MÉTHODES – Algèbre linéaire

1 ✓ Indépendance linéaire

Par définition, une famille libre de E est une famille de vecteurs $\mathcal{F} = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ de E telle que pour tous $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ scalaires, l'égalité $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i = \vec{0}$ implique $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Démontrer qu'une famille est libre : nous n'avons qu'une seule équation pour n inconnues. Un début de résolution est d'appliquer des opérations sur l'équation pour en obtenir au moins n. Après, nous pouvons espérer résoudre ce système d'équations avec la méthode du pivot de Gauß.

Principe de la méthode

1 ÉQUATION LINÉAIRE + n INCONNUES	=	IMPOSSIBLE À RÉSOUDRE
n ÉQUATIONS LINÉAIRES + n INCONNUES	=	RÉSOLUTION POSSIBLE

Pour produire ces n équations, voici quelques pistes qui dépendent de la nature des vecteurs. Votre serviteur tient à ce que vous ne lisiez pas ces méthodes pour les retenir machinalement – ce serait de l'énergie utilisée en pure perte –, mais pour que vous *compreniez* en quoi elles illustrent le principe global énoncé ci-dessus.

1.1 ✓ Cas de vecteurs de $\mathbb{R}^n$

Dans ce cas, il existe essentiellement deux méthodes, la seconde ne s'appliquant qu'au cas très précis où il y a autant de vecteurs que la dimension de l'espace vectoriel.

Méthode 1. On exprime les vecteurs de la famille dont on doit montrer la liberté dans une base, souvent la base canonique, où l'on connaît leurs coordonnées ; en **identifiant coordonnée par coordonnée**, on obtient un système linéaire à n équations pour n inconnues, qu'on résout par la méthode du pivot de Gauß.

Méthode 2. On regarde si la **matrice** exprimant la famille de vecteurs $\mathcal{F}$ dans la base canonique (ou une autre base si les hypothèses le suggèrent) est **inversible**, soit par la méthode du pivot de Gauß, soit en démontrant que le déterminant est non nul ; cela démontre même davantage, puisque dans ce cas la famille $\mathcal{F}$ est une base. Noter que cette méthode est très proche de la première dans son principe.

Ne surtout pas omettre les méthodes 7 à 9, qui s'appliquent également à des vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

1.2 ✓ Cas de vecteurs dans un espace de fonctions ou de polynômes

Si les vecteurs de $\mathcal{F}$ sont des fonctions $f_1, \ldots, f_n$ définies sur un intervalle I, alors on doit montrer qu'une égalité de la forme : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i = 0$ implique $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. Il est plus facile pour l'intuition de plutôt travailler sur la relation de dépendance linéaire écrite ainsi :

$$\forall x \in I, \quad \alpha_1 f_1(x) + \cdots + \alpha_n f_n(x) = 0.$$

Méthode 3. Pour chaque valeur de x possible, cela donne une équation ; avec n choix, il y a donc autant d'équations que d'inconnues. Mais il vaut mieux faire des choix intelligents de x pour que ces équations obtenues soient indépendantes et faciles à traiter : on les choisit de sorte que les fonctions en ces points soient au pire connues, et au mieux nulles (pour éliminer le nombre d'inconnues). Le cas idéal est celui où toutes les fonctions sauf une sont **annulées** en un réel $x \in I$: alors, cela nous permet immédiatement de conclure à la nullité d'un coefficient. Dans le cas des polynômes, on choisira de préférence des racines de ces polynômes.

Il est aussi possible de prendre la **limite** quand x tend vers une extrémité de l'intervalle I, voire un **équivalent**, si l'on est capable de comparer les fonctions f_i.

Méthode 4. Des fonctions peuvent également être dérivées et intégrées (avec de bonnes hypothèses) entre autres choses. S'il est difficile en général de calculer l'intégrale d'une fonction sur un intervalle, il est par contre assez commode de la dériver. **Dériver** une relation de dépendance linéaire entre fonctions, $n-1$ fois (au moins) s'il y a n fonctions, est donc un moyen à privilégier d'augmenter le nombre d'équations. Si, parmi ces fonctions, il y a des **applications polynomiales**, c'est encore mieux : le degré est abaissé à chaque dérivation, ce qui rend donc chaque application polynomiale plus simple (voire nulle après assez d'étapes).

Cette méthode s'utilise souvent en combinaison avec la méthode précédente (à savoir : on dérive *puis* on évalue en un réel bien choisi).

Méthode 5. Cette méthode s'applique plus spécifiquement aux vecteurs dans des espaces de **polynômes**. La différence principale avec les fonctions générales est que les polynômes ont des **coefficients** : on peut les écrire sous la forme $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, et ces coefficients sont uniques, ce qui permet d'**identifier**. Ainsi, étant donnée une relation de dépendance linéaire :

$$\alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_n P_n = 0,$$

si les coefficients des P_i sont tous connus, alors pour tout $i \in \mathbb{N}$ le coefficient dans $\alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_n P_n$ de X^i est nul (puisqu'il s'agit du polynôme nul). Écrire la nullité de tous ces coefficients permet d'obtenir autant d'équations que le degré supposé des polynômes P_i, que l'on résout ensuite avec la méthode du pivot de Gauß.

Méthode 6. Si les fonctions sont dans un espace vectoriel de **dimension finie** (c'est souvent le cas des **applications polynomiales**, dès que leur degré est borné), alors la liberté peut se démontrer suivant EXACTEMENT les mêmes méthodes que dans $\mathbb{R}^n$ (c'est d'ailleurs là que réside l'intérêt primordial de l'algèbre linéaire : tout ramener à une étude dans $\mathbb{R}^n$). En effet, il existe dans ce cas une base $\mathcal{B}$ dans laquelle on peut exprimer ces fonctions, et on peut ensuite :

— remplacer, dans l'égalité $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i = 0$, les fonctions f_i par leurs décompositions dans la base $\mathcal{B}$, puis identifier coordonnée par coordonnée, nous ramenant à un système linéaire (méthode 1) ;

— écrire leur **matrice** dans la base $\mathcal{B}$, et montrer qu'elle est inversible (méthode 2).

C'est par exemple ainsi qu'on peut démontrer aisément qu'une famille de polynômes échelonnée en degré est libre. Cette méthode ressemble à la précédente.

1.3 Généralités

Dans les autres cas, il n'y a plus de méthode générale, et il faut s'adapter selon les hypothèses de l'énoncé. Mentionnons tout de même quelques familles qui sont systématiquement libres.

Méthode 7. Une famille de **vecteurs propres** d'un endomorphisme *associés à des valeurs propres différentes* est toujours libre. Une telle famille n'est parfois pas explicitement une famille de vecteurs propres, et il faut un peu de nez pour déterminer un endomorphisme dont ils sont des vecteurs propres : on pense alors aux transformations naturelles qui transforment ces vecteurs en eux-mêmes « à un facteur près » (dans le cas des fonctions : dérivation, changer x en $-x$, etc.). Notons que pour démontrer ce résultat général, on produisit n équations en appliquant f à l'équation de départ $n-1$ fois.

Méthode 8. Une famille **orthogonale** est libre. Elle n'est pas toujours présentée comme telle : attention à ne pas oublier que les espaces vectoriels de polynômes, fonctions, et matrices ont aussi des produits scalaires. Dans les deux premiers cas, ils sont souvent définis à l'aide d'une intégrale. Notons que pour démontrer ce résultat général, on produisit n équations en faisant les n produits scalaires possibles avec un vecteur de $\mathcal{F}$.

Méthode 9. Une **image** de famille libre par une application linéaire **injective** est libre. En général, on nous donne même l'image par un **isomorphisme** (d'une base).

Dans ces trois cas de figure, on vous fait souvent démontrer l'hypothèse cruciale dans une question antérieure, soyez donc vigilants et faites attentivement le lien entre les questions d'un exercice.

Méthode 10. Comme dans le cas des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et des polynômes, *s'il est possible de décomposer ces vecteurs dans une base*, alors en identifiant coordonnée par coordonnée vous obtenez un système linéaire résoluble par la méthode du pivot de Gauß (parce qu'il y aura n équations pour n inconnues). On est ramené à la méthode 2.

Malgré le nombre apparemment élevé de méthodes différentes, songez bien que c'est le même principe qui les régit toutes : ACCROÎTRE LE NOMBRE D'ÉQUATIONS POUR EN AVOIR n ! Ces méthodes sont là pour vous guider, mais *comprendre* ce principe suffit et les rend caduques.

Exercice 1. Montrer que la famille $((-1,1,1),(1,-1,1),(1,1,-1))$ est libre :

1. Avec la méthode 1.
2. Avec la méthode 2.

Exercice 2. Soit $n \geqslant 1$. On pose :

$$\vec{e}_1 = (1,0,\dots,0) \in \mathbb{R}^n,\ \vec{e}_2 = (2,1,0,\dots,0) \in \mathbb{R}^n,\ \vec{e}_3 = (3,2,1,0,\dots,0) \in \mathbb{R}^n,$$

et plus généralement :

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ \vec{e}_k = (k,k-1,\dots,2,1,0,\dots,0) \in \mathbb{R}^n$$

Montrer que la famille $(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$ est libre dans $\mathbb{R}^n$:

1. Avec la méthode 1.
2. Avec la méthode 2.

Exercice 3. Montrer que dans $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, la famille $(\cos,\sin)$ est libre :

1. Avec la méthode 3.
2. Avec la méthode 4.
3. Avec la méthode 7 (plus subtil).
4. Avec la méthode 8 (plus subtil).

Exercice 4. Montrer que dans $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, la famille $(x \mapsto e^x, x \mapsto e^{2x}, x \mapsto e^{3x})$ est libre :

1. Avec la méthode 3 (évaluation, ou équivalent asymptotique).
2. Avec la méthode 4.
3. Avec la méthode 7 (plus subtil).

Exercice 5. Montrer que dans $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, la famille $(x \mapsto \cos(x), x \mapsto \cos(2x), x \mapsto \cos(3x))$ est libre :

1. Avec la méthode 3.
2. Avec la méthode 4.
3. Avec la méthode 7 (plus subtil).
4. Avec la méthode 8 (plus subtil).

Exercice 6. Montrer que dans $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, la famille $(x \mapsto \cos(x), x \mapsto (\cos(x))^2, x \mapsto (\cos(x))^3)$ est libre :

1. Avec la méthode 3.
2. Avec la méthode 4.
3. Avec la méthode 6 (on admettra le résultat de l'exercice précédent).

Exercice 7. Montrer qu'une famille de polynômes $(P_0,\dots,P_n)$ échelonnée en degré est libre :

1. Avec la méthode 3 (équivalent asymptotique).
2. Avec la méthode 4.
3. Avec la méthode 6.

Exercice 8. Montrer que la famille $(X^3+X+1, X^3-2X+2, X^2+3X)$ est libre dans $\mathbb{R}_3[X]$:

1. Avec la méthode 3.
2. Avec la méthode 4.
3. Avec la méthode 5.
4. Avec la méthode 6.

Exercice 9. Soit $n \geqslant 1$. Montrer que la famille $(1+X, X+X^2, X^2+X^3, \ldots, X^{n-1}+X^n, X^n)$ est libre dans $\mathbb{R}_n[X]$:

1. Avec la méthode 3.
2. Avec la méthode 4.
3. Avec la méthode 5.
4. Avec la méthode 6.

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}$, et soient $a, b \in \mathbb{R}$ des réels distincts. Montrer que la famille :

$$((X-a)^n, (X-a)^{n-1}(X-b), \ldots, (X-a)^{n-k}(X-b)^k, \ldots, (X-a)(X-b)^{n-1}, (X-b)^n)$$

est libre dans $\mathbb{R}_n[X]$ avec la méthode 3.

Exercice 11. Montrer que la famille $(X^3, (X+1)^3, (X+2)^3, (X+3)^3)$ est libre dans $\mathbb{R}_3[X]$:

1. Avec la méthode 3.
2. Avec la méthode 4.
3. Avec la méthode 5.
4. Avec la méthode 6 (reconnaître un déterminant de Vandermonde).

Exercice 12. Montrer que la famille de suites $\left((1)_{n\geqslant 0}, (n)_{n\geqslant 0}, (n^2)_{n\geqslant 0}, (n^3)_{n\geqslant 0}\right)$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ avec la méthode 3 (évaluation, ou équivalent asymptotique). On pourra aussi recourir au déterminant de Vandermonde.

Exercice 13. Soit $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une famille libre d'un espace vectoriel E. On pose : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\vec{u}_k = \sum_{i=1}^{k} \vec{e}_i$. Montrer que la famille $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ est libre avec la méthode 10.

2 ✓ Décompositions en somme directe

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. On discute ici de la façon de démontrer que $E = F \oplus G$, en particulier dans les situations abstraites (section 2.2). La plupart des conseils s'adaptent au cas d'une somme directe de trois sous-espaces vectoriels ou plus.

2.1 ✓ Lorsqu'on connaît (ou peut connaître) la dimension des sous-espaces

C'est le cas favorable : si on connaît déjà la dimension des sous-espaces F et G, alors le cours vous enseigne que $E = F \oplus G$ si et seulement si, au choix :

— la concaténation d'une base de F et d'une base de G donne une base de E ;

— on a : $F \cap G = \{\vec{0}\}$, et : $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

La première méthode est à privilégier quand $E = \mathbb{R}^n$ avec n un entier de taille raisonnable ($n = 2$, 3...). Dans ce cas, il est souvent facile de trouver des bases de F et G, et un simple calcul de déterminant permet d'évacuer rapidement la question pour la concaténation de ces deux bases.

Exemple 1. Les sous-espaces vectoriels $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((1,2,3))$ et $G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((1,1,1),(1,-1,1))$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$, puisque la concaténation de leurs bases a pour déterminant dans la base canonique :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$$

Ce calcul de déterminant montre que $((1,2,3),(1,1,1),(1,-1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, donc : $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

Lorsqu'on n'est pas dans ce cas de figure, il est fort probable que vous ne connaissiez pas de base (par exemple parce que les sous-espaces sont abstraits et que leurs dimensions ont été calculées par des moyens détournées, grâce aux identités de la figure 1), ou que les bases de F et G soient trop compliquées pour que vous puissiez étudier leur concaténation. Il vous reste alors à utiliser la seconde approche. Pour montrer que $F \cap G = \{\vec{0}\}$, introduisez un vecteur dans l'intersection, et pensez à traduire le fait d'appartenir à F, puis à G. Confrontez les deux relations que vous avez traduites, pour voir en quoi elles impliquent la nullité du vecteur.

Un cas particulier fréquent est la somme directe : $E = \ker(f) \oplus \mathrm{im}(f)$ (vraie seulement en ajoutant des hypothèses sur l'endomorphisme f). Il faut bien remarquer que dans ce cas, on sait immédiatement que $\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{im}(f)) = \dim(E)$: c'est le théorème du rang ! Dans ce cas, la deuxième méthode s'invite naturellement, et il ne reste qu'à vérifier que si $\vec{y} \in \ker(f) \cap \mathrm{im}(f)$, alors $\vec{y} = \vec{0}$. Dans ce cas $\ker(f) \cap \mathrm{im}(f) = \{\vec{0}\}$ et on a montré tout ce qu'il faut.

Pour montrer que $\vec{y} = \vec{0}$, commencez par traduire l'appartenance à l'image de f, en introduisant un antécédent de $\vec{y}$ par f, que vous appelez $\vec{x}$. On sait alors que $\vec{y} = f(\vec{x})$ et $f(\vec{y}) = \vec{0}$ (car $\vec{y} \in \ker(f)$), donc : $f^2(\vec{x}) = f(f(\vec{x})) = f(\vec{y}) = \vec{0}$. Il reste à utiliser les hypothèses sur f pour voir en quoi cela implique $\vec{y} = \vec{0}$.

Exemple 2. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie, vérifiant : $f^3 = f$. Montrons : $E = \ker(f) \oplus \mathrm{im}(f)$. Comme remarqué ci-dessus, grâce au théorème du rang on a déjà : $\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{im}(f)) = \dim(E)$, donc il suffit de montrer : $\ker(f) \cap \mathrm{im}(f) = \{\vec{0}\}$, pour que $\ker(f)$ et $\mathrm{im}(f)$ soient supplémentaires. Soit $\vec{y} \in \ker(f) \cap \mathrm{im}(f)$. Comme $\vec{y} \in \mathrm{im}(f)$, il existe $\vec{x} \in E$ tel que : $\vec{y} = f(\vec{x})$. De plus $f(\vec{y}) = \vec{0}$ car $\vec{y} \in \ker(f)$. Par conséquent, en évaluant l'égalité : $f^3 = f$, en $\vec{x}$, on a : $f^3(\vec{x}) = f(\vec{x})$, ou encore : $f^2(\vec{y}) = \vec{y}$. Mais le membre de gauche est nul, puisque : $f^2(\vec{y}) = f(f(\vec{y})) = f(\vec{0}) = \vec{0}$. Ainsi $\vec{y} = \vec{0}$, ce qu'il fallait démontrer. On a bien $\ker(f) \cap \mathrm{im}(f) = \{\vec{0}\}$ et $\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{im}(f)) = \dim(E)$, donc : $E = \ker(f) \oplus \mathrm{im}(f)$.

2.2 ✓ Lorsqu'on ne connaît pas la dimension, ou qu'on est en dimension infinie

Si le recours à la dimension est impossible ou difficile, il faut revenir à la définition de sous-espaces supplémentaires, c'est-à-dire : pour montrer que $E = F \oplus G$, il suffit de montrer que tout vecteur $\vec{x} \in E$ s'écrit de manière *unique* sous la forme $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ avec $\vec{y} \in F$ et $\vec{z} \in G$. Pour cela, on procède par *analyse* et *synthèse* :

— **l'analyse** pour trouver quels sont les $\vec{y}$ et $\vec{z}$ qui *peuvent éventuellement* convenir : SI $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ avec $\vec{y} \in F$ et $\vec{z} \in G$, ALORS on a nécessairement $\vec{y} = \bigstar$ et $z = \spadesuit$ (ce qui prouve en même temps l'unicité de $\vec{y}$ et $\vec{z}$: il n'y a pas d'autre choix possible) ;

— **la synthèse** pour vérifier qu'effectivement, ces choix de $\vec{y}$ et $\vec{z}$ conviennent (ce qui prouve l'existence).

La synthèse ne nécessite pas de conseil particulier : on vérifie que $\vec{y} + \vec{z} = \vec{x}$, ce qui est trivial, puis que $\vec{y} \in F$ et $\vec{z} \in G$. Cette vérification dépend du contexte.

L'analyse est la partie la plus délicate, parce que vous avez deux inconnues à déterminer ($\vec{y}$ et $\vec{z}$) pour une seule équation ($\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$). Heureusement, dès que vous avez déterminé l'une des deux inconnues, disons $\vec{y}$, alors vous avez automatiquement déterminé l'autre aussi, en écrivant simplement : $\vec{z} = \vec{x} - \vec{y}$. La difficulté se résume donc à savoir trouver soit $\vec{y}$, soit $\vec{z}$.

Pour ce faire, commencez d'abord par expliciter $\vec{y}$ et $\vec{z}$ autant que possible, grâce à leur appartenance à F et G (si les éléments de F et G sont suffisamment explicites, ce qui n'est pas toujours le cas). Ensuite, le principe est le même que dans la section 1 : **il faut produire autant d'équations que d'inconnues**. Puisqu'on a deux inconnues pour une seule équation, il faut donc produire **une** nouvelle équation vérifiée par $\vec{y}$ et $\vec{z}$ (et indépendante de la première, sinon on n'est guère avancé). Une opération convenable sur les lignes permet alors d'éliminer $\vec{y}$ ou $\vec{z}$, et d'expliciter une des deux inconnues.

Pour produire de nouvelles équations, regardez les identités vérifiées par $\vec{y}$ et $\vec{z}$ (toujours du fait d'appartenir à F et G), et faites subir une opération à l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$ afin de faire apparaître ces identités.

Par exemple, si $\vec{y}$ et $\vec{z}$ sont des fonctions dépendant d'une variable x, et qui vérifient une propriété particulière quand on change x en $-x$, ou en x^2, etc., alors changez x en $-x$ (ou en x^2, etc.) dans l'égalité $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$; si leurs propriétés particulières font intervenir leurs dérivées, alors dérivez l'égalité, etc. Si ce sont des matrices vérifiant des propriétés particulières vis-à-vis de la transposée, alors transposez l'égalité ; de même si l'on remplace la transposition par une autre opération linéaire. On s'adapte au contexte.

Exemple 3. Soient E l'espace vectoriel des suites à valeurs réelles convergentes, $F \subseteq E$ le sous-espace des suites ayant une limite nulle, et enfin $G \subseteq E$ le sous-espace des suites constantes. Montrons : $E = F \oplus G$, par une analyse et synthèse (E est de dimension infinie, comme on le montre dans l'exercice 15, donc on ne peut pas procéder autrement).

Faisons l'analyse : soit $u = (u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, et soient $v = (v_n)_{n\geqslant 0} \in F$, $w = (w_n)_{n\geqslant 0} \in G$ telles que : $u = v + w$. Comme w est une suite constante, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = a$. Il est alors plus parlant d'écrire la chose ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + a$. Déterminer v et w revient à déterminer v_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et a. Conformément au conseil ci-dessus, je vais exploiter le fait que v appartienne à F (c'est-à-dire : vérifie $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$) en prenant la limite quand $n \to +\infty$ dans l'égalité précédente. Comme toutes les suites sont convergentes par définition de E, c'est possible, et on obtient alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n + \lim\limits_{n\to+\infty} a = 0 + a = a$. Ainsi, si l'on note ℓ la limite de u, cette égalité nous donne : $a = \ell$. On a déjà explicité $w = (a)_{n\geqslant 0} = (\ell)_{n\geqslant 0}$. On en déduit v en écrivant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - w_n = u_n - \ell$. L'analyse est terminée.

Exercice 14. Effectuer la synthèse pour achever cet exemple.

Exercice 15. Démontrer qu'effectivement, l'espace vectoriel F de cet exemple est de dimension infinie (et donc E aussi, vu que $F \subseteq E$), en vérifiant que pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, la famille :

$$\left(\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\geqslant 0}, \left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)_{n\geqslant 0}, \dots, \left(\frac{1}{(n+1)^k}\right)_{n\geqslant 0}\right)$$

est libre.

Exercice 16. Revoir dans votre cours de 1re année comment vous aviez démontré :

— que toute fonction réelle s'écrit comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire ;

— que toute matrice s'écrit comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique ;

et comparez avec les conseils donnés dans cette section.

Il n'est pas à exclure que vos opérations effectuées pour accroître le nombre d'équations fasse apparaître, en chemin, de nouvelles inconnues (dans l'exemple suivant, il apparaît la « nouvelle inconnue » y_2', en plus de y_1 et y_2). Dans ce cas, pas le choix : deux équations ne suffisent pas. Il faut poursuivre jusqu'à en avoir autant que d'inconnues (par contre, si le nombre d'inconnues ne « stagne » jamais, c'est que vous vous y prenez mal). C'est la vie.

Exemple 4. On note E l'espace vectoriel des applications y de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et vérifiant : $y^{(3)} = y$. Soient, aussi, F et G les sous-espaces vectoriels de E (vous vérifiez les inclusions dans E, je les admets) des applications vérifiant respectivement :

$$y' = y \text{ (pour } F), \quad \text{ et : } \quad y'' = -y' - y \text{ (pour } G).$$

On va démontrer : $E = F \oplus G$, par une analyse et synthèse. Soit $y \in E$, et soit $(y_1, y_2) \in F \times G$ tel que : $y = y_1 + y_2$. Suivant les conseils ci-dessus, j'augmente le nombre d'équations en dérivant cette égalité, de sorte à pouvoir utiliser le fait que $y_1' = y_1$ (vu que $y_1 \in F$). On obtient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & y_1 + y_2 \\ y' & = & y_1' + y_2' \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} y & = & y_1 + y_2 \\ y' & = & y_1 + y_2' \end{array}\right.$$

Problème : il apparaît une troisième inconnue y_2', donc deux équations ne suffisent pas. C'est la vie, mais ce n'est pas grave : on dérive à nouveau, ce qui permettra par ailleurs d'utiliser le fait que $y_2'' = -y_2' - y_2$ (vu que $y_2 \in G$). On obtient alors :

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & y_1 + y_2 \\ y' & = & y_1 + y_2' \\ y'' & = & y_1' + y_2'' \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} y & = & y_1 + y_2 \\ y' & = & y_1 + y_2' \\ y'' & = & y_1 - y_2 - y_2' \end{array}\right.$$

Cette fois-ci nous avons bien trois équations pour trois inconnues (y_1, y_2 et y_2') : on devrait pouvoir résoudre. Notez que déterminer y_2' ne nous intéresse pas : dès que l'on a réussi à trouver y_1 et y_2, on peut s'arrêter. Je résous ce système avec la méthode du pivot de Gauß :

$$\left\{\begin{array}{rclll} y & = & y_1 & +y_2 & \\ y' & = & y_1 & & +y_2' \\ y'' & = & y_1 & -y_2 & -y_2' \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rclll} y & = & y_1 & +y_2 & \\ y' + y'' & = & 2y_1 & -y_2 & \\ y'' & = & y_1 & -y_2 & -y_2' \end{array}\right. \quad (L_2 \leftarrow L_2 + L_3)$$

J'ai choisi d'éliminer y_2' dans la seconde équation, à l'aide de la troisième, de sorte que les deux premières équations ne fassent plus intervenir que y_1 et y_2, à savoir les deux inconnues qui m'intéressent réellement. L'opération $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$ permet alors d'obtenir $y_1 = \dfrac{y + y' + y''}{3}$, tandis que l'opération $L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2$ (ou plus simplement, écrire que $y_2 = y - y_1$) donne : $y_2 = \dfrac{2y - y' - y''}{3}$. L'analyse est terminée : on a trouvé les y_1 et y_2 convenant potentiellement.

Exercice 17. Effectuer la synthèse pour achever cet exemple.

3 Utilisation de la notion de dimension

La notion de dimension étant la plus importante de l'algèbre linéaire (et l'une des plus importantes des mathématiques en général), il serait vain d'en donner toutes les applications ici. J'ai choisi de me concentrer sur un aspect dont l'élève de PSI moyen n'a que rarement conscience, à savoir :

Comment la connaissance de la dimension d'un sous-espace vectoriel (qu'on cherche à déterminer) permet de l'expliciter ?

Nous sommes en général confrontés à des sous-espaces vectoriels « inconnus », et qu'on cherche à expliciter, lorsque nous cherchons les solutions d'une équation ; que ce soit :

— les solutions d'un système linéaire (ce qui se traduit par l'appartenance à un noyau, en vertu de l'équivalence : $AX = 0_{M_{n,1}(K)} \iff X \in \ker(A)$; or un noyau est bien un sous-espace vectoriel),

— les solutions d'une équation différentielle linéaire, ou d'une relation de récurrence linéaire ;

— l'ensemble des vecteurs orthogonaux à un ensemble donné (cela revient à déterminer l'orthogonal d'un ensemble, qui est un sous-espace vectoriel) ;

— etc.

Figure 1 – Calcul de la dimension d'un sous-espace « inconnu » à déterminer

Espaces supplémentaires $F \oplus G = E$:	$\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$	
Noyau et image :	$\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{im}(f)) = \dim(E)$	(théorème du rang)
Supplémentaire orthogonal :	$\dim\left(F^{\perp}\right) = \dim(E) - \dim(F)$	(espaces euclidiens)
Sous-espace propre E_λ :	$\dim(E_\lambda) \leqslant$ multiplicité de λ	(réduction)
(cas d'une valeur propre simple)	$\dim(E_\lambda) = 1$	(réduction)
(cas diagonalisable)	$\dim(E_\lambda) =$ multiplicité de λ	(réduction)
(cas diagonalisable)	$\sum\limits_{\lambda} \dim(E_\lambda) = \dim(E)$	(réduction)

Un autre cas de figure où l'on peut avoir besoin d'expliciter un sous-espace vectoriel inconnu, est lorsqu'on se demande si un objet mathématique de la forme « ★ » peut s'écrire sous la forme alternative « ♠ ». Cela revient en pratique à déterminer **l'image** d'une certaine application. Par exemple, si l'on se demande : « à quelle condition peut-on écrire un réel y sous la forme d'un carré ? », cela revient à se demander à quelle condition on peut écrire $y \in \mathbb{R}$ sous la forme $y = x^2$ avec $x \in \mathbb{R}$, et donc à quelle condition y appartient à l'image de l'application $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{cases}$ (attention au fait que là, f n'est pas linéaire, donc son image n'est *a priori* pas un espace vectoriel ; je voulais seulement illustrer mon propos sur un exemple familier).

Ainsi le problème formulé ci-dessus peut se poser dans des contextes variés, même s'il n'y paraît pas au premier abord. Pour le résoudre, on a principalement besoin de deux résultats vus en 1^re^ année :

1. Une famille de vecteurs de E, libre et de cardinal $\dim(E)$, est une base de E.
2. Si $F \subseteq E$ et $\dim(F) = \dim(E)$, alors : $F = E$.

L'usage de ces deux propositions est omniprésent. Nous illustrons l'utilisation de ces deux résultats dans les deux sections suivantes.

Mais avant cela, on peut se demander : comment est-il possible de connaître la dimension d'un espace s'il nous est inconnu ? Ne faut-il pas justement l'expliciter *d'abord* pour connaître sa dimension *ensuite* (grâce à une base) ?

En fait, la théorie de la dimension permet de formuler rigoureusement des « contraintes spatiales », qui « forcent » la dimension d'un sous-espace vectoriel (même inconnu) à être égale à un certain entier, si du moins l'on connaît explicitement un *autre* sous-espace vectoriel avec lequel il « partage le même espace ambiant » (par exemple : dans un espace vectoriel E de dimension 3, on ne peut pas « couvrir plus que trois directions » ; par conséquent, si un sous-espace F de E est « transversal à une droite », qui « compte déjà pour une direction », alors il ne peut pas « couvrir plus que deux autres directions », donc $\dim(F) \leqslant 2$; ce vocabulaire informel est justifié par les notions de somme directe et de supplémentaire d'un sous-espace vectoriel). Ainsi on peut connaître la dimension d'un espace inconnu par des moyens détournés. Les principales formules de votre cours qui le permettent sont dans la figure 1.

Par exemple, dans le cas où l'espace à déterminer est un orthogonal $F^{\perp}$, connaître F permet de connaître $\dim(F)$, et donc $\dim\left(F^{\perp}\right)$ grâce à la relation ci-dessus. De même pour les autres égalités.

3.1 ✓ Pour rapidement expliciter des bases

Ayez bien conscience qu'expliciter une base d'un sous-espace vectoriel F, c'est expliciter F. En effet, si l'on *sait* que F admet pour base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$, où les $\vec{e}_i$ sont connus, alors on sait aussi que tout vecteur $\vec{x}$ de F s'écrit sous la forme : $\vec{x} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{e}_n$, où les λ_i sont des scalaires : c'est par définition d'une famille génératrice (ce qu'est une base en particulier). Comme les $\vec{e_i}$ sont connus, il en est de même de tout $\vec{x} \in F$ grâce à cette égalité.

Par conséquent, dès qu'on a trouvé une base d'un sous-espace vectoriel, on a positivement répondu à la question de l'explicitation posée en début de section 3. Cette question peut donc se reformuler en :

Comment la connaissance de la dimension d'un sous-espace vectoriel (qu'on cherche à déterminer) peut-elle aider à en expliciter une base ?

Pour cela : disons que le sous-espace F qu'on veut déterminer est de dimension n. Il arrive « qu'à l'œil nu », ou en tâtonnant un peu (mais sans rien résoudre !), on trouve rapidement n vecteurs $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ linéairement indépendants qui appartiennent à F. C'est le cas si F est l'espace des solutions d'une équation ou d'un système d'équations, où l'on trouve rapidement des solutions avec de nombreuses coordonnées nulles. Les vecteurs trouvés sont indépendants si l'on évite des choix idiots. Alors, ayant trouvé une famille libre $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ de cardinal $n = \dim(F)$, on en déduit que c'est une base de F : c'est terminé !

Cas particulier de la dimension 1. Pour engendrer un espace vectoriel F de dimension 1, il suffit de prendre *n'importe quel vecteur non nul dans* F (ce qui est très visuel si l'on se souvient qu'un espace vectoriel de dimension 1 est une *droite*). En effet, une famille constituée d'un seul vecteur $(\vec{e})$ est libre dès qu'il est non nul : si $\lambda \in K$ vérifie $\lambda\vec{e} = \vec{0}$, alors $\vec{e} \neq \vec{0}$ implique nécessairement $\lambda = 0$, et la vérification de l'indépendance linéaire est terminée.

C'est donc un cas particulier très simple. En fait, il est souvent mobilisé pour montrer une égalité du type $\vec{x} = \lambda\vec{y}$ (par exemple lorsqu'on manipule deux fonctions f et g solutions de la même équation différentielle). On montre que $\vec{x}$ et $\vec{y}$ appartiennent à un certain espace vectoriel de dimension 1 : alors $(\vec{y})$ en forme une base (si $\vec{y} \neq \vec{0}$), de sorte qu'elle engendre F, et donc $\vec{x}$ en est combinaison linéaire.

Exemple 5. (base d'un noyau de matrice) Déterminons le noyau de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ avec le moins de calculs possibles. Pour cela, on note que A est de rang 1 (l'espace vectoriel engendré par les colonnes est de dimension 1, car elles sont toutes proportionnelles à $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$), donc d'après le théorème du rang on a : $\dim(\ker(A)) = 3 - 1 = 2$. Utilisons la connaissance de cette dimension pour déterminer $\ker(A)$ *sans résoudre* $AX = 0_{\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$ *en détails.*

Pour cela, on note que les colonnes de A vérifient $C_1 = C_2$ et $C_1 = C_3$, donc : $C_1 - C_2 = 0$, $C_1 - C_3 = 0$. On en déduit (comment ?) que $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont dans le noyau de A. Ils sont clairement linéairement indépendants, donc ils forment une famille libre de cardinal 2, dans un espace vectoriel de dimension 2. On en déduit que c'est une base de $\ker(A)$, et donc :

$$\ker(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

On aurait aussi pu utiliser le fait que $\ker(A) = \mathrm{im}(A)^{\perp}$ pour une matrice symétrique réelle (voir le cours de 2e année sur les espaces euclidiens). Ainsi on est ramené à chercher deux vecteurs indépendants et orthogonaux à $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exemple 6. (bases de sous-espaces propres, cas de valeurs propres simples) La détermination des sous-espaces propres des matrices compagnons est très rapide *via* la méthode de cette section, si l'on est dans le cas où des valeurs propres sont simples. Illustrons-le avec la matrice compagnon suivante : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculons d'abord ses valeurs propres : soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ 2 & -1 & x-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ x-1 & x & -1 \\ x-1 & -1 & x-2 \end{vmatrix} \quad (C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3) \quad = \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ 0 & x+1 & -1 \\ 0 & 0 & x-2 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \\ (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{matrix}$$

donc : $\chi_A = (X-1)(X+1)(X-2)$. On en déduit : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-1{,}1{,}2\}$, et les valeurs propres sont toutes simples. Cela nous enseigne plus particulièrement :

$$\dim(\ker(A - \mathrm{I}_3)) = \dim(\ker(A + \mathrm{I}_3)) = \dim(\ker(A - 2\mathrm{I}_3)) = 1.$$

Puisque chaque sous-espace propre est de dimension 1, un seul vecteur propre suffit à les engendrer. Or on vérifie que $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartient à $\ker(A - \mathrm{I}_3)$, en calculant directement AX_1 :

$$AX_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = X_1.$$

Puisque $AX_1 = X_1$, on a $X_1 \in \ker(A - \mathrm{I}_3)$. Or $X_1 \neq 0_{\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$, donc d'après la remarque ci-dessus X_1 suffit à engendrer $\ker(A - \mathrm{I}_3)$. On a bien : $\ker(A - \mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(X_1)$.

De même, on vérifie que $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartient à $\ker(A + \mathrm{I}_3)$:

$$AX_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -X_2.$$

Puisque $AX_2 = -X_2$, on a $X_2 \in \ker(A + \mathrm{I}_3)$ (pour comprendre comment j'ai « pu deviner » que ce choix de X_2 allait convenir, voir le dernier paragraphe de cet exemple). Or $X_2 \neq 0_{\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$, donc d'après la remarque ci-dessus X_2 suffit à engendrer $\ker(A + \mathrm{I}_3)$. On a : $\ker(A + \mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(X_2)$.

On vous laisse déterminer de même $\ker(A - 2\mathrm{I}_3)$ pour conclure, *sans avoir résolu le moindre système linéaire*, qu'on a :

$$\ker(A - \mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A + \mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \ \ker(A - 2\mathrm{I}_3) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right).$$

Plus généralement, c'est un exercice classique que si λ est une valeur propre d'une matrice compagnon d'ordre n, alors le sous-espace propre associé est de dimension 1, engendré par : $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}$. La démarche de cet exemple permet de le redémontrer très rapidement dans le cas d'une valeur propre simple. Par contre, en cas de valeur propre multiple, vous devez résoudre l'équation $AX = \lambda X$ pour le démontrer, car l'ordre de multiplicité de la valeur propre ne vous permet pas de conclure que le sous-espace propre associé est de dimension 1, et qu'un seul vecteur non nul suffit à l'engendrer.

Exemple 7. (bases de sous-espaces propres) Déterminons les sous-espaces propres de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 \\ 2 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}),$$

sans passer par des résolutions de systèmes linéaires. Pour cela, on note que $A+\mathrm{I}_n = \begin{pmatrix} 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 \\ 2 & \cdots & 2 & 2 \end{pmatrix}$ est de rang 1, donc d'après le théorème du rang : $\dim(\ker(A+\mathrm{I}_n)) = n-1$. On en déduit que -1 est valeur propre de A, et on connaît la dimension du sous-espace propre associé. Voyons comment cela peut nous permettre d'en déduire une base de $\ker(A+\mathrm{I}_n)$: en raisonnant un peu comme dans l'exemple 5, on trouve comme vecteurs dans ce noyau :

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \ldots, \ X_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ils sont échelonnés, donc linéairement indépendants. Ainsi la famille $(X_1, \ldots, X_{n-1})$ est dans $\ker(A+\mathrm{I}_n)$, libre, de cardinal $n-1 = \dim(\ker(A+\mathrm{I}_n))$, donc c'est une base de $\ker(A+\mathrm{I}_n)$. On a déterminé $\ker(A+\mathrm{I}_n) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((X_1, \ldots, X_{n-1}))$ sans résoudre de système linéaire.

De plus A est symétrique réelle, donc d'après le théorème spectral elle est diagonalisable, et ses sous-espaces propres sont orthogonaux deux à deux. On en déduit, pour des contraintes dimensionnelles (la somme des dimensions des sous-espaces propres égale n, or $\dim(\ker(A+\mathrm{I}_n)) = n-1$), que A admet au plus une seule autre valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$, et on a nécessairement : $\dim(\ker(A-\lambda\mathrm{I}_n)) = 1$. Un vecteur non nul suffit à l'engendrer ; pour le trouver (alors même qu'on ne connaît pas encore λ), on se souvient que l'orthogonalité des sous-espaces propres (et le fait qu'il n'y en ait que deux) implique : $\ker(A-\lambda\mathrm{I}_n) = \ker(A+\mathrm{I}_n)^{\perp} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((X_1, \ldots, X_{n-1}))^{\perp}$, donc un vecteur X appartient à $\ker(A-\lambda\mathrm{I}_n)$ si et seulement s'il est orthogonal à tous les X_i explicités ci-dessus. On voit sans effort que le vecteur $X_n = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est orthogonal à $X_1, \ldots, X_{n-1}$, donc il est non nul et appartient à $\ker(A-\lambda\mathrm{I}_n)$; comme c'est un espace de dimension 1, cela suffit pour l'engendrer, donc : $\ker(A-\lambda\mathrm{I}_n) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(X_n)$.

On a explicité des bases de tous les sous-espaces propres *sans passer par une résolution de système linéaire*. Si l'on veut expliciter λ, on note qu'il doit vérifier : $AX_n = \lambda X_n$. Or un calcul montre que : $AX_n = (2n-1)X_n$, donc : $\lambda = 2n-1$.

Exemple 8. (base d'un supplémentaire orthogonal) Déterminons le supplémentaire orthogonal (dans $\mathbb{R}^3$) de $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((1,2,3))$. Pour cela, on se souvient que : $\dim(F^{\perp}) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(F) = 3-1 = 2$, donc il suffit de trouver deux vecteurs linéairement indépendants de $F^{\perp}$ pour qu'ils en forment une base. Or on trouve facilement, à l'œil nu, que $(3,0,-1)$ et $(2,-1,0)$ sont orthogonaux à $(1,2,3)$ (qui engendre F), donc orthogonaux à F, et on en déduit qu'ils appartiennent à $F^{\perp}$. Ainsi $((3,0,-1),(2,-1,0))$ est une famille de $F^{\perp}$, libre car échelonnée, et de cardinal $2 = \dim\left(F^{\perp}\right)$: c'en est une base, et en particulier : $F^{\perp} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((3,0,-1),(2,-1,0))$. On a explicité $F^{\perp}$, *sans résoudre le moindre système linéaire.*

Exemple 9. (application en dimension 1**)** Nous avons expliqué plus haut comment les sous-espaces vectoriels de dimension 1 permettaient d'obtenir des égalités entre vecteurs, à peu de frais. Pour l'illustrer, nous allons redémontrer grâce à la théorie de la dimension que la fonction exponentielle vérifie : $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $e^{x+y} = e^x e^y$. Pour cela : fixons $y \in \mathbb{R}$, et remarquons que les fonctions $f : x \mapsto e^{x+y}$ et $g : x \mapsto e^x$ vérifient toutes les deux l'équation différentielle : $y' = y$ (la vérification est facile, faites-la). Or le cours de 1re année vous apprend que l'espace vectoriel des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 est de dimension 1, donc une seule solution non nulle suffit à l'engendrer. Par exemple g l'engendre, et on en déduit que toute autre solution est proportionnelle à g ; c'est en particulier le cas de f, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $f = \lambda g$. C'est-à-dire : $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{x+y} = \lambda e^x$. On détermine λ grâce à la valeur en $x = 0$: on a $e^y = \lambda e^0 = \lambda$. Donc finalement : $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{x+y} = e^y e^x$, ce qu'on voulait démontrer.

Des démonstrations du chapitre sur les équations différentielles utilisent également cette approche : pour résoudre une équation différentielle linéaire homogène du second ordre, il suffit de trouver deux solutions linéairement indépendantes (par exemple une solution développable en série entière, et une autre avec la méthode d'abaissement de l'ordre), car on sait que l'espace vectoriel des solutions de $y'' + ay' + by = 0$ est de dimension 2.

Remarque sur les systèmes fondamentaux de solutions des équations différentielles. Nous voyons dans le chapitre sur les équations différentielles comment cette stratégie permet de résoudre des équations différentielles linéaires d'ordre 2 : nous ne proposons donc pas d'exemple dans ce document. Mentionnons tout de même quelques conséquences utiles de la connaissance *a priori* de l'espace vectoriel des solutions d'une équation différentielle, pour détecter vos erreurs :

— puisque l'espace vectoriel des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 est de dimension 1, vous ne pouvez pas trouver deux solutions non proportionnelles d'une même équation différentielle $y' = ay$ (ce qui se produit lorsque vous utilisez la méthode d'abaissement de l'ordre pour résoudre une équation différentielle d'ordre 2, et que vous essayez de conclure en bluffant car vous échouez dans vos calculs) ;

— puisque l'espace vectoriel des solutions de $y'' + ay' + by = 0$ est de dimension 2, il n'est pas possible que vous ne trouviez qu'une fonction dans votre système fondamental de solutions : vous avez forcément fait une erreur.

3.2 Pour montrer des égalités entre sous-espaces

On rappelle le résultat suivant : si E et F sont deux espaces vectoriels tels que : $F \subseteq E$, alors on a : $\dim(F) = \dim(E) \iff F = E$. Dans cette section nous ne parlons que de l'implication directe, qui sert effectivement à expliciter un sous-espace inconnu F : il arrive qu'on parvienne à montrer par des manipulations élémentaires que l'espace inconnu F est inclus dans un espace vectoriel usuel E. Pour expliciter F, il suffirait alors de montrer l'inclusion réciproque, puisque $F \subseteq E$ et $E \subseteq F$ impliquent $F = E$ (ce qui explicite F vu que E est supposé connu). Mais si l'on parvient, en général grâce aux formules de la figure 1, à montrer que $\dim(F) = \dim(E)$, alors on a l'égalité $F = E$ **sans avoir à démontrer l'autre inclusion** $E \subseteq F$.

C'est très avantageux parce que l'une des deux inclusions peut être *très* difficile à démontrer. C'est le cas notamment si F est défini comme l'ensemble des vecteurs $\vec{x}$ tels qu'il existe $\bigstar$ vérifiant $\spadesuit$ (la propriété $\spadesuit$ dépendant de $\vec{x}$) : cela peut être délicat car, pour montrer cette existence, il faut en général *construire explicitement l'élément* $\bigstar$ *qui convient*, et fabriquer cet élément peut être difficile voire impossible si l'espace est trop abstrait (ou la condition $\spadesuit$ trop complexe).

Exemple 10. On pose :

$$F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(x \mapsto (\cos(x))^k\right)_{k\in[\![0,n]\!]}\right), \quad \text{et} : \quad G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((x \mapsto \cos(kx))_{k\in[\![0,n]\!]}\right).$$

Nous allons démontrer : $F = G$, avec une seule inclusion et l'égalité des dimensions.

Encore faut-il connaître les dimensions de F et G : je laisse de côté la démonstration que $\dim(F) = \dim(G) = n+1$, et je la renvoie à l'exercice 18 ci-dessous. Montrons qu'on a : $F \subseteq G$. Pour cela, il suffit de montrer que pour tout $\ell \in [\![0, n]\!]$, l'application $x \mapsto (\cos(x))^\ell$ appartient à G (un résultat de 1re année vous enseigne que $F \subseteq G$ si et seulement si tous les vecteurs d'une partie génératrice de F appartiennent à G), c'est-à-dire que pour tout $\ell \in [\![0, n]\!]$, l'application $x \mapsto (\cos(x))^\ell$ est une combinaison linéaire des applications $x \mapsto \cos(kx)$ avec $k \in [\![0, n]\!]$. Montrons-le par linéarisation de fonction trigonométrique : soit $\ell \in [\![0, n]\!]$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a, d'après les formules d'Euler et du binôme de Newton :

$$(\cos(x))^\ell = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^\ell = \frac{1}{2^\ell}\sum_{k=0}^{\ell}\binom{\ell}{k}\left(e^{ix}\right)^{\ell-k}\left(e^{-ix}\right)^k = \frac{1}{2^\ell}\sum_{k=0}^{\ell}\binom{\ell}{k}e^{i(\ell-2k)x}.$$

On prend la partie réelle dans cette égalité. Le membre de gauche reste inchangé, et dans celui de droite on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall k \in [\![0, \ell]\!]$, $\mathrm{Re}\left(e^{i(\ell-2k)x}\right) = \cos\left((\ell-2k)x\right)$. Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\cos(x))^\ell = \frac{1}{2^\ell}\sum_{k=0}^{\ell}\binom{\ell}{k}\cos\left((\ell-2k)x\right).$$

On a presque ce qu'on veut : encore faut-il s'assurer qu'on a bien $x \mapsto \cos\left((\ell-2k)x\right) \in G$, ce qui n'est pas clair si $\ell - 2k \notin [\![0, n]\!]$ au vu de la définition de G. Regardons à quelle condition on a bien $\ell - 2k \in [\![0, n]\!]$: si $k \in [\![0, \ell]\!]$, alors :

$$\ell - 2k \in [\![0, n]\!] \iff 0 \leqslant \ell - 2k \leqslant n \iff \frac{\ell - n}{2} \leqslant k \leqslant \frac{\ell}{2}.$$

Comme $\frac{\ell-n}{2} \leqslant 0$ et $0 \leqslant k$, la première inégalité est toujours vraie. Ainsi $\ell - 2k \in [\![0, n]\!]$ si et seulement si : $k \leqslant \frac{\ell}{2}$. Il semble donc que tous les cosinus de la somme ci-dessus ne soient pas dans G... On y remédie en transformant $x \mapsto \cos((\ell-2k)x)$ par parité lorsque $k > \frac{\ell}{2}$:

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\cos(x))^\ell &= \frac{1}{2^\ell}\sum_{0 \leqslant k \leqslant \frac{\ell}{2}}\binom{\ell}{k}\cos\left((\ell-2k)x\right) + \frac{1}{2^\ell}\sum_{\frac{\ell}{2} < k \leqslant \ell}\binom{\ell}{k}\cos\left((\ell-2k)x\right) \\ &= \frac{1}{2^\ell}\sum_{0 \leqslant k \leqslant \frac{\ell}{2}}\binom{\ell}{k}\cos\left((\ell-2k)x\right) + \frac{1}{2^\ell}\sum_{\frac{\ell}{2} < k \leqslant \ell}\binom{\ell}{k}\cos\left((2k-\ell)x\right).\end{aligned}$$

Tous les cosinus de la première somme appartiennent bien à G, d'après l'étude ci-dessus. Pour la seconde somme, on note que si : $\frac{\ell}{2} < k \leqslant \ell$, on a : $0 < 2k - \ell \leqslant \ell$, donc $x \mapsto \cos\left((2k-\ell)x\right) \in G$: on a donc bien écrit $x \mapsto (\cos(x))^\ell$ comme combinaison linéaire d'éléments de G, et on en déduit : $\forall \ell \in [\![0, n]\!]$, $x \mapsto (\cos(x))^\ell \in G$. Comme ces puissances de cosinus engendrent F, on a par linéarité : $F \subseteq G$. Or $\dim(F) = \dim(G) = n + 1$ comme c'est démontré dans l'exercice 18, donc : $F = G$.

Cette égalité entre sous-espaces vectoriels nous enseigne notamment, sans recourir à l'anti-linéarisation ni effectuer le moindre calcul, que $x \mapsto \cos(kx)$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de puissances de cosinus (puisque c'est un élément de $G = F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left(x \mapsto (\cos(x))^k\right)_{k \in [\![0,n]\!]}\right)$). Notez l'économie.

Exercice 18.

1. Démonstration que $\dim(F) = n + 1$. Posons : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_k(x) = (\cos(x))^k$.
   (a) Montrer que s'il existe $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que : $\sum\limits_{k=0}^{n} a_i f_k = 0$, alors le polynôme $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_i X^i$ admet pour racines tous les réels de $[-1,1]$.
   (b) En déduire que la famille $(f_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est libre. Conclure que $\dim(F) = n + 1$.
2. Démonstration que $\dim(G) = n + 1$. Posons : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_k(x) = \cos(kx)$.
   (a) Montrer que l'application $\delta : f \mapsto f''$ (qui, à une fonction, associe sa dérivée seconde) est un endomorphisme de G, et qu'on a : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\delta(g_k) = -k^2 g_k$.
   (b) En déduire, soit par récurrence sur n, soit en invoquant directement un résultat du chapitre de réduction, que la famille $(g_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est libre. Conclure que $\dim(G) = n + 1$.

Exercice 19. Refaire cet exemple, mais sans recours à la dimension, en montrant la double inclusion.

Listons des résultats de cours dont les démonstrations utilisent cette approche :

— cours de 1re année : si $f : E \to F$ est une application linéaire entre deux espaces vectoriels *de même dimension* (finie), alors : f est injective si et seulement si f est surjective (et donc bijective) ;

— cours de 1re année : pour que deux sous-espaces F et G d'un espace euclidien soient supplémentaires orthogonaux ($G = F^\perp$ et $F = G^\perp$), il suffit de montrer que $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$ et $F \perp G$;

— chapitre sur les espaces euclidiens : si f est autoadjoint, alors : $\ker(f) = (\mathrm{im}(f))^\perp$ et $(\ker(f))^\perp = \mathrm{im}(f)$.

Nous vous invitons à relire leurs démonstrations en ayant en tête les principes de cette section.

3.2.1 Cas particulier fréquent : l'image d'une application linéaire

Nous avons dit ci-dessus que l'inclusion $E \subseteq F$ est difficile à démontrer lorsque la définition des vecteurs de F fait intervenir le quantificateur « $\exists$ ». C'est en particulier le cas lorsque F est l'image d'une application linéaire f, puisque en effet on a par définition :

$$\mathrm{im}(f) = \{\vec{y} \in \cdots \mid \exists x \in \cdots\,,\ \vec{y} = f(\vec{x})\}\,.$$

Étant donné $\vec{y}$, comment *fabriquer* le vecteur $\vec{x}$ qui convient ? Même pour des applications linéaires f relativement simples, cette construction est difficile. Alors que dire si f est une application abstraite ?

La stratégie de la section précédente peut être profitable dans cette configuration : on montre que $\mathrm{im}(f)$ est inclus dans un espace classique E (en montrant concrètement qu'un élément de la forme $f(\vec{x}) \in \mathrm{im}(f)$ vérifie la condition pour appartenir à E). C'est en général l'inclusion la plus abordable. **Grâce au théorème du rang**, on calcule la dimension de $\mathrm{im}(f)$ (il faut donc avoir explicité $\ker(f)$ avant ; l'idée étant que $\ker(f)$ est presque systématiquement plus facile à obtenir que $\mathrm{im}(f)$, vu que $\ker(f)$ revient seulement à résoudre une équation linéaire, et non à *construire* un objet vérifiant une certaine propriété), en espérant qu'elle vérifie : $\dim(\mathrm{im}(f)) = \dim(E)$. Ayant une inclusion et l'égalité des dimensions, on en déduit : $\mathrm{im}(f) = E$, **sans avoir eu à montrer que tout élément de E admet un antécédent par f.**

Pour avoir une idée de l'ensemble E auquel est égal $\mathrm{im}(f)$, commencez si besoin par calculer des valeurs explicites $f(\vec{x})$ avec des $\vec{x}$ EXPLICITES et SIMPLES. Regardez la propriété commune vérifiée par toutes les images que vous avez calculées, et prenez pour E un espace vectoriel usuel dont les vecteurs vérifient tous cette propriété.

Un choix intelligent est de prendre $\vec{x}$ dans une base de l'espace de départ de f : voyez dans l'exemple 12 en quoi cela accélère la vérification ultérieure de l'inclusion $\mathrm{im}(f) \subseteq E$.

Déterminer $\mathrm{im}(f)$:

1. Conjecturer un espace *simple* E (usuel) auquel $\mathrm{im}(f)$ est égal, en calculant $f(\vec{x})$ pour $\vec{x}$ explicite.
2. Montrer que $f(\vec{x}) \in E$ pour tout $\vec{x}$, et en déduire : $\mathrm{im}(f) \subseteq E$.
3. Calculer $\ker(f)$ pour en déduire $\dim(\mathrm{im}(f))$ grâce au théorème du rang. Si $\dim(\mathrm{im}(f)) = \dim(E)$, alors : $\mathrm{im}(f) = E$.

Sauf cas particuliers, cette stratégie n'est pas très utile pour un endomorphisme de K^n, car la méthode du pivot de Gauß permet aisément d'obtenir son noyau et son image en même temps (comment ?). Par contre elle nous rend bien service pour des applications linéaires définies sur (ou à valeurs dans) $\mathrm{M}_n(K)$, $K_n[X]$, etc., où les objets mathématiques sont plus complexes.

Exemple 11. (exemple dans $\mathrm{M}_n(K)$) Considérons l'endomorphisme $f : \begin{cases} \mathrm{M}_n(K) & \to & \mathrm{M}_n(K) \\ M & \mapsto & M + M^\top \end{cases}$, et cherchons son image. Si vous faites quelques essais avec $n = 2$ et des matrices explicites M (FAITES-LE VRAIMENT), vous constatez que $f(M)$ est systématiquement une matrice symétrique. Ainsi nous conjecturons, et allons démontrer *via* la stratégie de cette section, que : $\mathrm{im}(f) = \mathrm{S}_n(K)$.

Démonstration de l'inclusion $\mathrm{im}(f) \subseteq \mathrm{S}_n(K)$. Par définition, une matrice A de $\mathrm{S}_n(K)$ vérifie : $A^\top = A$. Pour montrer : $\mathrm{im}(f) \subseteq \mathrm{S}_n(K)$, il suffit donc de montrer que pour toute matrice $M \in \mathrm{M}_n(K)$, on a : $f(M) \in \mathrm{S}_n(K)$, c'est-à-dire : $f(M)^\top = f(M)$. C'est facile, puisque :

$$\forall M \in \mathrm{M}_n(K), \quad f(M)^\top = \left(M + M^\top\right)^\top = M^\top + \left(M^\top\right)^\top = M^\top + M = M + M^\top = f(M),$$

ce qu'on voulait démontrer.

Démonstration de l'égalité entre dimensions. Comme indiqué, on détermine d'abord $\ker(f)$ (ce qui ne sera l'affaire que de quelques secondes), et on en déduit $\dim(\mathrm{im}(f))$ grâce au théorème du rang. Soit $M \in \mathrm{M}_n(K)$. On a : $f(M) = 0_{\mathrm{M}_n(K)}$, si et seulement si : $M^\top = -M$, si et seulement si : $M \in \mathrm{A}_n(K)$ (espace vectoriel des matrices antisymétriques). Donc : $\ker(f) = \mathrm{A}_n(K)$. Sa dimension est connue (et vous devez savoir la retrouver rapidement), et est égale à $\frac{n(n-1)}{2}$. On en déduit, par le théorème du rang :

$$\dim(\mathrm{im}(f)) = \dim(\mathrm{M}_n(K)) - \dim(\ker(f)) = n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n}{2}(2n-(n-1)) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Or on sait qu'on a : $\dim(\mathrm{S}_n(K)) = \frac{n(n+1)}{2}$. On a donc montré : $\dim(\mathrm{im}(f)) = \dim(\mathrm{S}_n(K))$, et : $\mathrm{im}(f) \subseteq \mathrm{S}_n(K)$, ce qui implique : $\mathrm{im}(f) = \mathrm{S}_n(K)$. D'où le résultat.

Exemple 12. (exemple dans $K[X]$) Cherchons l'image de l'endomorphisme :

$$f : \begin{cases} K_n[X] & \to & K_n[X] \\ P & \mapsto & nP - (X+1)P' \end{cases}.$$

Conformément au conseil ci-dessus, je vais conjecturer ce qu'est $\mathrm{im}(f)$ en calculant l'image par f de vecteurs simples de $K_n[X]$, en particulier égaux aux vecteurs de la base canonique $\left(X^k\right)_{0\leqslant k\leqslant n} = (1, X, \ldots, X^n)$. On a : $f(1) = n$, et :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad f\left(X^k\right) = nX^k - (X+1)kX^{k-1} = (n-k)X^k - kX^{k-1}.$$

Une lecture inattentive semblerait indiquer que $f\left(X^k\right)$ et X^k sont de même degré pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, ce qui permettrait par exemple de conjecturer que l'image de f est $K_n[X]$ (vu qu'on parcourrait des polynômes de tout degré inférieur ou égal à n : l'espace $K_n[X]$ est l'espace vectoriel usuel le plus simple qui les contiendrait tous). Mais en inspectant ce qu'on a démontré de plus près, on voit que pour $k = n$ on a : $f(X^n) = -nX^{n-1}$. On voit donc qu'on n'obtient jamais de polynôme de degré n : seulement de degré au plus $n-1$. On peut donc conjecturer raisonnablement que $\mathrm{im}(f) = K_{n-1}[X]$ (l'espace vectoriel usuel le plus simple contenant des polynômes de tout degré inférieur à $n-1$). Montrons-le.

Démonstration de l'inclusion $\mathrm{im}(f) \subseteq K_{n-1}[X]$. On l'a déjà presque montré pour les images par f des vecteurs de la base canonique : si $k = n$, alors $f(X^n) = -nX^{n-1} \in K_{n-1}[X]$, tandis que si $k \in [\![1, n-1]\!]$ alors $f\left(X^k\right) = (n-k)X^k - kX^{k-1}$ avec $n - k \neq 0$, donc $\deg\left(f\left(X^k\right)\right) = k \leqslant n-1$, ce qui veut dire : $f\left(X^k\right) \in K_{n-1}[X]$. De même pour $k = 0$, où c'est trivial. Ainsi, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, cette distinction de cas montre qu'on a : $f\left(X^k\right) \in K_{n-1}[X]$. On en déduit que l'image de f est incluse dans $K_{n-1}[X]$ par linéarité, puisque pour tout polynôme $P \in K_n[X]$, qu'on écrit sous la forme : $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on a :

$$f(P) = f\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k \underbrace{f\left(X^k\right)}_{\in K_{n-1}[X]} \in K_{n-1}[X],$$

l'espace vectoriel $K_{n-1}[X]$ étant stable par combinaison linéaire. Ceci montre : $\mathrm{im}(f) \subseteq K_{n-1}[X]$.

Démonstration de l'égalité entre dimensions. Déterminons $\ker(f)$, c'est-à-dire l'espace vectoriel des polynômes $P \in K_n[X]$ vérifiant : $f(P) = 0_{K_n[X]}$. Si P est un tel polynôme, alors son application polynomiale associée vérifie l'équation différentielle linéaire homogène du premier ordre :

$$\forall x \in]-1, +\infty[, \quad y'(x) - \frac{n}{x+1} y(x) = 0,$$

dont les solutions sont de la forme $x \mapsto \lambda e^{n\ln(x+1)} = \lambda(x+1)^n$ avec $\lambda \in K$. On en déduit que $P \in \ker(f)$ si et seulement s'il existe $\lambda \in K$ tel que : $\forall x \in]-1, +\infty[$, $P(x) = \lambda(x+1)^n$, si et seulement s'il existe $\lambda \in K$ tel que : $P = \lambda(X+1)^n$ ((pour la justification de la dernière équivalence, voir les principes du document *Raisonnements sur les racines*). Ainsi :

$$\ker(f) = \mathrm{Vect}_K\left((X+1)^n\right),$$

et on en déduit : $\dim(\ker(f)) = 1$. D'après le théorème du rang, on a donc :

$$\dim\left(\mathrm{im}(f)\right) = \dim\left(K_n[X]\right) - \dim\left(\ker(f)\right) = (n+1) - 1 = n.$$

Or : $n = \dim(K_{n-1}[X])$, donc : $\dim\left(\mathrm{im}(f)\right) = \dim\left(K_{n-1}[X]\right)$. On a de plus : $\mathrm{im}(f) \subseteq K_{n-1}[X]$, d'après ce qui précède, donc : $\mathrm{im}(f) = K_{n-1}[X]$.

Dans ce dernier exemple, nous vous laissons vous convaincre que l'inclusion réciproque est assez ardue à démontrer : il faudrait démontrer que pour tout $Q \in K_{n-1}[X]$, il existe $P \in K_n[X]$ tel que : $Q = f(P) = nP - (X+1)P'$. Cela reviendrait à résoudre une équation différentielle du 1er ordre avec second membre : c'est plus pénible.

4 À quoi servent les isomorphismes d'espaces vectoriels ?

4.1 Motivation

Un isomorphisme $f : E \to E'$ conserve toutes les propriétés imaginables relatives à la structure d'espace vectoriel :

— si $\mathcal{F}$ est une famille libre (ou génératrice, ou une base) de E, alors $f(\mathcal{F})$ est une famille libre (ou génératrice, ou une base) de E' (de même si c'est lié, mais là c'est valable pour toute application linéaire) ;

— si $F \subseteq E$ est un sous-espace de dimension k, alors $f(F) \subseteq E'$ est un sous-espace de dimension k ;

— si $g : E' \to F$ est une application linéaire de rang ℓ, alors $g \circ f : E \to F$ est une application linéaire de rang ℓ (de même si $g : F \to E$ et si l'on compose $f \circ g$) ;

— si $F \oplus G = E$, alors $f(F) \oplus f(G) = E'$;

— etc., cela marche avec TOUT ce qui concerne les espaces vectoriels (et toutes les réciproques sont vraies).

D'où le nom : un *isomorphisme* « conserve la forme » de l'espace de départ (*isos* : égal ; *morphê* : forme).

Exercice 20. Démontrer chacune de ces affirmations. Certaines sont dans votre cours de 1re année, sous une forme plus souple (par exemple il faut et il suffit d'être injectif pour préserver les familles libres) ; d'autres le sont implicitement, mais formulées avec des matrices.

Par conséquent, si on veut montrer qu'un objet (disons un vecteur $\vec{x}$ pour simplifier la discussion) vérifie une propriété $\mathcal{P}$, il revient au même de montrer que $f(\vec{x})$ vérifie $\mathcal{P}$. **Cette vérification est plus facile si $f(\vec{x})$ appartient à un espace vectoriel plus simple que celui de départ.** Par exemple, montrer qu'une famille est libre (ou une base) est en général problématique dans un espace de fonctions ; en revanche, montrer la même chose dans $\mathrm{M}_{n,1}(K)$ ou K^n est d'une banalité affligeante : on y parvient par une résolution de système linéaire, ou un calcul de déterminant. On a donc tout intérêt à trouver un isomorphisme entre un espace de fonctions et $\mathrm{M}_{n,1}(K)$ ou K^n, pour simplifier les démonstrations en les faisant dans ces espaces.

Exemple 13. Vous avez vu en 1re année que si E désigne l'ensemble des applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $y'' - 3y' + 2y = 0$, alors l'application $f : y \mapsto (y(0), y'(0))$ est un isomorphisme de E dans $\mathbb{R}^2$. Voyons comment utiliser cette donnée pour en déduire facilement la liberté de la famille de solutions $(y_1 : x \mapsto e^x, y_2 : x \mapsto e^{2x})$ (nous vous laissons vérifier que ces fonctions sont bien dans E). Pour cela, il suffit de démontrer que la famille $(f(y_1), f(y_2))$ est libre dans $\mathbb{R}^2$. Or $f(y_1) = (1{,}1)$ et $f(y_2) = (1{,}2)$ (faites le calcul), donc cette question revient simplement à démontrer que la famille $((1{,}1), (1{,}2))$ est libre : c'est immédiat, vu que ces deux vecteurs ne sont pas proportionnels. Ainsi (y_1, y_2) est libre.

Intérêt d'un isomorphisme f : heuristique

1. C'est un **dictionnaire** entre un espace vectoriel A « compliqué », et un espace vectoriel B « simple ».
2. De la sorte, il permet de remplacer un problème « difficile » (non résolu) dans A par un problème « facile » (résolu) dans B (en étudiant $f(\vec{x}) \in B$ plutôt que $\vec{x} \in A$).
3. L'espace vectoriel le plus simple de tous est K^n (ou $\mathrm{M}_{n,1}(K)$) : les meilleurs isomorphismes ont donc K^n ou $\mathrm{M}_{n,1}(K)$ comme espace de départ ou d'arrivée.

En particulier, le plus important à retenir pour un isomorphisme, ce n'est pas la correspondance : **ce sont les espaces qu'il relie !**

4.2 Un exemple d'utilisation : isomorphismes dans $K_n[X]$

Nous proposons deux autres illustrations des isomorphismes. Ces exemples permettront de mieux comprendre l'application en général.

Exemple 14. Les isomorphismes permettent de comprendre comment un polynôme P dépend de données qui le caractérisent. Expliquons cela sur un exemple : si $a_1, \dots, a_n$ sont n réels distincts, et si P est un polynôme de degré au plus $n-1$, alors $P(a_1), \dots, P(a_n)$ caractérisent P, au sens où il est le seul polynôme à prendre ces valeurs en les a_i. C'est-à-dire, si un polynôme Q de degré au plus $n-1$ vérifie :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad P(a_i) = Q(a_i),$$

alors $P = Q$ (on le démontre rapidement ainsi : la différence $P - Q$ est de degré au plus $n-1$, et admet n racines à savoir les a_i ; ce n'est possible que si $P - Q = 0$). Cela peut se reformuler en disant que l'application :

$$T : \begin{cases} K_{n-1}[X] & \to & K^n \\ \quad P & \mapsto & (P(a_1), \dots, P(a_n)) \end{cases}$$

est injective. Or elle est linéaire, et entre deux espaces vectoriels de même dimension : elle est donc bijective et c'est un *isomorphisme*. Voyons comment le fait que ce soit un isomorphisme nous est utile pour répondre à la question :

« De quelle manière P dépend de $P(a_1), \dots, P(a_n)$? »

L'idée de ce qui suit est : grâce à T, travailler avec P ou $T(P)$ est à peu près équivalent, car un isomorphisme conserve toutes les propriétés ; or le n-uplet $T(P) = (P(a_1), \dots, P(a_n))$ s'écrit tout à fait trivialement dans la base canonique de K^n. En prenant son image par T^{-1} pour revenir à P, nous parviendrons à écrire P en fonction des $P(a_i)$ et de l'image par T^{-1} de la base canonique de K^n. Cela fournira donc une écriture explicite de P à l'aide des $P(a_i)$ et de ladite base (à déterminer tout de même), répondant à la question ci-dessus. Voir la figure 2 pour une vue d'ensemble.

Si $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est la base canonique de K^n, alors :

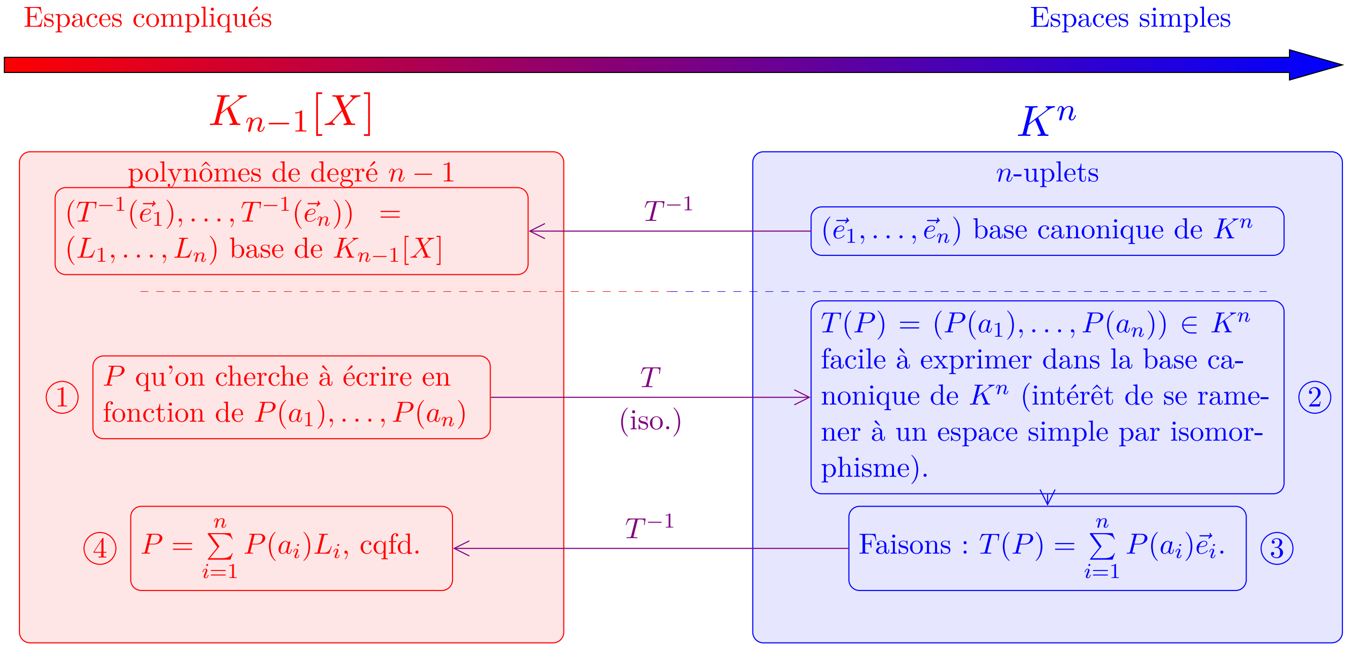
$$T(P) = (P(a_1), \dots, P(a_n)) = \sum_{i=1}^{n} P(a_i)\vec{e}_i.$$

On revient à P en appliquant T^{-1} à cette égalité, et on obtient :

$$P = T^{-1}(T(P)) = T^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} P(a_i)\vec{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(a_i) T^{-1}(\vec{e}_i).$$

Posons $L_i = T^{-1}(\vec{e}_i)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Il reste à expliciter les L_i pour avoir une dépendance explicite de P en les $P(a_i)$. Or les L_i vérifient $T(L_i) = \vec{e}_i$, c'est-à-dire :

FIGURE 2 – Utilisation de l'isomorphisme $T : P \mapsto (P(a_1), \dots, P(a_n))$ entre $K_{n-1}[X]$ et K^n : stratégie.



$(L_i(a_1), \dots, L_i(a_{i-1}), L_i(a_i), L_i(a_{i+1}), \dots, L_i(a_n)) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$. En identifiant coordonnée par coordonnée, cela revient à demander que $L_i(a_i) = 1$ et $L_i(a_j) = 0$ pour $j \in [\![1, n]\!] \setminus \{i\}$. Ce sont les polynômes d'interpolation de Lagrange ! Nous les avons explicités, en trouvant : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $L_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$.

On en déduit finalement :

$$P = \sum_{i=1}^{n} P(a_i) L_i = \sum_{i=1}^{n} P(a_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}.$$

Plus généralement, le fait qu'un polynôme soit entièrement caractérisé par certaines données se traduit souvent en disant qu'une certaine application (qui, à un polynôme P, associe ces données) est un isomorphisme. L'exemple le plus banal est qu'un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ est caractérisé par ses coefficients (ils le définissent de manière unique). Cela se traduit par le fait que $(a_0, \dots, a_n) \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ soit un isomorphisme de K^{n+1} dans $K_n[X]$. Ci-dessus, nous avons traduit le fait qu'un polynôme de degré au plus $n-1$ soit caractérisé par ses valeurs en au plus n points $a_1, \dots, a_n$, par l'isomorphisme $P \mapsto (P(a_1), \dots, P(a_n))$ de $K_{n-1}[X]$ dans K^n.

Alors, regarder l'image d'une base connue (si possible simple) d'un espace à l'autre permet d'exprimer le polynôme explicitement en fonction de ces données. Il suffit d'expliciter l'image de la base choisie.

Nous illustrons cette stratégie dans l'exercice suivant, où l'on utilise le fait que les valeurs d'un polynôme et de ses dérivées en un point suffisent à l'expliciter (encore par un argument sur le nombre de racines, avec multiplicités).

Exercice 21. Soit $a \in K$, et soit $f : K_n[X] \to K^{n+1}$ l'application linéaire définie pour tout $P \in K_n[X]$ par :

$$f(P) = (P(a), P'(a), \dots, P^{(n)}(a)) \in K^{n+1}.$$

1. Montrer que f est un isomorphisme, et déterminer l'image de la base canonique de K^{n+1} par f^{-1} : c'est une base de $K_n[X]$ qu'on note $\mathcal{B}$.

   N'oubliez pas qu'on peut interpréter en termes de racine multiple les annulations successives d'un polynôme et de ses dérivées.

2. Déterminer les coordonnées de tout polynôme $P \in K_n[X]$ dans la base $\mathcal{B}$, et en déduire la formule de Taylor :
$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k.$$

Plus généralement, si l'on veut formaliser cette stratégie :

Exercice 22. Soit $(n,k) \in \mathbb{N} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$, et soit f un isomorphisme de $K_n[X]$ dans K^k.

1. Expliquer pourquoi on a nécessairement $k = n+1$ (de sorte que f soit à valeurs dans K^{n+1}).
2. Soit $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n+1})$ une base de K^{n+1}. On pose : $\forall i \in [\![1, n+1]\!]$, $Q_i = f^{-1}(\vec{e}_i)$. Montrer que $(Q_1, \dots, Q_{n+1})$ est une base de $K_n[X]$, et que, si l'on note $f_i(P) \in K$ la i^{e} coordonnée dans la base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n+1})$ de $f(P)$ pour tout $P \in K_n[X]$ et tout $i \in [\![1, n+1]\!]$, alors on a : $\forall P \in K_n[X]$, $P = \sum\limits_{i=0}^{n} f_i(P) Q_i$.

Ainsi, dès que l'on connaît explicitement un isomorphisme f de $K_n[X]$ dans K^{n+1}, on en déduit une nouvelle formule de décomposition de P, en fonction des composantes de cet isomorphisme. Si f est construit de sorte à ce que ses composantes soient des données initiales sur nos polynômes, alors cet exercice explique comment explicitement écrire P à l'aide de ces données. C'est ce que nous avons illustré dans l'exemple et l'exercice ci-dessus, ainsi que dans celui ci-dessous.

Essayez, grâce à un isomorphisme, de trouver cette généralisation (simplifiée) de l'interpolation de Lagrange, nommée interpolation d'Hermite, et qui permet d'interpoler *en même temps* un polynôme ET ses dérivées.

Exercice 23. Soient a et b deux nombres complexes distincts.

1. Montrer que $f : P \mapsto (P(a), P'(a), P(b), P'(b))$ est un isomorphisme de $\mathbb{C}_3[X]$ dans $\mathbb{C}^4$.
2. Déterminer explicitement des polynômes $H_{1,a}, H_{2,a} \in \mathbb{C}_3[X]$ tels que :
$$H_{1,a}(a) = 1,\ H'_{1,a}(a) = H_{1,a}(b) = H'_{1,a}(b) = 0, \quad \text{et :} \quad H_{2,a}(a) = H_{2,a}(b) = H'_{2,a}(b) = 0,\ H'_{2,a}(a) = 1.$$
N'oubliez pas qu'on peut interpréter en termes de racine double les annulations successives d'un polynôme et de sa dérivée.
3. On construit de même des polynômes $H_{1,b}$ et $H_{2,b}$, en inversant les rôles de a et b ci-dessus. Montrer :
$$\forall P \in \mathbb{C}_3[X], \quad P = P(a)H_{1,a} + P'(a)H_{2,a} + P(b)H_{1,b} + P'(b)H_{2,b}.$$
4. Trouver un polynôme $P \in \mathbb{C}_3[X]$ tel que $P(0) = 1$, $P'(0) = 2$, $P(1) = 3$, $P'(1) = -4$.

4.3 Isomorphismes issus du théorème de Cauchy linéaire

Nous démontrons en 2[e] année que dans le cas d'un système différentiel homogène $Y' = AY$, dont on note H l'espace vectoriel des solutions, le théorème de Cauchy linéaire est exactement équivalent au fait que pour tout $t_0 \in I$, l'application :
$$\Phi_{t_0} : \begin{cases} H & \to & \mathrm{M}_{n,1}(K) \\ Y & \mapsto & Y(t_0) \end{cases}$$
soit un isomorphisme d'espaces vectoriels. C'est le seul isomorphisme à connaître lorsque nous étudions un système différentiel homogène $Y' = AY$.

Lorsque nous n'avons pas affaire à un système différentiel directement, mais à une équation différentielle scalaire : $y'' + ay' + by = 0$, dont on note S l'ensemble des solutions, alors un deuxième isomorphisme entre en jeu :

$$\Psi : \begin{cases} S & \to & H \\ y & \mapsto & \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} \end{cases},$$

où H est l'ensemble des solutions du système : $Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} Y$.

Nous discutons de leur sens et de leur utilisation.

4.3.1 Comment les retenir

Quand on demande de reconstituer ces isomorphismes dans des questions de cours, c'est souvent le festival : on parle de $t \mapsto Y(t)$ (qui n'est pas du tout définie sur S ni H), de $Y \mapsto Y' - AY$ (c'est tout sauf un isomorphisme vu qu'il a un noyau non trivial), ou que sais-je encore.

Pour les retenir, je pense qu'il est bon de comprendre **à quoi sert un isomorphisme**, comme énoncé en début de document : un isomorphisme $f : E \to E'$ conserve toutes les propriétés imaginables relatives à la structure d'espace vectoriel.

Pour retrouver un isomorphisme du cours sur les équations différentielles, c'est donc une très mauvaise idée de ne réfléchir que sur la correspondance $\bigstar \mapsto \spadesuit$ en faisant abstraction des espaces de départ et d'arrivée : c'est au contraire le plus important, puisque c'est ce qui nous explique quels problèmes peuvent être ramenés à quels autres problèmes plus simples (de la même manière que la première information que vous cherchez en achetant un dictionnaire bilingue, c'est quelles langues il relie : sans cela, ses entrées ne vous enseignent rien).

Cas des équations différentielles : pour retrouver l'isomorphisme à utiliser

1. Demandez-vous quelle équation différentielle vous étudiez : l'ensemble E de ses solutions fournit l'espace « difficile » (de départ de votre isomorphisme).
2. Demandez-vous à quel ensemble plus simple F vous voulez vous ramener, l'idéal étant de se ramener à $\mathrm{M}_{n,1}(K)$.
3. Demandez-vous quelle est la manière la plus naturelle de transformer un élément de E en un élément de F : si vous ne faites pas n'importe quoi, vous aurez retrouvé votre isomorphisme.

Ce sont les données du problème qui vous diront à quel problème vous ramener : si on vous demande de relier des solutions d'une équation différentielle scalaire, et d'un système différentiel, alors se ramener à $\mathrm{M}_{2,1}(K)$ n'est pas forcément le plus pertinent. Plus précisément :

1. Demandez-vous quelle équation différentielle vous étudiez (scalaire $y'' + ay' + by = 0$ ou matriciel $Y' = AY$, ou les deux ?).
2. Donnez un nom à l'espace des solutions, si l'énoncé n'a pas déjà fixé les notations (ici : S et H).
3. Regardez les deux espaces vectoriels dans la question à résoudre : si l'hypothèse ou le résultat à démontrer porte sur une famille de $\mathrm{M}_{2,1}(K)$, alors vous prenez comme espace **d'arrivée** $\mathrm{M}_{2,1}(K)$ (obligé pour celui-ci, il ne peut être celui de départ) ; ensuite vous prenez comme espace **de départ** l'espace des solutions de l'équation différentielle que vous étudiez. Donnez alors un nom à l'isomorphisme que vous cherchez et qui va d'un espace à l'autre (pour l'instant vous ne vous préoccupez pas de sa définition : seulement de son espace de départ et d'arrivée) ; disons que vous avez appelé F cet isomorphisme oublié.

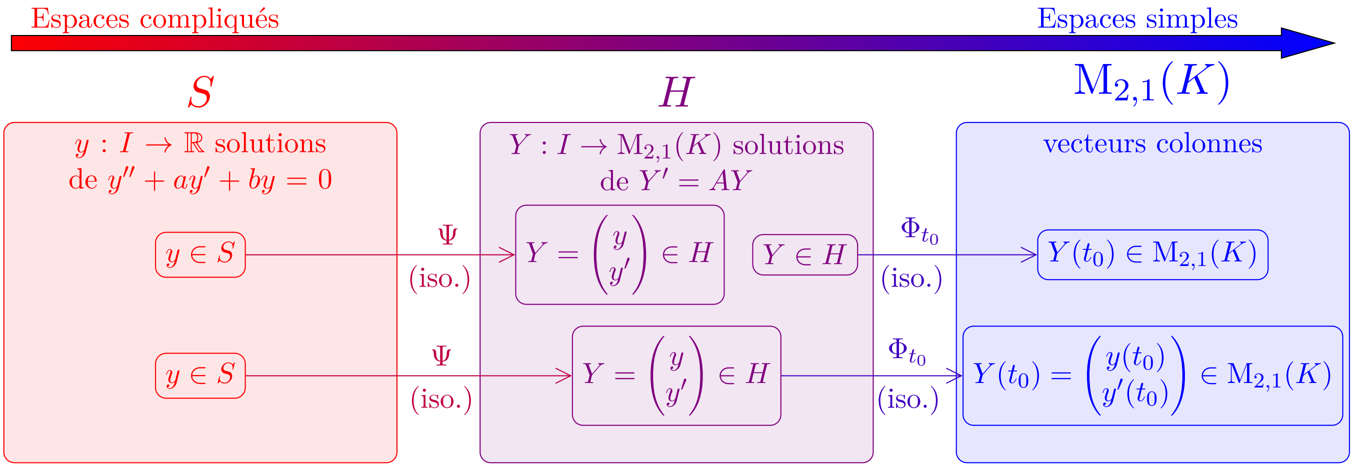
   S'il n'y a pas $\mathrm{M}_{2,1}(K)$ dans la partie, alors c'est que vous devez prendre comme espaces de départ et d'arrivée S et H (peu importe dans quel sens).

4. Ensuite, pour trouver la définition de F, si par exemple vous voulez un isomorphisme de S ou H dans $\mathrm{M}_{2,1}(K)$, pour la variable au départ vous l'appelez y ou Y selon que ce soit dans S ou H, et pour son image vous vous demandez : « comment, partant de S (ou de H), je peux faire pour obtenir un élément de $\mathrm{M}_{2,1}(K)$? » Question analogue si l'isomorphisme va de S dans H.

Exemple 15. Soit S l'espace vectoriel des solutions de $y'' + ay' + by = 0$, et H celui des solutions de $Y' = AY$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$. Si je veux un isomorphisme F de S dans H, j'appelle y la variable de départ, et je me demande « comment, partant de $y \in S$, je peux faire pour obtenir un élément de H ? » Mais ça, on l'a assez souvent fait : pour fabriquer un élément Y solution de $Y' = AY$ en partant de $y \in S$, on prend $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$. Ainsi l'isomorphisme cherché de S dans H est $F : y \mapsto \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$.

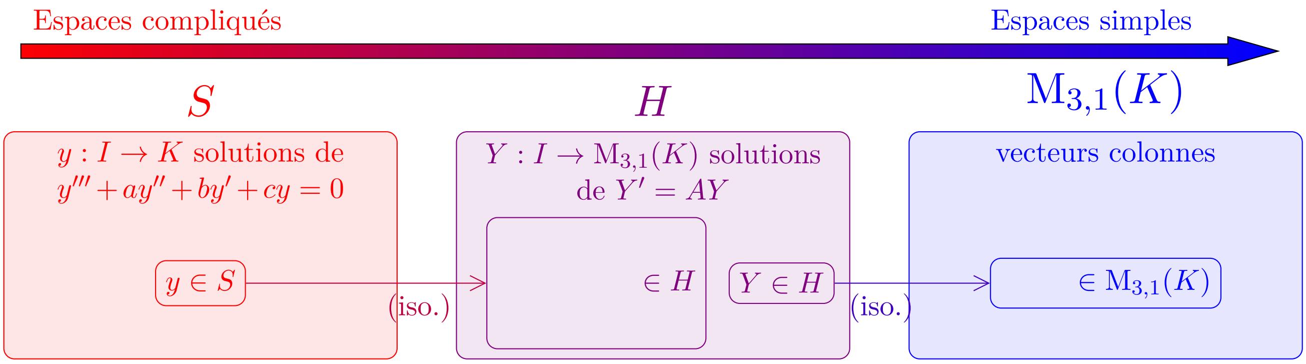
Par contre, si je veux un isomorphisme de S dans $\mathrm{M}_{2,1}(K)$, l'application ci-dessus ne convient pas : en effet $\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ n'est pas un vecteur colonne (mais une application à valeurs dans les vecteurs colonnes ; de l'éternelle nécessité de distinguer fonctions et évaluations de fonctions...). Toutefois $\begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ en est un pour tout $t \in I$: par conséquent l'application $F_t : y \mapsto \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ convient pour tout $t \in I$ (si les données de l'énoncé nous y invitent, par exemple si l'on s'intéresse à des conditions initiales en $t = 0$, on peut faire un choix plus spécifique de t).

FIGURE 3 – Les isomorphismes du cours sur les équations différentielles et les espaces qu'ils relient, du plus compliqué au plus simple.

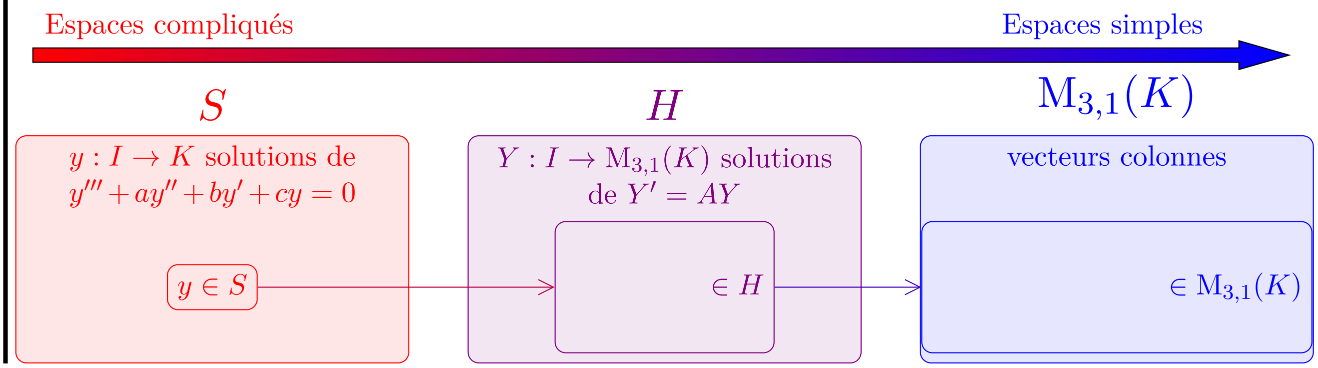


Exercice 24. Soient a, b et c trois applications continues sur I. On s'intéresse à l'espace vectoriel des applications $y : I \to K$ de classe C^3 et vérifiant : $y''' + ay'' + by' + cy = 0$.

1. Trouver un système différentiel $Y' = AY$ équivalent à l'équation différentielle ci-dessus.
2. Compléter les blancs de la figure ci-dessous, au regard des observations faites ci-dessus.



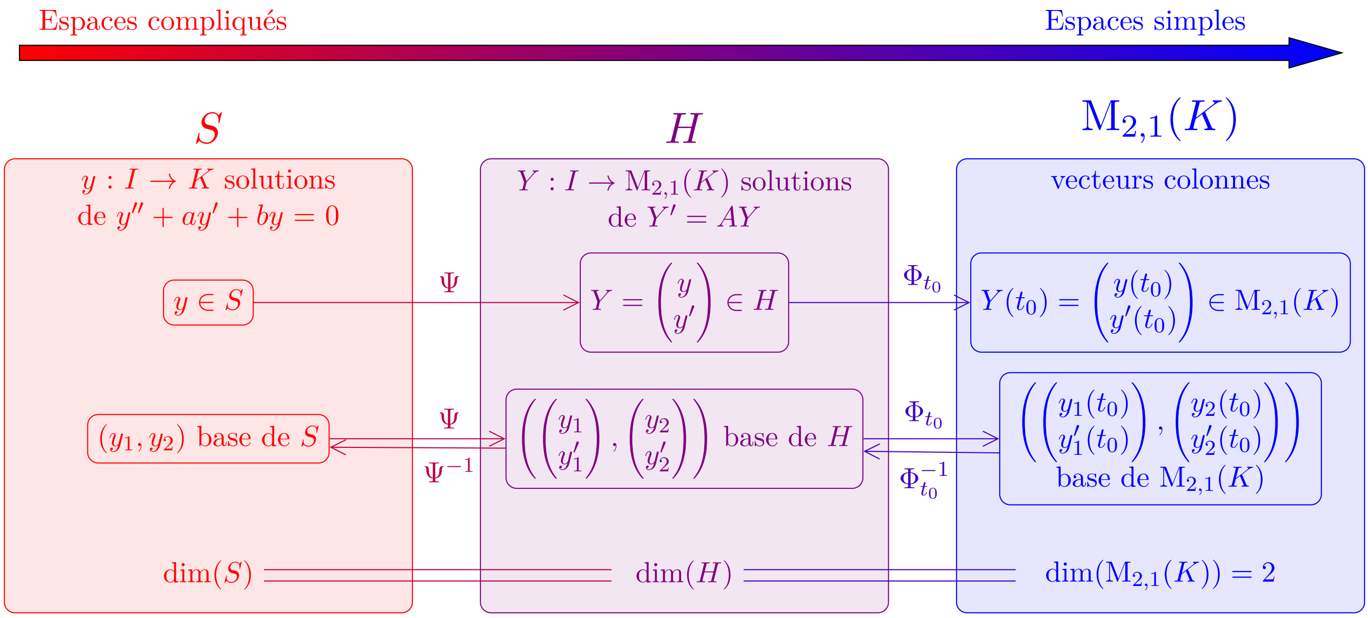
3. En faire de même, avec la composition des deux isomorphismes :



4.3.2 Comment les utiliser

Comme cela a été dit précédemment, un isomorphisme est utilisé pour ramener un espace « compliqué » (S ou H) à l'espace « simple » $\mathrm{M}_{n,1}(K)$ (dans lequel on sait tout résoudre : on connaît la dimension, on sait montrer la liberté des familles en résolvant des systèmes linéaires, etc.), l'intérêt étant qu'un isomorphisme conserve tout ce qui est relatif à la structure d'espace vectoriel. Par conséquent, si vous trouvez une base de l'espace « simple » $\mathrm{M}_{n,1}(K)$, vous en déduisez une base de l'espace « compliqué » S ou H (et inversement) en prenant son image par l'isomorphisme ; et de même pour toutes les autres notions de l'algèbre linéaire.

FIGURE 4 – Propriétés conservées par les isomorphismes de ce chapitre.



La figure 4 récapitule ce qu'on en déduit, dans le cours, des isomorphismes Φ_{t_0}, Ψ, et $\Phi_{t_0} \circ \Psi$:

— du fait qu'un isomorphisme conserve les dimensions, on déduit $\dim(H) = n$ et $\dim(S) = n$;

— du fait qu'un isomorphisme conserve les familles libres, on déduit qu'une famille $(Y_1, \ldots, Y_n)$ est un système fondamental de solutions si et seulement s'il existe $t_0 \in I$ tel que $(Y_1(t_0), \ldots, Y_n(t_0))$ soit une base $\mathrm{M}_{n,1}(K)$ (ce qu'on utilise plus tard pour déduire un système fondamental de solutions quand A est à coefficients constants et diagonalisable) ;

— du fait qu'un isomorphisme conserve les bases, on déduit que (y_1, y_2) est un système fondamental de solutions d'une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 si et seulement si $\left(\begin{pmatrix} y_1(t_0) \\ y_1'(t_0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2(t_0) \\ y_2'(t_0) \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathrm{M}_{2,1}(K)$ pour au moins une valeur de $t_0 \in I$ (ce qu'on sait tester très rapidement).

Plus généralement, on peut donc penser à les utiliser dès qu'on a par HYPOTHÈSE une propriété sur une famille dans S ou H (liberté ou base en général), et qu'on demande de MONTRER qu'on a la même propriété pour une famille dans $\mathrm{M}_{2,1}(K)$ (et inversement).

Comment utiliser les isomorphismes de ce chapitre

1. Pour déterminer la dimension d'un espace de solutions d'une équation différentielle linéaire scalaire : se ramener à $\mathrm{M}_{n,1}(K)$ en composant les isomorphismes.
2. Pour déduire une famille libre en partant d'un système fondamental, et inversement.

Dans le deuxième cas : l'implication $\Leftarrow$ est souvent utilisée dans l'étude du wronskien, et l'implication $\Rightarrow$ pour *montrer* qu'une famille de solutions est un système fondamental.

Exercice 25. Reprendre la figure 4 dans le cas d'une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 3. Que nous enseigne-t-elle sur la dimension de l'espace vectoriel des solutions de $y''' + ay'' + by' + cy = 0$?

Remarque. Je disais dans la section précédente que le plus important dans un isomorphisme, ce n'est pas sa définition par correspondance $\bigstar \mapsto \spadesuit$, mais ses espaces de départ et d'arrivée : le calcul de dimension rappelé ci-dessus l'illustre bien, puisqu'il ne nécessite absolument pas de savoir comment sont définis Ψ et Φ_{t_0} !

4.3.3 Utilisation de l'image d'une famille libre par un isomorphisme

Le résultat sur la liberté en tout réel est **très utile**. C'est celui-ci qui permet de montrer des choses subtiles à partir des informations sur des solutions. **Lorsque l'unicité du théorème de Cauchy sous sa forme classique est insuffisant, utiliser le fait que** $\left(\begin{pmatrix} f(t) \\ f'(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g(t) \\ g'(t) \end{pmatrix}\right)$ **(et non** $(f(t), g(t))$ **!) soit libre pour tout** t **si c'est un système fondamental de solutions** d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2, permet d'avoir des informations sur le comportement global des fonctions, à l'aide seulement d'informations locales (et inversement).

Exemple 16. Soient $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue sur $\mathbb{R}$, et (f, g) un système fondamental de solutions de l'équation différentielle : $y'' + qy = 0$. Montrons que f et g ne peuvent pas s'annuler en le même réel : il serait insuffisant d'invoquer l'unicité de la solution à un problème de Cauchy ici, puisque pour une équation différentielle d'ordre 2 il nous faut aussi une condition initiale sur la dérivée (ce que nous n'avons pas ici). Puisque c'est insuffisant, songeons au résultat rappelé ci-dessus : si f et g s'annulent en le même réel t_0, alors $f(t_0) = g(t_0) = 0$. Mais alors, la famille $\left(\begin{pmatrix} f(t_0) \\ f'(t_0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g(t_0) \\ g'(t_0) \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ f'(t_0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ g'(t_0) \end{pmatrix}\right)$ est clairement liée, donc (f, g) n'est pas un système fondamental de solutions : absurde.

Un autre argument serait que si f et g s'annulent en t_0, alors toute autre solution aussi, puisqu'elle est combinaison linéaire de f et g ; mais alors, les problèmes de Cauchy imposant une valeur non nulle en condition initiale n'auraient pas de solution. C'est absurde, puisque le théorème de Cauchy linéaire assure l'existence de solutions vérifiant n'importe quelle condition initiale prescrite.

☢ **Exercice 26.** Montrer que pour cette même équation différentielle, les zéros de f et g sont « entrelacés », c'est-à-dire : si a et b sont deux zéros consécutifs de f, alors il existe $t_0 \in]a, b[$ tel que : $g(t_0) = 0$. C'est plus difficile que dans l'exemple ci-dessus : considérer l'application $t \mapsto \begin{vmatrix} f(t) & g(t) \\ f'(t) & g'(t) \end{vmatrix}$, qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ si f et g forment un système fondamental de solutions (pourquoi ?).

5 Les hyperplans : équations et applications

5.1 Décrire un espace vectoriel par une équation, un vecteur normal, un produit scalaire

5.1.1 ✓ Expliciter une équation d'un hyperplan

Nous avons vu que tout hyperplan H d'un espace euclidien E peut être décrit par une équation, et qu'on écrit obtient cette équation en trouvant un vecteur normal. *Détaillons comment faire en pratique, si H n'est pas déjà défini par une condition de la forme « machin $= 0$ »* :

1. Si E n'est pas déjà muni d'un produit scalaire, en définir un.
   Le seul cas où vous n'avez pas de produit scalaire usuel, et où le choix est laissé à votre initiative, est le cas où $E = \mathbb{R}_n[X]$; ne vous compliquez pas la vie, évitez un produit scalaire avec intégrale et prenez celui défini comme somme des produits des coefficients : $\langle P, Q\rangle = \sum_{i=0}^{n} a_i b_i$ si $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ et $Q = \sum_{i=0}^{n} b_i X^i$.
2. Pour déterminer un vecteur normal $\vec{n} \in E$ de H, vous considérez une base (ou simplement famille génératrice) $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n-1})$, et résolvez le système d'équations $\langle \vec{n}, \vec{e}_i\rangle = 0$ où les inconnues sont les coordonnées de $\vec{n}$. Cela nous fournit $n-1$ équations pour n inconnues : après avoir échelonné, vous fixez la valeur du paramètre libre (le prenant égal à 1 par exemple) et vous en déduisez un vecteur normal $\vec{n}$.
3. Une équation de H est alors donnée par : $\forall \vec{x} \in E,\ \vec{x} \in H \iff \langle \vec{x}, \vec{n}\rangle = 0$. Si l'énoncé est plus formel, et parle de formes linéaires : H est le noyau de la forme linéaire $\vec{x} \mapsto \langle \vec{x}, \vec{n}\rangle$.

Il peut être nettement plus avantageux de montrer l'appartenance d'un vecteur à un hyperplan en vérifiant une équation, plutôt qu'en vérifiant s'il est combinaison linéaire des vecteurs d'une base de cet hyperplan. Par exemple, pour vérifier si $\vec{x} = (1{,}2{,}1)$ appartient au plan P engendré par $\vec{a} = (1{,}5, -2)$ et $\vec{b} = (3{,}9{,}1)$, regarder si $\vec{x}$ est combinaison linéaire de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est plus long que voir s'il vérifie l'équation du plan (qui est : $-23x + 7y + 6z = 0$).

5.1.2 ☢ Montrer une appartenance ou inclusion à un hyperplan en calculant un produit scalaire

Un intérêt de décrire un hyperplan H à l'aide d'un vecteur normal $\vec{n}$ est qu'ainsi, on diminue le nombre de paramètres pour le décrire. En particulier, si l'on veut montrer qu'un vecteur $\vec{x}$ appartient à H, on a seulement à vérifier si : $\langle \vec{x}, \vec{n}\rangle = 0$. C'est BEAUCOUP plus économique que de vérifier si $\vec{x}$ est une combinaison linéaire de $n-1$ vecteurs d'une base de H ! Principe qui apparaît déjà dans nos calculs de projections orthogonales sur des hyperplans.

Exemple 17. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0{,}1\}$. Montrons que tout hyperplan H de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ contient une matrice inversible.

Si vous raisonnez sur une base de $n^2 - 1$ matrices carrées engendrant H, en essayant de montrer qu'il existe nécessairement une combinaison linéaire de ces matrices qui est inversible (par exemple *via* un calcul de déterminant), alors votre approche est vouée à l'échec : vous ne savez rien de ces matrices, qui sont d'ailleurs bien trop nombreuses, pour en faire quoi que ce soit (sans compter que l'inversibilité d'une *somme* de matrices est un problème épineux). Par contre, comme suggéré plus haut, toute étude d'hyperplan peut se ramener par orthogonalité à une étude avec seulement un vecteur normal. Plus précisément, on sait qu'il existe un vecteur $N \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ tel que :

$$H = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(N)^{\perp} = \{M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid \langle M, N\rangle = 0\} = \left\{M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}({}^t M N) = 0\right\}.$$

Se demander si H contient une matrice inversible revient donc à la question suivante : existe-t-il une matrice inversible orthogonale à N ? C'est beaucoup plus simple à étudier, parce qu'on s'est ramené à UN SEUL vecteur, au lieu de $n^2 - 1$ qui engendrent H !

Voyons à quel point c'est simple sur quelques cas particuliers : si la trace de N est nulle, alors en prenant $M = \mathrm{I}_n$ on a : $\langle M, N\rangle = \mathrm{tr}({}^t\mathrm{I}_n N) = \mathrm{tr}(N) = 0$, donc $\mathrm{I}_n \in H$ et I_n est bien inversible. Ainsi H contient une matrice inversible si N est de trace nulle.

Si N est une matrice diagonale et de trace NON nulle, alors :

— soit elle a un seul coefficient diagonal non nul en i^{e} colonne : $N = a\mathrm{E}_{i,i}$, alors on vérifie facilement que la matrice :

$$M = \mathrm{I}_n - \mathrm{E}_{i,i} + \mathrm{E}_{i+1,i} + \mathrm{E}_{i-1,i} + \mathrm{E}_{i,i+1} + \mathrm{E}_{i,i-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & 1 & 0 & & \\ & & 1 & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible (calculer le déterminant en reconnaissant une matrice diagonale par blocs) et orthogonale à N ;

— soit elle admet au moins deux coefficients diagonaux non nuls, et dans ce cas la matrice diagonale $M = \mathrm{I}_n - \frac{\mathrm{tr}(N)}{\sqrt{\mathrm{tr}({}^tNN)}}N$ est inversible et orthogonale à N (pourquoi pouvait-on penser à ce choix, en ayant en tête une méthode classique du cours ? pourquoi cette matrice n'aurait pas convenu pour le cas particulier précédent ?).

Nous donnons en exercice le moyen d'achever la démonstration de ce résultat.

Exercice 27. On suppose que la trace de N est non nulle, et que N N'est PAS une matrice diagonale. Montrer que pour un choix convenable de $x \in \mathbb{R}$ et $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, la matrice $M = \mathrm{I}_n + x\mathrm{E}_{i,j}$ est orthogonale à N et inversible. Conclure.

5.2 ☢ Un intérêt : se ramener à un espace plus petit ou raisonner par récurrence

On rappelle que si H est un hyperplan d'un espace vectoriel E de dimension finie (même sans produit scalaire), alors il suffit de « rajouter un vecteur » à H pour obtenir E. Plus précisément :

$$\forall \vec{a} \in E \setminus H, \quad E = H \oplus \mathrm{Vect}(\vec{a}).$$

Si, de plus, nous avons un produit scalaire sur E, alors en général nous prenons pour $\vec{a}$ un vecteur normal de H.

Comme on le voit, de H à E il n'y a pas une grande différence. Ainsi, si l'on est capable, grâce aux hypothèses d'un exercice, de savoir démontrer un résultat sur un hyperplan H, il suffit de vérifier ce même résultat sur $\vec{a}$ pour en déduire le résultat sur E tout entier.

Un raisonnement proche est de répéter le processus de se ramener à des hyperplans (si c'est possible), jusqu'à se ramener à des droites (quand la dimension a tellement diminué qu'on s'est ramené à la dimension 1). Il est plus soigné de rédiger une récurrence sur la dimension dans ce cas :

Exercice 28. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n.

1. Deux résultats préliminaires.
   (a) Montrer que si f laisse stable toute droite, alors f est une homothétie (*indication : montrer que toute base est une base de vecteurs propres ; puis, si* $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ *est une base de* E*, utiliser le fait que* $\vec{e}_1 + \cdots + \vec{e}_n$ *soit aussi un vecteur propre pour montrer que les* $\vec{e}_i$ *sont associés à la même valeur propre*).
   (b) Montrer que si F et G sont deux sous-espaces stables par f, alors $F \cap G$ est stable par f.
2. On suppose que f laisse stable tout hyperplan de E. Montrer que f laisse aussi stable tout sous-espace vectoriel de dimension $n-2$, et en déduire (en raisonnant par récurrence sur la dimension des sous-espaces stables) que f est une homothétie.

Table des matières