seulement si : $M \in \mathrm{A}_n(K)$ (espace vectoriel des matrices antisymétriques). Donc : $\ker(f) = \mathrm{A}_n(K)$. Sa dimension est connue (et vous devez savoir la retrouver rapidement), et est égale à $\frac{n(n-1)}{2}$. On en déduit, par le théorème du rang :

$$\dim(\mathrm{im}(f)) = \dim(\mathrm{M}_n(K)) - \dim(\ker(f)) = n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n}{2}(2n - (n-1)) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Or on sait qu'on a : $\dim(\mathrm{S}_n(K)) = \frac{n(n+1)}{2}$. On a donc montré : $\dim(\mathrm{im}(f)) = \dim(\mathrm{S}_n(K))$, et : $\mathrm{im}(f) \subseteq \mathrm{S}_n(K)$, ce qui implique : $\mathrm{im}(f) = \mathrm{S}_n(K)$. D'où le résultat.

Exemple 8. (exemple dans $K[X]$) Cherchons l'image de l'endomorphisme :

$$f : \begin{cases} K_n[X] & \to & K_n[X] \\ P & \mapsto & nP - (X+1)P' \end{cases}.$$

Conformément au conseil ci-dessus, je vais conjecturer ce qu'est $\mathrm{im}(f)$ en calculant l'image par f de vecteurs simples de $K_n[X]$, en particulier égaux aux vecteurs de la base canonique $\left(X^k\right)_{0 \leqslant k \leqslant n} = (1, X, \ldots, X^n)$. On a : $f(1) = n$, et :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad f\left(X^k\right) = nX^k - (X+1)kX^{k-1} = (n-k)\,X^k - kX^{k-1}.$$

Une lecture inattentive semblerait indiquer que $f\left(X^k\right)$ et X^k sont de même degré pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, ce qui permettrait par exemple de conjecturer que l'image de f est $K_n[X]$ (vu qu'on parcourrait des polynômes de tout degré inférieur ou égal à n : l'espace $K_n[X]$ est l'espace vectoriel usuel le plus simple qui les contiendrait tous). Mais en inspectant ce qu'on a démontré de plus près, on voit que pour $k = n$ on a : $f(X^n) = -nX^{n-1}$. On voit donc qu'on n'obtient jamais de polynôme de degré n : seulement de degré au plus $n-1$. On peut donc conjecturer raisonnablement que $\mathrm{im}(f) = K_{n-1}[X]$ (l'espace vectoriel usuel le plus simple contenant des polynômes de tout degré inférieur à $n-1$). Montrons-le.

Démonstration de l'inclusion $\mathrm{im}(f) \subseteq K_{n-1}[X]$. On l'a déjà presque montré pour les images par f des vecteurs de la base canonique : si $k = n$, alors $f(X^n) = -nX^{n-1} \in K_{n-1}[X]$, tandis que si $k \in [\![1, n-1]\!]$ alors $f\left(X^k\right) = (n-k)X^k - kX^{k-1}$ avec $n - k \neq 0$, donc $\deg\left(f\left(X^k\right)\right) = k \leqslant n-1$, ce qui veut dire : $f\left(X^k\right) \in K_{n-1}[X]$. De même pour $k = 0$, où c'est trivial. Ainsi, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, cette distinction de cas montre qu'on a : $f\left(X^k\right) \in K_{n-1}[X]$. On en déduit que l'image de f est incluse dans $K_{n-1}[X]$ par linéarité, puisque pour tout polynôme $P \in K_n[X]$, qu'on écrit sous la forme : $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$, on a :

$$f(P) = f\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k \underbrace{f\left(X^k\right)}_{\in K_{n-1}[X]} \in K_{n-1}[X],$$

l'espace vectoriel $K_{n-1}[X]$ étant stable par combinaison linéaire. Ceci montre : $\mathrm{im}(f) \subseteq K_{n-1}[X]$.

Démonstration de l'égalité entre dimensions. Déterminons $\ker(f)$, c'est-à-dire l'espace vectoriel des polynômes $P \in K_n[X]$ vérifiant : $f(P) = 0_{K_n[X]}$. Si P est un tel polynôme, alors son application polynomiale associée vérifie l'équation différentielle linéaire homogène du premier ordre :

$$\forall x \in]-1, +\infty[, \quad y'(x) - \frac{n}{x+1} y(x) = 0,$$

dont les solutions sont de la forme $x \mapsto \lambda e^{n\ln(x+1)} = \lambda(x+1)^n$ avec $\lambda \in K$. On en déduit que $P \in \ker(f)$ si et seulement s'il existe $\lambda \in K$ tel que : $\forall x \in]-1, +\infty[$, $P(x) = \lambda(x+1)^n$, si et seulement s'il existe $\lambda \in K$ tel que : $P = \lambda(X+1)^n$ (pour la justification de la dernière équivalence, voir les principes du document *Raisonnements sur les racines*). Ainsi :

$$\ker(f) = \mathrm{Vect}_K\left((X+1)^n\right),$$

et on en déduit : $\dim(\ker(f)) = 1$. D'après le théorème du rang, on a donc :

$$\dim(\mathrm{im}(f)) = \dim(K_n[X]) - \dim(\ker(f)) = (n+1) - 1 = n.$$

Or : $n = \dim(K_{n-1}[X])$, donc : $\dim(\mathrm{im}(f)) = \dim(K_{n-1}[X])$. On a de plus : $\mathrm{im}(f) \subseteq K_{n-1}[X]$, d'après ce qui précède, donc : $\mathrm{im}(f) = K_{n-1}[X]$.

Dans ce dernier exemple, nous vous laissons vous convaincre que l'inclusion réciproque est assez ardue à démontrer : il faudrait démontrer que pour tout $Q \in K_{n-1}[X]$, il existe $P \in K_n[X]$ tel que : $Q = f(P) = nP - (X+1)P'$. Cela reviendrait à résoudre une équation différentielle du 1^er^ ordre avec second membre : c'est plus pénible.

Table des matières