Présentation des chapitres de mathématiques de MP

Séries entières

Lorsque l'énoncé d'un exercice est accompagné du symbole « ✪ » dans la marge, cela signifie qu'il ne peut pas être traité avec toute la rigueur mathématique attendue tant qu'on est cantonné aux outils de MPSI (j'indique alors clairement ce qu'il est nécessaire d'admettre). Vous pourrez essayer de les traiter à nouveau, rigoureusement, au moment adéquat l'année prochaine.

On peut se demander quel est l'intérêt de traiter un exercice où l'on passe à côté de difficultés essentielles : ces exercices concernent majoritairement les *problèmes d'interversion.* Ils sont le cœur d'exercices souvent épineux parce qu'ils nécessitent des compétences variées : 1° la mémorisation ou compréhension d'énoncés aux hypothèses et conclusions nombreuses, qui se ressemblent beaucoup d'un énoncé à l'autre sans être exactement les mêmes ; 2° la reconnaissance d'une situation où on doit les appliquer ; 3° la maîtrise des majorations fines en analyse, 4° la maîtrise dans l'étude des convergences de séries et intégrales, 5° la maîtrise dans le calcul brut. Une solution à cela est de *diluer* ces difficultés. Avec ces exercices, vous aurez déjà une bonne pratique des points 2° et 5°, et vous pourrez vous consacrer pleinement aux points 1°, 3° et 4° durant l'année.

1 Définitions et propriétés spécifiques de ces séries

On appelle fonction *développable en série entière en* 0 une fonction qui peut s'écrire sous la forme $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ dans un voisinage de 0 [*], où $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de nombres complexes (la variable x est réelle ou complexe). Vous avez déjà croisé de telles fonctions. Vous savez en effet que l'on a :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \forall x \in]-1,1[,\ \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n.$$

Partant de la fonction exponentielle, vous en déduisez aisément d'autres exemples parmi les fonctions usuelles :

Exercice 1. Montrer que les fonctions cosinus et sinus, aussi bien circulaires qu'hyperboliques, sont développables en série entière en 0.

Il s'agit d'un cas particulier de série de fonctions (voir chapitre précédent). Les motivations données pour les séries de fonctions restent donc valables ici : les séries entières servent (entre autres) au calcul de sommes non triviales, à la résolution de problèmes par discrétisation, et à se ramener à des fonctions plus simples (des fonctions puissances ici).

Mais d'autres raisons motivent leur étude spécifique : tout d'abord, tout bêtement, il y a « beaucoup » de fonctions développables en séries entières parmi celles que nous connaissons (l'exponentielle, le logarithme, les fonctions trigonométriques directes et réciproques, circulaires et hyperboliques, etc.), donc étudier les séries entières permet d'en savoir plus sur les fonctions que nous manipulons quotidiennement. Ensuite : les séries entières s'avèrent vérifier d'autres propriétés mirifiques :

— leur domaine de définition a une symétrie remarquable : une série entière converge absolument en tout point d'un certain disque ouvert (ou un intervalle ouvert si l'on se restreint à une variable réelle) centré en 0, et cela implique notamment un comportement « tout ou rien » : s'il y a convergence en un réel positif r, il y a aussi convergence en tout z tel que $|z| < r$ (avec une condition inverse en cas de divergence) ;

— nous disions dans la section précédente que la linéarité des opérations classiques de l'analyse (dérivation, intégration, passage à la limite...) ne se généralise pas aux sommes à support infini ; mais avec les séries entières, c'est toujours vrai ! (... en gros).

[*]. Si on veut définir une fonction développable en série entière en un point ω, on considère à la place l'application $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-\omega)^n$. Mais quitte à remplacer une telle fonction f par $x \mapsto f(x+\omega)$, on revient à un développement en 0. C'est pourquoi le programme nous cantonne à ce cas-là sans que ce soit contraignant.

Attardons-nous sur deux autres propriétés, qui permettent de traiter de bâtir un pont entre le monde des **fonctions** et le monde des **suites** :

— si $S_a : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $S_b : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ sont deux fonctions développables en série entière en 0 (on les appelle *séries génératrices* de $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$), alors :

$$S_a = S_b \overset{(\spadesuit)}{\iff} \exists r > 0,\ \forall x \in]-r, r[,\ S_a(x) = S_b(x) \overset{(\clubsuit)}{\iff} \forall n \in \mathbb{N},\ a_n = b_n\,;$$

— sous de bonnes hypothèses, on a :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^n. \qquad \text{(produit de Cauchy)}$$

L'équivalence ($\spadesuit$) est remarquable : elle nous enseigne que, pour que deux fonctions développables en série entière soient égales PARTOUT, il suffit qu'elles soient égales AU VOISINAGE DE ZÉRO. C'est un moyen puissant de démontrer des identités sur $\mathbb{C}$ en les montrant sur $\mathbb{R}$ (ou sur un intervalle de $\mathbb{R}$ suffisamment petit pour nos besoins : $]-1{,}1[$ par exemple, si l'on a besoin d'avoir une suite ou série géométrique convergente). Ainsi, *sans le moindre effort*, elle nous assure que des identités telles que $\cos^2 + \sin^2 = 1$, $e^{x+y} = e^x e^y$, etc., sont valables sur $\mathbb{C}$ dès lors qu'on les a démontrées sur $\mathbb{R}$. On parle de *prolongement analytique* ou de *principe des zéros isolés* (selon notre façon d'utiliser cette équivalence).

Exercice 2. Déduire de ce paragraphe que les fonctions $x \mapsto \mathrm{Re}(x)$, $x \mapsto \mathrm{Im}(x)$ et $x \mapsto |x|^2$ ne sont pas développables en série entière en 0.

Toutefois, c'est bien sûr l'équivalence ($\clubsuit$) qui permet de faire un pont entre le monde des fonctions et celui des suites : deux fonctions développables en série entière sont égales si et seulement si leurs termes généraux sont égaux. Cela donne une nouvelle piste pour démontrer une égalité du type : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$, où a_n est une quantité qu'on cherche à simplifier ou expliciter et b_n une quantité tout à fait explicite, dépendant de suites usuelles. On introduit à la place l'application $S_a : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et on montre qu'elle est égale à $S_b : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ (en fait, dans la plupart des exercices, on ne sait pas sur quelle suite $(b_n)_{n\geqslant 0}$ ou quelle fonction S_b on est supposé tomber ; pas grave, les différentes formules de calcul du chapitre permettront de la trouver). Si on y parvient, c'est gagné grâce à ($\clubsuit$).

On peut se demander en quoi cette idée saugrenue serait pertinente : pourquoi une somme de série serait plus facile à étudier que son terme général ? Pour y répondre, regardons ce que deviennent certaines opérations élémentaires sur les suites quand on considère leurs séries génératrices :

— **décaler l'indice d'une suite** $(a_n)_{n\geqslant 0}$ revient à **changer** S_a **en** $x \mapsto \dfrac{S_a(x) - a_0}{x}$ (ce que j'entends par là : si $c_n = a_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors la série génératrice de $(c_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie : $S_c(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^{n-1} = \frac{S_a(x) - a_0}{x}$) ;

— **multiplier par** n le terme général d'une suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ revient essentiellement à **dériver** S_a (ce que j'entends par là : si $c_n = n a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors : $S_c(x) = x \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1} = x S_a'(x)$;

— **sommer les** $n+1$ **premiers termes** d'une suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ revient à **multiplier** S_a **par** $\dfrac{1}{1-x}$, grâce à la formule du produit de Cauchy : si $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors : $S_c(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} 1 \cdot a_k\right) x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) = \frac{S_a(x)}{1-x}$, et on peut trouver une traduction analogue pour toute relation du type $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$;

— et ainsi de suite : nous n'avons pas épuisé les traductions possibles !

En conséquence : une relation vérifiée par la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ en implique une autre vérifiée par sa série génératrice S_a, en vertu des identités ci-dessus. Si l'on tombe sur une équation fonctionnelle ou différentielle plus simple que la relation initiale (espoir raisonnable comme on va le voir), alors on en déduit une expression explicite de S_a, puis une relation du type : $S_a = S_b$, où S_b est développable en série entière, puis une expression explicite de a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ grâce à ($\clubsuit$).

Imaginons par exemple qu'on veuille expliciter une suite vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n,$$

avec pour premiers termes $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ (c'est la suite de Fibonacci).

On admet que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que : $|x| \leqslant \dfrac{1}{2}$ (on peut même faire un peu mieux, mais ce sera suffisant). Notons S sa somme. Si l'on multiplie par x^{n+2} l'égalité $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, et qu'on somme de $n = 0$ à $+\infty$, on obtient pour tout $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+2} x^{n+2} = x \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} x^{n+1} + x^2 S(x), \quad \text{soit donc :} \quad S(x) - u_0 - u_1 x = x(S(x) - u_0) + x^2 S(x).$$

Comme $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ par hypothèse, on en déduit facilement après calculs :

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[, \quad S(x) = -\frac{x}{x^2 + x - 1}.$$

Il reste à écrire le membre de droite comme une fonction développable en série entière, ce qui est une affaire de routine après l'avoir décomposé en éléments simples. On obtient ici, après avoir noté $x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ les deux racines de $X^2 + X - 1$:

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[, \quad S(x) = -\frac{x}{\sqrt{5}} \left(-\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{x_1}} + \frac{1}{x_2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{x_2}} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{x_1^n} - \frac{1}{x_2^n} \right) x^n.$$

D'après l'équivalence ($\clubsuit$), on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{x_1^n} - \frac{1}{x_2^n} \right) = \frac{x_2^n - x_1^n}{\sqrt{5}(x_1 x_2)^n} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

C'est aussi l'expression que vous auriez trouvée en explicitant la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ *via* les méthodes classiques de 1re année.

Exercice 3. Compléter l'exemple ci-dessus :

1. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 2^n$ (ne pas utiliser l'expression explicite de $(u_n)_{n\geqslant 0}$, ou le raisonnement est circulaire !). En déduire que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$ converge pour tout $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$.
2. Montrer : $\dfrac{1}{X^2 + X - 1} = \dfrac{1}{x_1 - x_2} \left(\dfrac{1}{X - x_1} - \dfrac{1}{X - x_2} \right)$. En déduire le développement en série entière de $x \mapsto -\dfrac{x}{x^2 + x - 1}$ proposé.

Le succès de notre raisonnement ci-dessus est dû au fait qu'un décalage d'indice pour des suites se traduise par une simple multiplication ou division par une puissance de x pour les séries génératrices associées : on se retrouve avec une équation très banale à résoudre. On a ainsi illustré en quoi le pont entre le monde des suites et le monde des fonctions permet d'expliciter les unes en fonction des autres.

Le produit de Cauchy est mis en valeur plus haut, parce qu'il est particulièrement efficace dans le cas où l'on étudie des suites définies par des sommes, ou qui vérifient des relations impliquant des sommes. On donne un exemple en exercice ci-dessous, que vous connaissez bien. Notez qu'un intérêt de l'approche de cet exercice est qu'elle ne nécessite aucunement d'avoir une idée du résultat à obtenir.

Exercice 4. On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$.

1. Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} nx^n$ converge vers $\dfrac{x}{(1-x)^2}$. Trois pistes éventuelles pour le calcul de la somme :
   — faire un changement d'indice simple pour en déduire une relation vérifiée par la somme de cette série ;
   — utiliser le théorème de sommation par paquets ou reconnaître un produit de Cauchy de deux sommes qu'on sait calculer ;
   — faire une transformation d'Abel, si vous savez ce que c'est (notion hors programme).
2. Montrer : $\forall x \in]-1,1[,\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n = \dfrac{x}{(1-x)^3}$, en utilisant un produit de Cauchy.
3. ☆ Montrer : $\dfrac{1}{(1-x)^3} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n(n+1)}{2} x^n$, en admettant que l'on peut dériver la somme géométrique $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ « comme on pense » (à moins que vous ne trouviez une démonstration valable avec le programme de MPSI, ce qui n'est pas à exclure).
4. Conclure en donnant la valeur de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Dans le contexte où l'on utilise les séries entières, a_n est souvent, au choix : 1° une somme non usuelle, 2° le cardinal d'un ensemble fini, dont on connaît des relations de récurrence grâce à des arguments combinatoires.

Notons qu'on a mis l'accent sur l'implication directe de (♣), mais l'implication réciproque (qui, elle, est totalement triviale) a aussi sa pertinence, pour les mêmes que celles données ci-dessus : une relation compliquée entre fonctions a parfois une traduction plus simple avec des suites et il vaut mieux dans ce cas travailler avec elles. Une situation récurrente qui illustre mon propos est celui des équations différentielles, comme nous allons l'illustrer immédiatement avec le cas de l'équation différentielle $y' = y$ munie de la condition initiale $y(0) = 1$. Faisons comme si nous ignorions ses solutions, et retrouvons le fait que l'exponentielle soit l'unique solution. Avant de poursuivre, rappelons qu'il est relativement facile de démontrer l'unicité d'une solution :

Exercice 5. Soient f et g deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et solutions de l'équation différentielle : $y' = y$, et vérifiant de plus : $f(0) = g(0) = 1$. Montrer : $f = g$.
Indication : montrer que g ne s'annule pas grâce au calcul de $g(x)g(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, puis étudier la dérivée de $\frac{f}{g}$.

Par conséquent, il suffit de trouver une seule solution pour résoudre entièrement ce problème de Cauchy, et je *choisis* de la chercher sous la forme d'une fonction développable en série entière. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une telle fonction (ne nous soucions pas de son domaine de définition dans cette exposition : en toute rigueur on le trouverait en faisant une analyse-synthèse, l'analyse permettant d'expliciter suffisamment la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ pour déterminer les valeurs de x où il y a convergence). On veut : $f' = f$, et : $f(0) = 1$. Si f est dérivable terme à terme comme on le promet plus haut, alors ces deux égalités équivalent à :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}(n+1)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \quad \text{et :} \quad a_0 = 1,$$

pour tout x dans le domaine de définition de f. D'après l'équivalence (♣), cela équivaut à :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}, \quad a_0 = 1.$$

On en déduit aisément, par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{1}{n!}$, et donc f est nécessairement l'application $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$: c'est la fonction exponentielle.

Nous avions dit plus haut que certaines relations compliquées entre fonctions ont parfois une traduction plus simple avec les suites. Dans le cas de figure présent, cela tient au fait qu'une équation différentielle se ramène à une relation de récurrence ; or une telle relation permet d'expliciter le terme général en un nombre fini d'étapes. C'est souvent plus accessible.

Exercice 6. En suivant la même approche que ci-dessus, donner les solutions développables en série entière des équations différentielles suivantes. On admettra les résultats énoncés dans cette section, et on ne se souciera pas du domaine de définition I des solutions :

(a) $\forall x \in I$, $x^2(1-3x)y''(x) + 2x(2-9x)y'(x) + 2(1-9x)y(x) = -4$;

(b) $\forall x \in I$, $4x^2(3x-1)y''(x) + 6x(6x-1)y'(x) + (9x+2)y(x) = -4$;

(c) $\forall x \in I$, $xy''(x) + 2(4x^2+1)y'(x) + 24xy(x) = 0$;

(d) $\forall x \in I$, $x^2(x^2-2)y''(x) + 8x(x^2-1)y'(x) + 4(3x^2-1)y(x) = 12x+8$;

(e) $\forall x \in I$, $(x^2-3)y''(x) + 7xy'(x) + 8y(x) = 0$;

(f) $y^{(3)} = y$.

J'ai fait en sorte que les relations de récurrence obtenues dans chaque question induisent une petite différence, les unes par rapport aux autres, dans l'explicitation.

Plus généralement, être une fonction développable en série entière est une telle contrainte que cela implique beaucoup de régularité. Entre autres choses, que nous verrons en exercices : le maximum d'une telle fonction sur un disque (si l'on raisonne avec la variable complexe) est toujours sur son bord ; si on contrôle la taille de la fonction sur $\mathbb{C}$, on contrôle la taille de ses dérivées (réfléchissez à quel point c'est différent de ce que vous constatez selon la variable réelle, où des fonctions très « petites » peuvent avoir des variations erratiques et donc des dérivées « grandes ») ; etc.

2 Résumé : objectif du chapitre

Après avoir défini les séries entières, nous démontrerons que leur domaine de convergence est un disque du plan complexe, centré en zéro (avec une incertitude sur l'inclusion du bord au domaine de convergence). Le rayon de ce disque, appelé *rayon de convergence*, est une donnée fondamentale et nous donnerons des méthodes pour l'obtenir (théorème de comparaison, adaptation de la règle de D'Alembert à ce cadre). Le comportement sur le bord du disque est subtil, et nous donnerons un énoncé permettant de trancher ce qu'il se passe dans un cas particulier : le théorème d'Abel radial.

Nous donnerons ensuite les propriétés de régularité d'une fonction développable en série entière, montrant notamment qu'elle est de classe C^∞ sur l'intérieur de son disque ouvert de convergence, et que toutes les opérations naturelles de l'analyse sont valables sur ce disque ouvert (dérivation, intégration), avec un peu plus de prudence dans le cas de l'intégration (on se limite à des segments). Ces énoncés permettront d'en déduire les équivalences (♠) et (♣) données plus haut, qui jouent un rôle central dans toute la théorie des séries entières pour les raisons déjà évoquées.

Réciproquement, on se demandera : étant donné une fonction, est-elle développable en série entière ? Un lien avec les théorèmes de Taylor sera explicité.

En application, en plus des motivations déjà données pour toutes les séries de fonctions : les séries entières aideront à la résolution d'équations fonctionnelles et différentielles non triviales et à l'étude de certaines suites difficiles à expliciter, souvent d'origine combinatoire.

3 Une autre application : généraliser les fonctions usuelles

Cette sous-section peut être ignorée. Elle motive un prolongement de la théorie des séries entières qui n'est explicitement au programme que dans le chapitre *Fonctions vectorielles* (et j'en parle donc dans le chapitre idoine, et éventuellement dans certains problèmes écrits. Mais elle ne constitue en aucun cas le cœur de nos préoccupations en MP.

Une autre motivation de la théorie des séries entières, que le programme n'aborde qu'à la marge dans le chapitre *Fonctions vectorielles*, est qu'en écrivant les fonctions usuelles comme combinaison linéaire de puissances entières (pour caricaturer), nous rendons possible leur généralisation à d'autres contextes que le cadre réel ou complexe. En effet, dans le membre de droite des identités :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \forall x \in]-1,1[,\ \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad \forall x \in]-1,1[,\ \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

il n'apparaît que des sommes, produits et puissances impliquant des nombres rationnels et une variable x. De telles quantités ont un sens dans bien d'autres ensembles que $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$: il suffit par exemple d'avoir un anneau contenant $\mathbb{Q}$ (on a besoin de la structure d'anneau pour que le produit et l'exponentiation aient un sens). Si A est un tel anneau, et qu'on peut définir une topologie sur A de sorte que la convergence d'une série y ait un sens (et soit facile à étudier en imitant le cas réel ou complexe), il devient alors possible d'y définir un analogue des fonctions usuelles réelles grâce aux identités ci-dessus. Si l'on ne veut pas se poser de question de convergence, et ne manipuler que des sommes à support fini, c'est possible à condition d'avoir des éléments nilpotents. Il suffit alors de poser, par exemple, pour tout $a \in A$ tel que la somme existe : $\exp(a) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} a^n$. En résumé :

Les séries entières permettent de généraliser les fonctions usuelles à d'autres anneaux que $\mathbb{R}$:
$\mathbb{C}$, $\mathrm{M}_n(K)$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, etc.

C'est d'ailleurs ce que vous fîtes pour définir de manière très satisfaisante l'exponentielle complexe, au moment d'aborder les séries numériques et les familles sommables, là où les définitions des années antérieures ont tout du bricolage (définition sur $\mathbb{R}$ soit comme solution d'une équation différentielle, soit comme réciproque du logarithme, puis définition sur $i\mathbb{R}$ à l'aide du cosinus et du sinus, et enfin extension à $\mathbb{C}$ par propriété de morphisme), et donnent des démonstrations inélégantes que les propriétés classiques sur $\mathbb{R}$ restent valables sur $\mathbb{C}$.

De même, le mathématicien qui voudrait définir le logarithme sur un domaine du plan complexe proposerait comme définition : $\ln(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^{n+1}}{n+1}$. Malheureusement cette somme n'existe pas pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z-1| > 1$, mais c'est mieux que rien. Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z-1| < 1$, on retrouve bien l'une des propriétés classiques du logarithme :

Exercice 7. *Sans se soucier de justifier la validité des opérations classiques de l'analyse*, vérifier que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que : $|z-1| < 1$, on a : $\exp\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^{n+1}}{n+1}\right) = z$.

En revanche l'identité $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ se généralise assez mal. N'en parlons pas.

L'intérêt de vouloir généraliser des fonctions usuelles à d'autres anneaux que $\mathbb{R}$, est de profiter de leurs propriétés remarquables en espérant qu'elles restent valables... Et c'est en général le cas ! En effet, toute identité vérifiée par des fonctions développables en série entière se ramène, en raisonnant coefficient par coefficient, à des identités polynomiales à coefficients entiers ou rationnels (par exemple l'identité $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ équivaut à la formule du binôme de Newton, comme vous l'avez démontré cette année grâce aux produits de Cauchy). Et les identités polynomiales à coefficients entiers ont le don de pouvoir se généraliser à tout anneau A en remplaçant l'indéterminée X par n'importe quel élément $a \in A$, grâce au fait que $P \mapsto P(a)$ soit un morphisme de $\mathbb{Z}[X]$ dans A * !

Il faut simplement être plus prudent lorsqu'on veut généraliser une identité avec plus d'une seule variable x : elle ne se généralise qu'avec des éléments qui **commutent**, puisque dans le cas contraire $P(X,Y) \mapsto P(a,b)$ n'est plus un morphisme de $\mathbb{Z}[X,Y]$ dans A (ici $(a,b) \in A^2$).

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner des exemples explicites, dans des anneaux non commutatifs A, où les identités suivantes sont *fausses* :

$$\forall (a,b) \in A^2, \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \quad a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k},$$

et démontrer qu'elles sont valables si a et b commutent.

En dehors de ces légères complications, on retiendra le principe général de cette sous-section :

1. Les séries entières permettent de généraliser des fonctions réelles à d'autres anneaux que $\mathbb{R}$.
2. Les identités vérifiées par ces fonctions restent valables quand on les définit sur un autre anneau, à condition d'ajouter une hypothèse de commutation lorsque ces identités font intervenir au moins deux variables.

Illustrons ceci avec le développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$. L'intérêt de généraliser cette fonction est évident : cela permet de fabriquer des inverses à peu de frais. Pour ne pas se soucier des questions de convergence, l'exercice ci-dessous ne nécessite d'utiliser son développement qu'avec des éléments nilpotents, de sorte que les sommes soient à support fini.

Exercice 9. Traiter chacune des questions ci-dessous en s'inspirant du développement en série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$.

1. Trouver rapidement un inverse de 8 modulo 3^6.
2. Soient $a \in \mathbb{R}$, n un entier naturel non nul, et :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & \cdots & a^{n-1} \\ 0 & 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & a & \cdots & a^{n-3} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}).$$

   Montrer que A est inversible et donner son inverse, *de tête.*
3. Soit A un anneau dont on note 0_A et 1_A les éléments neutres pour l'addition et la multiplication. Montrer que si $n \in A$ est un élément nilpotent (c'est-à-dire : $\exists k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $n^k = 0_A$), alors $1_A + n$ est inversible et donner son inverse.

   Traiter de même l'inversibilité de $u + n$ où u est un élément inversible de A commutant avec n.
4. Soit M une matrice d'ordre n nilpotente. Montrer que $(\mathrm{I}_n - M)^2$ est inversible et expliciter son inverse.

Pour les généralisations de l'exponentielle, nous en parlons plus amplement dans le chapitre *Fonctions vectorielles.*

*. Par souci de clarté dans l'exposition, je mets de côté les complications qui apparaissent lorsque A ne contient pas de sous-anneau isomorphe à $\mathbb{Q}$ et qu'on considère des identités avec des nombres rationnels.