Présentation des chapitres de mathématiques de MP

Topologie des espaces vectoriels normés

1 Faire de l'analyse en dimension supérieure

L'objectif du chapitre est de fournir un bon cadre théorique pour faire de l'analyse dans d'autres espaces que $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (sachant que même l'analyse dans $\mathbb{C}$ est très restreinte en MPSI : elle n'apparaît que dans les ensembles *d'arrivée* des fonctions que vous étudiiez jusqu'à présent).

Le point de départ de l'analyse est la notion de taille (je parlerai aussi, indifféremment, de longueur) ou de distance : d'abord pour parler de suite ou fonction bornée (ce qui n'est pas la plus subtile des notions de l'analyse, certes), mais surtout pour parler de limite : pour dire qu'on se « rapproche indéfiniment » d'un point, ou qu'on devient « arbitrairement grand » dans le cas d'une limite infinie, encore faut-il définir ce qu'est la *proximité* à un point, ce qu'est être arbitrairement grand ou petit. Une fois qu'on a défini la notion de limite, toutes les autres notions de l'analyse s'ensuivent puisqu'elles sont souvent définies à l'aide d'une limite : continuité, dérivabilité, etc.

Ainsi, pour faire de l'analyse dans d'autres espaces vectoriels que $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, il faut pouvoir y définir la taille d'un vecteur. Vous avez déjà quelques objets qui le permettent : la notion de norme euclidienne d'un vecteur, d'abord (et très manipulée en Physique, plus particulièrement dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$), mais aussi la norme infinie d'une fonction, justement introduite dans le chapitre préliminaire pour définir la proximité entre deux fonctions, puis le fait qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers une fonction f. Plus généralement, on appelle *norme* sur un espace vectoriel E toute notion de taille qui permet de faire de l'analyse dans E.

Pour comprendre ce que doit vérifier une norme sur E pour accomplir ce que l'on souhaite (faire de l'analyse dans E), réfléchissons par analogie avec la valeur absolue sur $\mathbb{R}$, puisque c'est elle qui définit la taille d'un réel ou la proximité entre deux réels (la distance entre a et b est $|a-b|$). Elle vérifie les propriétés suivantes :

- elle est positive (chose naturelle pour une notion de longueur ou de distance !) ;
- seul zéro est de valeur absolue nulle, ce qui implique en particulier qu'il y a toujours une distance strictement positive entre deux réels *distincts* (vu que : $|a-b| = 0 \iff a = b$) ; en cela, on dit que la valeur absolue « sépare les points » ;
- elle vérifie l'inégalité triangulaire, ce qui implique concrètement une sorte de transitivité de la notion de proximité : si a est arbitrairement proche de b et b arbitrairement proche de c, alors a est arbitrairement proche de c (grâce à : $|a-c| \leqslant |a-b| + |b-c|$) ;
- elle est multiplicative : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $|ab| = |a|\cdot|b|$, ce qui assure que si $f(x)$ est « infiniment petit », alors $\lambda f(x)$ l'est aussi pour toute constante réelle λ (cette propriété est *utile*, mais pas *indispensable* pour faire de l'analyse).

Quand on regarde de près les démonstrations des résultats fondamentaux de l'analyse, seules ces propriétés de la valeur absolue interviennent :

Exercice 1. Revoir les démonstrations des résultats suivants (c'est encore mieux si vous savez les reproduire), et observer lesquelles des propriétés ci-dessus sont utilisées :

1. Si une suite converge, sa limite est unique.
2. Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ convergent vers ℓ_1 et ℓ_2 respectivement, alors pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ la suite $(au_n + bv_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $a\ell_1 + b\ell_2$.
3. Si une suite converge, alors elle est bornée.

Ainsi il est raisonnable de définir une norme $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ comme une fonction sur le K-espace vectoriel E vérifiant des propriétés analogues :

- la *positivité* : $\forall \vec{x} \in E$, $\|\vec{x}\| \geqslant 0$;
- la propriété de *séparation* des points : $\forall \vec{x} \in E$, $\|\vec{x}\| = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$ (qui implique aisément : $\forall (\vec{x},\vec{y}) \in E^2$, $\|\vec{x}-\vec{y}\| > 0 \iff \vec{x} \neq \vec{y}$, d'où la terminologie) ;

— l'*inégalité triangulaire* : $\forall(\vec{x},\vec{y}) \in E^2$, $\|\vec{x}+\vec{y}\| \leqslant \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$;
— la propriété d'*homogénéité* : $\forall(\lambda,\vec{x}) \in K \times E$, $\|\lambda\vec{x}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\|$.

Il y a en vérité quelques redondances dans cette définition (voir l'exercice ci-dessous) qui sont faites par confort, pour simplifier la manipulation d'une fonction qu'on nous présente déjà comme une norme.

Exercice 2. Soit $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ une application définie sur un K-espace vectoriel E.

1. Montrer que si $\|\cdot\|$ vérifie la propriété d'homogénéité, alors : « $\vec{x} = \vec{0} \Longrightarrow \|\vec{x}\| = 0$ » est vrai.
2. Montrer que si $\|\cdot\|$ vérifie l'inégalité triangulaire et la propriété d'homogénéité, alors elle est positive. On commencera par montrer :
   — $\forall\vec{x} \in E$, $\|\vec{x}\| = \|-\vec{x}\|$;
   — $\forall(\vec{x},\vec{y}) \in E^2$, $|\|\vec{x}\| - \|\vec{y}\|| \leqslant \|\vec{x}-\vec{y}\|$ (inégalité triangulaire renversée).

Une fois qu'un espace vectoriel E est muni d'une norme $\|\cdot\|$, on reprend toutes les définitions de l'analyse réelle en remplaçant les valeurs absolues de réels par des normes lorsqu'il y a des vecteurs, et le tour est joué. Par exemple, une suite $(\vec{u}_n)_{n\geqslant 0}$ à valeurs dans E converge vers $\vec{\ell} \in E$ si :

$$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\quad \left(n \geqslant N \Longrightarrow \left\|\vec{u}_n - \vec{\ell}\right\| \leqslant \varepsilon\right).$$

Exercice 3.

1. Avec ces définitions de norme et de convergence, vérifier que tous les résultats de l'exercice 1 restent valables dans un K-espace vectoriel E muni d'une norme $\|\cdot\|$ (on remplacera simplement $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ par $(a,b) \in K^2$, et on dira qu'une suite $(\vec{u}_n)_{n\geqslant 0}$ à valeurs dans E est bornée s'il existe $r \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|\vec{u}_n\| \leqslant r$).
2. Montrer que si $(\alpha_n)_{n\geqslant 0} \in K^{\mathbb{N}}$ et $(\vec{u}_n)_{n\geqslant 0} \in E^{\mathbb{N}}$ convergent, alors $(\alpha_n\vec{u}_n)_{n\geqslant 0}$ également.
3. Démontrer que si une suite converge, alors toutes ses suites extraites convergent la même limite.
4. Montrer que si $(\vec{u}_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $\vec{\ell}$, alors $(\|\vec{u}_n\|)_{n\geqslant 0}$ converge vers $\|\vec{\ell}\|$.

On définira ensuite la limite d'une fonction, la continuité en un point, le caractère lipschitzien, etc. La dérivabilité attendra (chapitres *Dérivation et intégration des fonctions vectorielles* et *Calcul différentiel*. Puisque nous manipulerons des fonctions qui ne sont pas de la variable réelle, nous aurons besoin de nouvelles fonctions continues de référence, desquelles découleront toutes les fonctions continues que nous manipulerons (par somme, composition, etc.). En particulier, nous donnerons des conditions suffisantes pour qu'une application linéaire ou multilinéaire soit continue.

Bien entendu, nous donnerons des exemples explicites de normes (et donc d'espaces vectoriels sur lesquels on peut faire de l'analyse). Cela inclut tous les espaces vectoriels de dimension finie (ainsi l'analyse matricielle reviendra en plusieurs endroits : voir par exemple l'exponentielle matricielle), mais aussi des espaces de fonctions, de polynômes, etc. Sur un même espace vectoriel E nous serons parfois amenés à définir plusieurs normes, certaines étant plus pratiques que d'autres selon les situations.

Exercice 4.

1. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pour tout $\vec{x} = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in K^n$, on pose :

$$\|\vec{x}\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_i|,\quad \|\vec{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_i|^2},\quad \|\vec{x}\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|.$$

   Vérifier que $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur K^n.

2. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a < b$. Soit $E = \mathrm{C}^0([a,b],K)$. Pour toute fonction $f \in E$, on pose :

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f|,\quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f|^2},\quad \|f\|_\infty = \sup_{[a,b]} |f|.$$

   Vérifier que $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur E.

La norme $\|\cdot\|_2$ sur K^n est essentielle quand on veut faire de la géométrie, mais sa racine carrée peut être embêtante dans les calculs : la norme $\|\cdot\|_1$ peut alors être préférable en cela, voire la norme $\|\cdot\|_\infty$ pour ne travailler qu'avec une seule coordonnée à la fois. On changera donc de choix de norme selon nos besoins !

2 Généraliser les intervalles, les segments, etc.

Pour les théorèmes de 1re année portant sur les fonctions de la variable réelle, le domaine de définition, de continuité, de dérivabilité, etc., joue souvent un rôle décisif :

— le théorème des bornes atteintes est faux si l'on remplace un segment par un intervalle non borné ou ouvert en une extrémité, de même pour le théorème de Heine ;

— les fonctions dérivables de dérivée nulle ne sont plus nécessairement constantes si l'on remplace un intervalle par une réunion disjointe d'intervalles (ou des parties de $\mathbb{R}$ encore moins régulières) ; de même pour le théorème des valeurs intermédiaires ;

— les extremums ne sont pas toujours en des points critiques si l'on remplace un intervalle ouvert par un segment ;

et ainsi de suite.

Exercice 5. Vérifier la justesse de ces affirmations à l'aide de contre-exemples dans chaque cas.

Si l'on veut généraliser les théorèmes de 1re année au cas des fonctions définies sur un espace vectoriel muni d'une norme, il faut donc aussi généraliser les notions de segment, d'intervalle ouvert, d'intervalle tout simplement, etc. C'est en comprenant quelles propriétés essentielles de ces ensembles sont utilisées dans les théorèmes de 1re année, que nous saurons trouver leurs analogues en dimension supérieure. Ainsi :

— pour généraliser la notion d'intervalle, nous proposerons la notion de parties *convexes* ou *connexes par arcs* ;

— pour généraliser la notion d'intervalle fermé, d'intervalle ouvert, nous définirons les parties *ouvertes* et *fermées* ;

— pour généraliser la notion de segment, nous définirons les parties *compactes* ;

— enfin, nous définirons les parties *denses* par analogie avec les parties denses de $\mathbb{R}$.

La plupart des théorèmes de 1re année auront alors leur analogue en dimension supérieure : le théorème des bornes atteintes est vrai en remplaçant les segments par des compacts ; le théorèmes des valeurs intermédiaires se généralise en remplaçant les intervalles par les parties connexes par arcs ; et ainsi de suite.

Si la notion de densité fut assez peu utilisée dans $\mathbb{R}$, elle fait preuve d'une efficacité remarquable dans d'autres contextes : c'est d'ailleurs par densité des fonctions en escalier que l'on définit l'intégrale d'une fonction continue par morceaux en 1re année. C'est-à-dire : 1° on définit l'intégrale d'une fonction en escalier, ce qui est facile puisque c'est simplement une somme d'aires de rectangles, 2° on montre que toute fonction f continue par morceaux sur un segment $[a, b]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier $(f_n)_{n\geqslant 0}$ (même si vous n'utilisiez pas le terme de « limite uniforme » à l'époque), 3° on définit l'intégrale de f comme la limite de la suite d'intégrales $\left(\int_a^b f_n\right)_{n\geqslant 0}$ (en s'assurant que cette limite existe). La clé du raisonnement est la densité des fonctions en escalier.

De même, nous pourrons montrer des identités en commençant par des cas particuliers « simples » et étendre ces identités par passage à la limite, à condition que ces objets « simples » forment une partie dense. Une situation typique est en algèbre linéaire, où nous verrons que les matrices inversibles forment une partie dense de l'ensemble des matrices : un certain nombre de propriétés peuvent alors se démontrer en supposant que les matrices sont inversibles, et en passant à la limite pour avoir le résultat pour toute matrice.

3 Cas particulier de la dimension finie

Suite aux explications de la section précédente, il y a deux questions légitimes qu'on peut se poser :

— est-on vraiment obligé de se compliquer la vie à ce point pour calculer des limites dans un espace vectoriel, alors qu'il semble y avoir bien plus intuitif (en tout cas en dimension finie) ? En effet, si l'on introduisait les suites suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \vec{u}_n = \left(\arctan(n), \frac{n+1}{n+2}, e^{-2n}\right), \quad A_n = \begin{pmatrix} \frac{2n+1}{n+3} & \frac{(-1)^n}{n} \\ e^{-n} & 5 \end{pmatrix},$$

beaucoup diraient sans hésiter que $(\vec{u}_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $\left(\frac{\pi}{2},1,0\right)$ et $(A_n)_{n\geqslant 0}$ vers $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, sans se casser la tête en introduisant une norme, etc. ;

— l'exercice 4 montre qu'il y a plusieurs normes possibles sur un espace vectoriel : mais si les différents résultats de l'analyse dépendent de la norme choisie, cela semble alourdir considérablement les raisonnements : imaginez que chaque étudiant ait sa propre norme préférée, et que chacun d'entre eux trouve des résultats analytiques différents à un exercice donné ! comment éviter ce problème ? faut-il fixer un choix de norme, quitte à perdre les avantages que peut avoir une norme ou l'autre selon les situations ?

Pour la première interrogation, il semble en effet que le calcul de limite « coordonnée par coordonnée » fonctionne :

Exercice 6. Vérifier, avec la norme de votre choix sur $\mathbb{R}^3$ ou $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, que les suites $(\vec{u}_n)_{n\geqslant 0}$ et $(A_n)_{n\geqslant 0}$ convergent effectivement vers les limites annoncées.

La deuxième question est légitime : on peut avoir des résultats différents selon la norme choisie :

Exercice 7. On pose : $E = \mathrm{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ l'application définie par $x \mapsto x^n$. La suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ est à valeurs dans E. Montrer qu'elle converge vers l'application identiquement nulle si E est muni de la norme $\|\cdot\|_1$, mais que ce n'est pas le cas si E est muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ (ces normes sont définies dans l'exercice 4).

Exercice 8. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose : $\|P\| = \sup\limits_{[0,1]} |P|$, et : $\|P\|' = \sup\limits_{[0,2]} |P|$.

1. Montrer que $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que la suite $(X^n)_{n\geqslant 0}$ est bornée pour $\|\cdot\|$ et ne l'est pas pour $\|\cdot\|'$ (nous avons défini ce qu'est une suite bornée dans l'exercice 3).

En fait, nous démontrerons un résultat remarquable : lorsque E est un espace vectoriel **réel ou complexe**, de dimension **FINIE**, tous les résultats analytiques sont les mêmes peu importe la norme choisie ! C'est un des théorèmes les plus importants de l'analyse. Il a de nombreuses conséquences, que nous ne citons pas exhaustivement ici :

— dans un exercice, on choisit la norme avec laquelle on est le plus à l'aise ;

— la plupart des résultats analytiques sont vrais si et seulement s'ils sont vrais coordonnée par coordonnée : avoir une limite, être borné, être continu, etc. ; et dans le cas où une suite ou une fonction admet une limite, elle s'obtient en prenant la limite de chaque coordonnée ;

— toutes les applications linéaires ou multilinéaires dont l'espace de départ est de dimension finie sont lipschitziennes donc continues.

En revanche, si l'on est dans un espace de fonctions ou de polynômes, il n'y a pas le choix. Nous devrons préciser avec quelle norme on travaille, et les résultats seront différents selon la norme choisie.

4 Résumé : objectif du chapitre

Nous définirons les normes sur des espaces vectoriels et les utiliserons pour généraliser toutes les définitions et propriétés de base de l'analyse, au cas des espaces vectoriels de dimension quelconque.

Pour discuter de continuité, nous aurons besoin de nouvelles fonctions continues de référence, et donnerons des critères pour obtenir la continuité d'applications linéaires ou multilinéaires.

Enfin, si l'on souhaite avoir des *théorèmes*, en particulier généraliser ceux de 1$^{\text{re}}$ année, nous devrons définir les analogues en toute dimension des intervalles, des segments, etc. Ce sera l'occasion d'introduire les parties fermées, ouvertes, compactes, connexes par arcs, etc.

En dimension finie, grâce au théorème des bornes atteintes, nous démontrerons l'important théorème selon lequel tous les résultats analytiques (continuité, caractère borné, etc.) ne dépendent pas de la norme choisie. Nous en déduirons que raisonner « coordonnée par coordonnée » suffit souvent à étudier les suites ou fonctions en dimension supérieure (mais finie). C'est très confortable puisque finalement, raisonner sur les coordonnées nous ramène à l'étude de suites ou fonctions réelles. Nous en déduirons aussi que toutes les applications linéaires et multilinéaires définies sur un espace vectoriel de dimension finie sont continues.

Les applications seront disséminées dans tous les chapitres de l'année : étude asymptotique des puissances d'une matrice, prolongement d'identités par densité, résolution d'équations différentielles mises sous forme matricielle, étude de séries à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie (et définition de l'exponentielle matricielle), etc. Le cas de la dérivabilité sera abordé plus en profondeur dans les chapitres *Dérivation et intégration des fonctions vectorielles* et *Calcul différentiel*.