Présentation des chapitres de mathématiques de MP

Séries numériques et familles sommables

1 Séries numériques

Les séries numériques ayant déjà été conséquemment abordées en 1re année, nous n'apporterons que quelques compléments.

En 1re année, lorsque vous utilisiez le théorème de comparaison des séries à termes positifs pour obtenir la nature d'une série, vous faisiez en général la comparaison au terme général d'une série de Riemann. Cela marche effectivement dans la majeure partie des cas, mais pas pour des séries sophistiquées telles que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{n^n}$ ou $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ (le problème est notamment la présence de la factorielle, dont l'étude asymptotique est compliquée). Nous donnons une règle plus adaptée pour l'étude de telles séries, et plus généralement de séries dont le terme général a une vitesse de croissance ou décroissance rapide (c'est-à-dire : géométrique) : la règle de D'Alembert.

C'est un théorème de comparaison déguisé (le déguisement tombe dans la démonstration), à des séries géométriques ; de comparaison *intelligente*, même. En effet, dans les deux exemples ci-dessus, on voit mal à quelles séries géométriques on les comparerait ; la règle de D'Alembert part de l'observation que si $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est une série à termes strictement positifs telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in \mathbb{R}_+,$$

alors : $u_{n+1} \approx \ell u_n$, ce qui est une relation *presque* géométrique de raison ℓ, donc on est tenté d'écrire : $u_n \approx c\ell^n$, avec $c \in \mathbb{R}_+$ (attention, cela n'a rien de correct, on ne donne qu'une heuristique). Or la série $\sum_{n\geqslant 0} \ell^n$ converge si et seulement si $\ell < 1$, donc on devrait s'attendre à ce que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge si et seulement si $\ell < 1$ également (nous omettons le cas où la limite est infinie : il est facile de montrer dans ce cas que la série diverge grossièrement). Il s'avère que ce raisonnement *pas rigoureux du tout*, après formalisation, nous montre que la conclusion est vraie !... Sauf dans le cas $\ell = 1$, où l'on ne peut pas conclure. En effet, comme 1 est le réel de démarcation entre la convergence et la divergence d'une série géométrique, l'approximation « presque géométrique de raison ℓ » est trop abusive pour permettre de conclure quand $\ell = 1$, selon que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ soit « au-dessus ou en dessous » de 1.

Exercice 1. Utiliser la règle de D'Alembert pour obtenir la nature de $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{n^n}$, $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ et $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2}{2^n}$.

Exercice 2. Vérifier grâce à plusieurs exemples que le cas $\ell = 1$ ne permet effectivement pas de conclure : la série peut aussi bien converger que diverger dans ce cas de figure.

Exercice 3. Rendre rigoureux le raisonnement informel ci-dessus, grâce à la définition de la limite, pour démontrer la règle de D'Alembert.

L'intérêt de la règle de D'Alembert réside aussi dans sa simplicité : le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ se simplifie considérablement quand u_n dépend de factorielles et de puissances. Mais son défaut est le cas d'incertitude $\ell = 1$.

Exercice 4.

1. Réétudier la nature des deux séries ci-dessus dont le terme général dépend de factorielles, mais cette fois-ci avec la formule de Stirling. Que pensez-vous de l'efficacité de chaque approche ?
2. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!}$.

Nous compléterons l'étude des séries numériques par des méthodes donnant des équivalents asymptotiques de sommes partielles ou de restes. L'une d'elles est la technique de comparaison série-intégrale (déjà vue en 1re année) :

Exercice 5.

1. Montrer, par une comparaison série-intégrale : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.
2. Montrer, par une comparaison série-intégrale : $\forall \alpha \in]-\infty,1[$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{-\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$. Que donne cette méthode lorsque $\alpha > 1$?
3. Soit $\alpha \in]1,+\infty[$. Trouver un équivalent asymptotique quand $n \to +\infty$ de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} k^{-\alpha}$. Que donne cette méthode lorsque $\alpha < 1$?
4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudier pour quelle valeur de α la méthode de comparaison série-intégrale permet d'obtenir un équivalent asymptotique quand $n \to +\infty$ de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(\ln(k))^{\alpha}}$. Même question avec $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(\ln(k))^{\alpha}}$ (sous réserve que la somme existe).

L'autre moyen proviendra d'un théorème de sommation des relations de comparaison : vous savez qu'en général, les équivalents ne sont pas compatibles avec les sommes. Néanmoins nous montrerons que pour des séries à termes POSITIFS et DIVERGENTES, il est possible de sommer des équivalents (et les autres relations de comparaison). En cas de séries convergentes, il en est de même avec les restes. Comme les suites sont des cas particuliers de séries *via* le lien suite-série, cette méthode permettra d'obtenir des équivalents de suites difficiles à étudier asymptotiquement par les méthodes habituelles.

2 Familles sommables

Dans la seconde partie de ce cours, nous chercherons à généraliser les sommes $\displaystyle\sum_{j\in J} x_j$ au cas où J n'est pas fini ni $\mathbb{N}$, le cas $J = \mathbb{N}$ correspondant au cas des séries (à quelques subtilités près, que j'aborde ci-bas). Une idée naïve est de « numéroter » les éléments de J au moyen d'une bijection $\varphi : \mathbb{N} \to J$ (cela revient bien à numéroter les éléments de J, en décrétant que $\varphi(n)$ est le n^{e} élément de J), afin de se ramener à la situation classique d'une somme indexée par les entiers naturels. On poserait alors, lorsque cela a un sens : $\displaystyle\sum_{j\in J} x_j = \sum_{n=0}^{+\infty} x_{\varphi(n)}$, ce que l'on sait étudier. Mais encore faut-il qu'il existe une telle bijection de $\mathbb{N}$ dans J : cela nous conduira à l'étude des ensembles *dénombrables* (ce sont les ensembles pour lesquels une telle bijection existe). Nous donnerons des exemples de référence d'ensembles qui sont dénombrables et d'ensembles qui ne le sont pas. Puis nous verrons que notre idée naïve est finalement pertinente, puisqu'il n'est pas possible d'obtenir une somme correctement définie (et ayant une valeur finie) autrement qu'avec un ensemble dénombrable.

Exercice 6. Nous vous recommandons de réfléchir de manière imagée dans un premier temps, pour traiter cet exercice. Ou encore : d'abord énumérez *naturellement*, puis réfléchissez ensuite à une bijection $\mathbb{N} \to J$ qui respecterait votre énumération.

1. Montrer que $\mathbb{N}$, $2\mathbb{N}$, $2\mathbb{N}+1$ et $\mathbb{N}\setminus\{0\}$ sont dénombrables. Plus généralement, montrer que toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est dénombrable.
2. Montrer que $\mathbb{Z}$ est dénombrable.
3. Montrer que $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ est dénombrable. C'est assez difficile d'écrire la bijection explicitement ici : il est déjà gratifiant de comprendre son principe sur la base d'une interprétation graphique des éléments de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

4. Montrer que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable (*indication : s'il existe une surjection f de $\mathbb{N}$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, considérer un antécédent par f de l'ensemble :* $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \notin f(x)\}$).
5. En déduire que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable non plus.

La solution trouvée n'est *a priori* pas totalement satisfaisante : comment s'assurer que la valeur de la somme $\sum_{j \in J} x_j$ ne dépend pas de la bijection choisie ? En fait, elle peut en dépendre, ce qui pose un gros problème de définition... Sauf si la série $\sum_{n \geqslant 0} x_{\varphi(n)}$ est absolument convergente (c'est ce qu'on appellera la *sommabilité* de la famille $(x_j)_{j \in J}$). Dans ce cas, peu importe la bijection $\varphi : \mathbb{N} \to J$ choisie, la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} x_{\varphi(n)}$ a toujours la même valeur et donc $\sum_{j \in J} x_j$ ne pose plus de problème d'interprétation.

Ce que nous disons ici ne sera pas exactement l'axe de réflexion choisi pour définir la somme de la famille $(x_j)_{j \in J}$, mais c'est équivalent. Pour démontrer avec plus d'aisance les différentes propriétés de ces sommes (l'objectif étant de s'assurer qu'elles peuvent se manipuler aussi agréablement que les sommes que vous avez manipulées jusqu'à aujourd'hui), nous introduirons une définition plus savante en termes de borne supérieure.

Nous donnerons alors différentes formules de calcul qui permettront de calculer ces sommes avec beaucoup de souplesse, et notamment de se ramener aisément à des sommes indexées par des entiers naturels, même sans avoir à construire de bijection φ (et tant mieux, car c'est parfois difficile : l'exercice ci-dessus vous en convaincra peut-être) :

— le théorème de sommation par paquets, qui autorise à sommer $\sum_{j \in J} x_j$ en regroupant d'abord des x_j dans des paquets plus petits et qui nous arrangent (par exemple, si $J = \mathbb{Z}$, en sommant d'abord les termes positifs d'une part et négatifs d'autre part, ou bien en sommant d'abord deux à deux les termes dont les indices sont opposés) ;

— le théorème de Fubini, permettant de calculer des sommes indexées par des couples d'entiers (ce théorème dit essentiellement : que pour calculer une somme double, on peut sommer d'abord en fixant un entier, puis l'autre, dans l'ordre qu'on veut) ;

— le produit de Cauchy.

Ainsi, sommer sur $\mathbb{Z}$ ou sur $\mathbb{N}^2$ n'aura plus de secret pour vous.

La grande philosophie, pour retenir les résultats sur ces sommes, sera : quand il y a positivité du terme général ou convergence absolue, tous les théorèmes s'appliquent et on somme comme on veut !