Présentation des chapitres de mathématiques de MP

Suites et séries de fonctions

Lorsque l'énoncé d'un exercice est accompagné du symbole « ✪ » dans la marge, cela signifie qu'il ne peut pas être traité avec toute la rigueur mathématique attendue tant qu'on est cantonné aux outils de MPSI (j'indique alors clairement ce qu'il est nécessaire d'admettre). Vous pourrez essayer de les traiter à nouveau, rigoureusement, au moment adéquat l'année prochaine.

On peut se demander quel est l'intérêt de traiter un exercice où l'on passe à côté de difficultés essentielles : ces exercices concernent majoritairement les *problèmes d'interversion.* Ils sont le cœur d'exercices souvent épineux parce qu'ils nécessitent des compétences variées : 1° la mémorisation ou compréhension d'énoncés aux hypothèses et conclusions nombreuses, qui se ressemblent beaucoup d'un énoncé à l'autre sans être exactement les mêmes ; 2° la reconnaissance d'une situation où on doit les appliquer ; 3° la maîtrise des majorations fines en analyse, 4° la maîtrise dans l'étude des convergences de séries et intégrales, 5° la maîtrise dans le calcul brut. Une solution à cela est de *diluer* ces difficultés. Avec ces exercices, vous aurez déjà une bonne pratique des points 2° et 5°, et vous pourrez vous consacrer pleinement aux points 1°, 3° et 4° durant l'année.

Pour résoudre de très nombreux problèmes mathématiques et physiques, on peut être amené à écrire des fonctions f sous la forme : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$, où f_n est, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une « fonction simple » (en général : une fonction puissance, une fraction rationnelle, une fonction trigonométrique...). Des exemples de telles décompositions sont :

— les développements en série de Fourier, qui ne sont pas au programme des mathématiques de MP malgré leur importance notable dans toutes les sciences dures (vous en croiserez en sciences physiques) :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin(x)| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2-1}, \quad \text{etc.}$$

— les développements en série entière, qui font l'objet du chapitre suivant (j'en reparlerai donc plus en détails en temps voulu) :
$$\forall x \in]-1,1[, \ \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad \forall x \in]-1,1], \ \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad \text{etc.}$$

— les développements eulériens et tant d'autres, que vous croiserez en devoir ou en exercice :
$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, \quad \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2x}{(\pi n)^2 - x^2}, \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{\tan(x)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{(\pi n)^2 - x^2}, \quad \text{etc.}$$

(On peut aussi écrire des fonctions comme *produit* de fonctions simples, mais nous ne parlerons pas ici des subtilités que cela implique, et n'en rencontrerons qu'à titre exceptionnel.)

Exercice 1.

1. Montrer l'identité : $\forall x \in]-1,1[, \ \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$. Deux pistes potentielles :
   — utiliser une formule de Taylor bien choisie ;
   — intégrer la relation : $\forall x \in]-1,1[, \ \frac{1-(-x)^{N+1}}{1+x} = \sum_{n=0}^{N} (-x)^n$, et passer à la limite en faisant attention aux subtilités que cela implique.
2. Trouver une identité analogue vérifiée par l'arc tangente.

Plus généralement, un certain nombre de fonctions sont définies à l'aide d'une suite de fonctions supposément plus simples et par passage à la limite : $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$. Cette idée est très lointaine (ainsi l'idée d'Archimède d'approcher un cercle par des polygones réguliers, dont le calcul d'aire est approché plus facilement par dichotomie, pour obtenir un bon encadrement de π), et elle apparaît aussi lorsque vous obtenez une intégrale comme limite d'une fonction de Riemann (cela peut être une définition, certes pas la plus souple, de l'intégrale d'une fonction continue). Les sommes ci-dessus rentrent dans ce cadre, puisqu'une somme à support infini est obtenue par passage à la limite à partir des sommes partielles.

On parle alors de *suite de fonctions* lorsqu'on étudie $(f_n)_{n\geqslant 0}$ et de *série de fonctions* lorsqu'on étudie $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$. Nous allons illustrer dans les trois sections suivantes l'intérêt de les étudier (je vais surtout puiser mes exemples dans les séries de fonctions, autant par sensibilité naturelle que parce que les applications me semblent plus directes et riches, si l'on accepte l'idée de taire provisoirement les subtilités). Nous verrons cependant qu'à chaque fois, il y a un vrai problème à savoir justifier rigoureusement, sans quoi toutes nos illustrations tombent à l'eau.

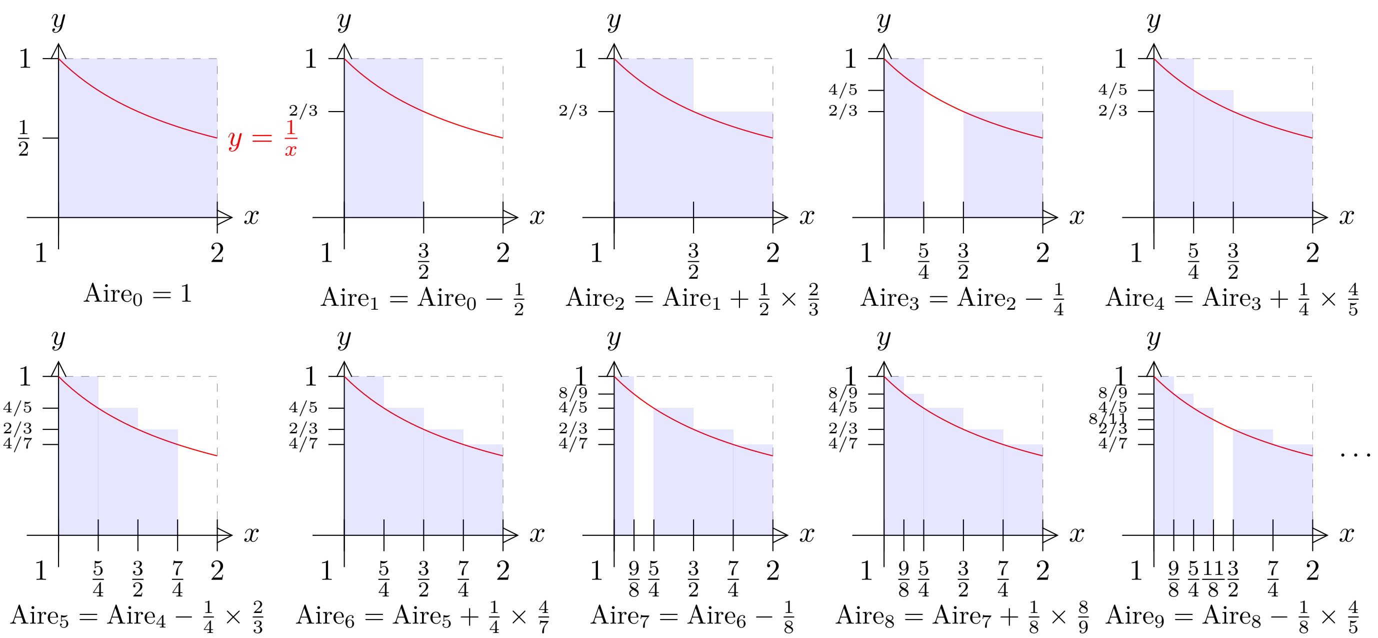
1 Pour le calcul de sommes non triviales

Plusieurs sommes difficiles d'accès ont été obtenues en partant de sommes dont la valeur est connue, en utilisant ensuite les opérations standards de l'analyse. Parfois, cela nécessite d'introduire une variable x là où il n'y en a pas. Supposons pour l'exemple que nous voulons obtenir les valeurs des sommes suivantes :

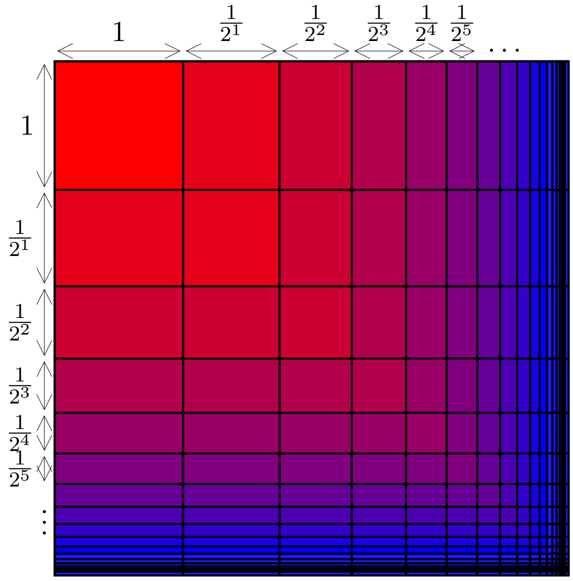
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}, \qquad \text{et :} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{2^n}.$$

Un peu de flair géométrique permet de conjecturer (voire démontrer, si l'on s'y prend bien) la valeur de ces deux sommes :

Exercice 2. Utiliser la figure ci-dessous pour conjecturer la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.



Exercice 3. À partir de la figure ci-dessous, conjecturer la valeur de : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{2^n}$.



Pour obtenir ces deux sommes, nous allons compliquer pour simplifier, c'est-à-dire : nous allons introduire une variable x et plutôt calculer :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}, \qquad \text{et :} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)x^n}{2^n}.$$

(D'autres choix pertinents seraient possibles, par exemple : $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n$). L'intérêt de compliquer *en apparence* la somme à calculer est qu'à présent, les opérations classiques de l'analyse (dériver, intégrer) nous permettent d'exprimer ces sommes inconnues à l'aide de sommes connues (essentiellement, à votre stade : une somme géométrique) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \int_0^x t^n \mathrm{d}t \overset{(*)}{=} \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^n \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t = \ln(1+x),$$

et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)x^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{n+1} \overset{(\dagger)}{=} 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1} = 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-\frac{x}{2}}-1\right) = \frac{1}{(1-\frac{x}{2})^2}.$$

En posant $x = 1$ dans chaque égalité, sous réserve que le raisonnement soit valable, on obtient les valeurs attendues avec beaucoup de facilité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2), \qquad \text{et :} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{2^n} = 4.$$

Cette idée peut être exploitée à l'infini : pourquoi se contenter d'intégrer ou dériver une seule fois une somme connue ? Il semble possible de le faire autant de fois qu'on le souhaite, et d'ainsi obtenir autant de nouvelles valeurs de sommes : à la fin de la MPSI, vous ne connaissiez que les sommes géométriques, télescopiques et exponentielles, mais ce procédé permet de gonfler indéfiniment le répertoire !

Exercice 4. Donner les valeurs des sommes suivantes en vous inspirant du raisonnement ci-dessus :

$$\text{(a)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{3^n}, \quad \text{(b)} \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+3}{n}\frac{1}{2^n}, \quad \text{(c)} \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+k}{n}\frac{1}{2^n} \ (k \in \mathbb{N}), \quad \text{(d)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1}\left(\frac{2}{3}\right)^{2n}.$$

On traitera cet exercice *sans se soucier de justifier la validité des opérations classiques de l'analyse.*

Exercice 5. On traitera cet exercice *sans se soucier de justifier la validité des opérations classiques de l'analyse.* Vous utiliserez à chaque fois une ou plusieurs des identités apparues dans le reste de cette section (vous les admettrez donc, en attendant de savoir les démontrer l'an prochain).

1. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}$. On vérifiera que la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ trouvée est correcte en calculant cette somme par une autre méthode (*passer par une décomposition en éléments simples*).
2. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$.
3. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4}$. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$ (vous pouvez essayer de changer l'exposant de n en n'importe quel exposant pair strictement positif).
4. Obtenir le « produit de Weierstraß » du sinus, dû à Euler (notez l'anachronisme) :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(x) = x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{(\pi n)^2}\right).$$
L'utiliser pour en déduire à nouveau la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ (c'est historiquement la première résolution du problème de Mengoli, par Euler).
5. Déduire de la question précédente une identité analogue vérifiée par le sinus hyperbolique. Puis, en combinant les écritures de $\sin(x)$ et $\mathrm{sh}(x)$ sous forme de produit, obtenir la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$ en suivant une inspiration analogue à celle de la question précédente. Si vous y parvenez : se demander ensuite pourquoi cette méthode ne permet pas d'obtenir la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

Il y eut cependant un gros manque de prudence dans ces raisonnements, outre l'existence des sommes en présence : est-ce que les *interversions de symboles* avec les égalités $(*)$ et $(\dagger)$ sont dûment justifiées ? Si les sommes n'avaient qu'un nombre fini de termes, bien sûr que oui. Mais les choses peuvent se gâter dans le cas contraire et nous l'illustrerons dans la section 4. → page 7

2 Pour résoudre un problème en le discrétisant

Plusieurs résolutions d'équations fonctionnelles (différentielles, intégrales, et d'autres encore) peuvent se faire par « réitération » de l'équation vérifiée par une fonction solution. Ce procédé fait naturellement apparaître une suite ou série de fonctions.

Prenons un exemple que vous connaissez bien. Supposons qu'on veuille démontrer l'existence d'une solution au problème de Cauchy suivant :
$$\left\{\begin{array}{rcl} y' & = & y, \\ y(0) & = & 1, \end{array}\right.$$
en n'ayant jamais entendu parler de la fonction exponentielle (et si possible expliciter une telle solution). On peut la déterminer pas à pas en remarquant d'abord que si l'on intègre la première égalité de 0 à un réel x, elle équivaut à :
$$\left\{\begin{array}{rcl} \forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) - y(0) & = & \int_0^x y(t)\mathrm{d}t, \\ y(0) & = & 1, \end{array}\right.$$
soit donc :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = 1 + \int_0^x y(t)\mathrm{d}t. \qquad (*)$$
Pour abréger, posons Y_0 l'application $x \mapsto \int_0^x y(t)\mathrm{d}t$, de sorte que l'on ait : $y = 1 + Y_0$. De même, dans ce qui suit, pour tout entier naturel n, nous définirons Y_{n+1} par récurrence comme l'unique primitive

de Y_n s'annulant en 0. En injectant cette expression de y dans « elle-même », on obtient dans un premier temps :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = 1 + \int_0^x (1 + Y_0(t))\,\mathrm{d}t = 1 + x + \int_0^x Y_0(t)\mathrm{d}t = 1 + x + Y_1(x).$$

On peut réinjecter cette expression dans $(*)$ pour obtenir :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = 1 + \int_0^x (1 + t + Y_1(t))\,\mathrm{d}t = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \int_0^x Y_1(t)\mathrm{d}t = 1 + x + \frac{x^2}{2} + Y_2(x).$$

Vous l'avez bien compris : je compte recommencer, autant de fois que nécessaire. On obtient successivement, comme vous le vérifierez aisément :

$$\begin{aligned}
\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2\cdot 3} + Y_3(x)\\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^4}{2\cdot 3\cdot 4} + Y_4(x)\\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^4}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{x^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + Y_5(x)\\
&\ \vdots\\
&= \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} + Y_N(x).
\end{aligned}$$

Il semble donc que, si l'on itérait ce raisonnement indéfiniment, on trouverait comme solution candidate : $\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. Que reconnaît-on ?!

Bien entendu l'approche ci-dessus souffre d'un grand manque de rigueur (les Y_n s'évaporent par passage à la limite ? au nom de quoi ?), mais elle permet tout de même d'illustrer pourquoi, lors de la résolution d'équations fonctionnelles, il apparaît naturellement des sommes de fonctions dont le support est infini.

Exercice 6. S'inspirer de ce raisonnement très informel pour conjecturer des solutions éventuelles des équations fonctionnelles suivantes :

$$\text{(a) } \forall x \in \mathbb{R}_+,\ y(x) = 1 + \int_0^x y\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t, \quad \text{(b) } \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ y(x+1) + y(x) &= \dfrac{1}{x^3},\\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} y(x) &= 0. \end{cases}$$

À ce stade-là, pour rendre rigoureuse la résolution ci-dessus, les possibilités sont nombreuses. L'une d'elles est de réciproquement vérifier que la fonction définie par $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ est dérivable et solution du problème de Cauchy :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \overset{(\dagger)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Cela marche ! Seulement la justesse de l'égalité $(\dagger)$ ne va pas du tout de soi, bien qu'on sache dériver une somme de fonctions dérivables aisément *tant qu'elle est à support fini*, et nous en parlerons amplement dans la section 4. Une autre est de plutôt étudier la suite définie par récurrence par : → page 7

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y_0(x) = 1, \qquad \text{et :} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ y_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x y_n(t)\mathrm{d}t.$$

Si vous y réfléchissez bien, c'est presque l'approche que j'ai suivie plus haut, mais bien mieux posée. Ainsi on est amené à étudier la suite $(y_n)_{n\geqslant 0}$ et son comportement quand $n \to +\infty$. Si elle converge vers une fonction y (en un sens à préciser), on a envie de penser que lorsqu'on prend la limite quand $n \to +\infty$ dans l'égalité ci-dessus, on en déduit que y vérifie $(*)$ comme attendu. Il se pose alors la question : est-ce bien convergent ? Si oui, peut-on passer à la limite dans l'intégrale ci-dessus ? (Question déjà abordée dans le chapitre *Intégration.*) Nous retrouvons des questionnements analogues à ceux suivant la première approche, et commençons à entrevoir les problématiques du chapitre, que nous synthétiserons plus bas.

3 Pour se ramener à des fonctions plus simples

Il est bien des situations où nous aimons décomposer un objet mathématique comme somme (dans un contexte de linéarité, sinon ce peut être autre chose) d'objets plus « simples », afin de faciliter l'étude du problème. C'est ainsi qu'en algèbre linéaire, on démontre un certain nombre de choses sur une base ou une partie génératrice, puis on étend le résultat à tout vecteur par linéarité.

On peut faire de même en analyse : écrire une fonction compliquée comme somme de fonctions plus simples (monômes, fractions rationnelles...) pour faciliter les calculs qui l'impliquent.

Exemple concret : si l'on souhaite calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t}\mathrm{d}t$ (on admet que cette intégrale a un sens, bien que le problème de définition en 0 et 1 doive vous interpeller : ce sera expliqué dans le cadre du chapitre d'intégration), on est bien embêté en se contentant de recourir aux techniques classiques (détermination d'une primitive, intégration par parties, changement de variable...). Ce qui rend cette intégrale pénible à évaluer est aussi bien la présence du logarithme (parce que la présence d'une fraction rationnelle) que du quotient (parce qu'un logarithme « seul », ou multiplié par un facteur polynomial à la rigueur, on saurait l'intégrer). Bref, nous avons là une fonction « compliquée ». Cependant, grâce à la somme géométrique :

$$\forall t \in]-1,1[, \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n,$$

nous pouvons éliminer le quotient ci-dessus et faire apparaître une somme de fonctions « simples » à intégrer :

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t}\mathrm{d}t = \int_0^1 \ln(t)\sum_{n=0}^{+\infty} t^n \mathrm{d}t \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 \ln(t)t^n\mathrm{d}t \overset{(\dagger)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2},$$

et on sait démontrer que cette dernière somme est égale à $\dfrac{\pi^2}{6}$ (j'affirme que même si l'on ne connaissait pas la valeur exacte de cette somme, ce serait un résultat malgré tout satisfaisant : pourquoi ?). On comprend là l'intérêt de s'être ramené à des fonctions plus simples, au sens où on sait les intégrer.

Exercice 7.

1. Justifier l'égalité (†).
   Il y a un problème de définition de l'intégrande en 0 *: on admettra que dans l'usage de vos techniques de calcul intégral, il suffit ici de remplacer les évaluations par des passages à la limite pour y remédier, ce qu'on justifiera proprement dans le chapitre d'intégration.*
2. Obtenir le même résultat final, mais en utilisant plutôt l'identité démontrée dans l'exercice 1 (page 1) et qu'on revoit sous une forme légèrement différente dans l'exercice 8.

En fait, en faisant cela nous suivons de près la façon de faire de nos anciens, pour qui il était très concret et naturel d'écrire ainsi les fonctions usuelles (se demander pourquoi c'était « concret »). D'autres exemples :

Exercice 8. On traitera cet exercice *sans se soucier de justifier la validité des opérations classiques de l'analyse.*

1. Utiliser l'identité : $\forall x \in]0,2[,\ \ln(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}$, pour démontrer « naturellement » qu'une primitive du logarithme sur $]0,2[$ est $x \mapsto x\ln(x) - x$, et que sa dérivée est $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.
2. Utiliser l'identité : $\forall x \in]-1,1[,\ \arctan(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, pour démontrer « naturellement » qu'une primitive de l'arc tangente sur $]-1,1[$ est $x \mapsto x\arctan(x) - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$.
3. Soit $k \in \mathbb{N}$. S'inspirer des deux questions précédentes pour déterminer une application F de classe C^k sur $]0,2[$, s'exprimant uniquement à l'aide du logarithme et de fonctions puissances, sans le signe intégrale, et telle que : $F^{(k)} = \ln$.

4 Un (très) gros problème se pose avec les sommes à support infini

Dans nos exemples et exercices des trois sections précédentes, nous avons à plusieurs reprises utilisé des identités du type :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}f_n}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x), \quad \sum_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n(x)\mathrm{d}x = \int_I\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x, \quad \sum_{n=0}^{+\infty}\lim_{x\to a}f_n(x) = \lim_{x\to a}\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x).$$

Puisqu'il s'agit à chaque fois d'une permutation de deux symboles ($\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}$ et $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, $\displaystyle\int_I$ ou $\displaystyle\lim_{x\to a}$), la justification rigoureuse de ces égalités est ce qu'on appelle un *problème d'interversion*. On parle de PROBLÈME parce que oui, il y en a un qui se pose ! Les contre-exemples sont même très faciles à produire, et tout peut arriver. Par exemple la fonction :

$$x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n^2x)}{n^2},$$

bien que définie sur $\mathbb{R}$ et de terme général dérivable pour tout entier n, n'a certainement pas pour dérivée $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\cos(n^2x)$ puisque c'est la somme d'une série qui diverge grossièrement en presque tout réel.

Exercice 9. Démontrer les deux affirmations ci-dessus (domaine de définition de la fonction, divergence grossière de la série).

Ci-dessus, nous n'avons pas contredit pour autant que la fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$. On peut trouver des exemples de sommes de fonctions dérivables qui ne sont dérivables en aucun point. Un exemple historiquement dû à Weierstraß est :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos(2^n\pi x)}{2^n}.$$

Démontrer que la fonction est continue partout est raisonnablement facile avec les outils de MP, mais la dérivabilité nulle part est un problème ardu (posé au concours des ENS en 2007).

Les autres interversions posent également problème. Nous en avons déjà parlé en intégration pour la seconde interversion (on va alors recycler un contre-exemple qui y était fourni), et vous vous en convaincrez aisément pour la troisième :

Exercice 10.

1. Utiliser la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\Big((n+1)x^{n+1} - nx^n\Big)$ pour montrer que l'interversion $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\int_I \bigstar = \int_I\sum_{n=0}^{+\infty}\bigstar$ est fausse en générale.

2. Utiliser la série géométrique $\sum_{n\geqslant 0} x^n$ pour montrer que l'interversion $\sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to a} \bigstar = \lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{+\infty} \bigstar$ est fausse en générale.

La question est de savoir : sous quelles hypothèses est-il possible d'intervertir les symboles $\sum_{n=0}^{+\infty}$ et $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, $\int_I$ ou $\lim_{x\to a}$? La question se pose également avec les suites de fonctions, auquel cas ce sont les interversions suivantes pour lesquelles on a besoin de théorèmes :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{d}f_n}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \lim_{n\to+\infty} f_n(x), \qquad \lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a} \lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$

J'ai mis de côté le cas de l'intégration, puisque la question a déjà été abordée dans le chapitre associé.

Une réponse à cette question s'appelle un *théorème d'interversion*. On verra que le moyen d'éviter les anomalies à l'origine des problèmes d'interversion reste le même que dans le cas de l'intégration : avoir des majorations uniformes. Dans le cas des séries de fonctions : pour s'assurer qu'une interversion est possible, il s'agira de faire des majorations uniformes du *reste*, puisque c'est la fonction qui mesure l'écart entre les sommes $\sum_{n=0}^{N} f_n$ (pour lesquelles toutes les opérations de l'analyse se passent bien) et les sommes $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ (pour lesquelles on *aimerait* que tout se passe bien). C'est en s'assurant que le reste $\sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n$ (ou la dérivée du reste, ou... cela dépend du contexte) est « petit » qu'on évite les aberrations en passant des sommes finies aux sommes infinies.

Nous serons plus précis en temps voulu.

5 Résumé : objectif du chapitre

Nous donnerons des théorèmes d'interversion sur les suites de fonctions (théorème de la double limite, théorème de passage à la limite sous la dérivée, extension aux fonctions de classe C^k : le cas des passages à la limite sous le signe intégrale est déjà traité), en insistant sur l'importance des hypothèses de convergence uniforme, et sur le rôle très singulier que jouent parfois les segments dans ces hypothèses (pour éviter les aberrations pouvant se produire aux extrémités de l'intervalle d'étude).

Nous introduirons ensuite la définition d'une *série* de fonctions, et étendrons la définition de convergence uniforme ou simple à ces séries (en disant simplement que cela équivaut au même mode de convergence mais pour les suites de leurs sommes partielles). Il sera alors possible d'obtenir des théorèmes d'interversion pour les séries de fonctions en appliquant les théorèmes sur les suites de fonctions à leurs sommes partielles.

Forts de tous ces résultats d'interversion, nous pourrons en application répondre à des questions telles que celles formulées dans les sections précédentes, à savoir : nous résoudrons des problèmes par approximation par des fonctions plus simples, ou par construction de sommes de séries de fonctions qui répondent naturellement aux problèmes posés.

Parmi les résultats généraux d'approximation, nous verrons que toute fonction continue sur un segment et à valeurs complexes est limite uniforme de fonctions polynomiales (théorème de Weierstraß), ce qui permet en substance le raisonnement suivant : si l'on sait démontrer un résultat pour toute application polynomiale, alors sous de bonnes hypothèses un passage à la limite permet d'obtenir le résultat pour toute fonction continue.