Présentation des chapitres de mathématiques de MP

Réduction des endomorphismes

Le cours de 1re année a posé les fondements de l'algèbre linéaire moderne. Celui de 2e année aborde son problème majeur, que nous formulons dans un premier temps en des termes vagues : étant donné un espace vectoriel E, sur lequel nous étudions l'action d'une application linéaire f (la plupart du temps il s'agit d'un endomorphisme), on se demande s'il est possible de décomposer E en somme de sous-espaces vectoriels* :

$$E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_k,$$

où F_i est un sous-espace vectoriel de E tel que la restriction de f à F_i soit « simple » à étudier. Intuitivement, l'étude sur F_i est nécessairement plus simple que sur E pour de bêtes raisons dimensionnelles (si l'on raisonne matriciellement : le nombre de coefficients de la matrice représentative de $f_{|F_i}$ dans une base donnée est d'autant plus petit que la dimension de F_i est petite, le cas le plus favorable étant celui où F_i est une droite vectorielle ; en tous les cas, il y a moins de coefficients à déterminer que si l'on étudie la matrice de f relativement à une base de E), mais nous verrons que cela ne suffit pas et que les F_i devront être obtenus intelligemment.

Une telle décomposition a deux objectifs selon que l'objet d'étude soit E ou f :

— **si E est un espace vectoriel mal connu dont on veut expliciter les éléments :** on veut alors le décomposer comme somme de sous-espaces vectoriels F_i plus « simples », suffisamment simples pour qu'on sache les expliciter ; connaissant les éléments des F_i, on en déduit les éléments de E en sommant ;

— **si f est une application linéaire sur E dont la description est « compliquée », ce qui se traduit souvent par une matrice représentative A qui est elle-même « compliquée » :** dans ce cas il peut être difficile d'obtenir son image (et donc son rang), son noyau, ses puissances, etc. ; mais en se ramenant à des sous-espaces F_i plus « simples », la restriction de f à ces sous-espaces devrait être elle-même plus simple à étudier ; or, si $f_{|F_i}$ est connu pour tout i, par linéarité on en déduit f.

Le programme de MP aborde surtout le second point (d'où le nom du chapitre : on « réduit » des endomorphismes en exprimant leurs matrices sous la forme la plus simple possible), bien que le premier point soit (de mon point de vue) bien plus riche, avec encore des ramifications dans les mathématiques contemporaines.

Le propos est pour l'instant assez abstrait. Le premier item concerne généralement les espaces vectoriels E qui sont les solutions d'une certaine équation linéaire (pour les exemples les plus banals : équation différentielle, espace des suites vérifiant une certaine relation de récurrence, etc.). Le second item sera majoritairement étudié du point de vue matriciel, et reviendra en général à ramener l'étude d'une matrice quelconque à celle d'une matrice diagonale (« la plus simple possible »), ou diagonale « par blocs » ou triangulaire faute de mieux. Nous allons illustrer ceci concrètement dans les deux sous-sections suivantes.

1 Pour expliciter des espaces vectoriels mal connus

Pour comprendre cette problématique, oublions un petit moment l'algèbre linéaire et intéressons-nous à la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} + a u_{n+1} + b u_n = 0,$$

où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ est un couple fixé et $(u_n)_{n \geqslant 0}$ une suite réelle. On cherche à expliciter les suites vérifiant une telle relation, sans utiliser les techniques que vous avez vues en 1re année, mais en ramenant cette relation de récurrence d'ordre 2 à des relations d'ordre 1 : on veut *abaisser l'ordre*.

∗. Vous n'avez pas encore vu la somme directe de k sous-espaces vectoriels lorsque $k \geqslant 3$. C'est essentiellement la même chose que dans le cas où $k = 2$: l'égalité $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_k$ signifie que tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme somme de vecteurs de F_1, F_2, etc., F_k.

Pour y parvenir : de la même manière que les racines d'un polynôme permettent de le « casser » en plusieurs facteurs de degré plus petit (vu que α est racine d'un polynôme P si et seulement s'il existe un polynôme Q tel que $P = (X - \alpha)Q$), nous espérons que les racines de $X^2 + aX + b$ permettront de « casser » cette relation d'ordre 2 en relations d'ordre 1. À cet effet, nous supposons désormais que le polynôme $X^2 + aX + b$ admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2. Grâce aux relations coefficients-racines, on a : $b = r_1r_2$, et : $a = -(r_1 + r_2)$. La relation d'ordre 2 ci-dessus peut alors se réécrire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2}-r_1u_{n+1}-r_2u_{n+1}+r_1r_2u_n = 0, \quad \text{soit donc :} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2}-r_1u_{n+1} = r_2\left(u_{n+1} - r_1u_n\right),$$

si bien qu'en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{n+1} - r_1u_n, \quad w_n = u_{n+1} - r_2u_n,$$

on observe que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = r_2v_n, \quad \text{et de même :} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+1} = r_1w_n.$$

On a *abaissé l'ordre* : on reconnaît deux suites géométriques, de raisons respectives r_2 et r_1. On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = r_2^n v_0$, $w_n = r_1^n w_0$. On a explicité v_n et w_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, et on en déduit une expression de la suite originelle $(u_n)_{n\geqslant 0}$ en remarquant que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{v_n - w_n}{r_2 - r_1} = \frac{u_1 - r_1u_0}{r_2 - r_1}r_2^n + \frac{u_1 - r_2u_0}{r_1 - r_2}r_1^n.$$

On a explicité toute suite vérifiant la relation de récurrence d'ordre 2 ci-dessus, en démontrant qu'elle est nécessairement combinaison linéaire de $(r_1^n)_{n\geqslant 0}$ et $(r_2^n)_{n\geqslant 0}$ (la réciproque est facile à vérifier).

Fort du succès rencontré dans le cas des suites récurrentes linéaires d'ordre 2, on peut tenter de la transposer à un autre cadre proche : celui des équations différentielles linéaires d'ordre 2. Si l'on veut déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :

$$y'' + ay' + by = 0,$$

alors en posant : $f = y' - r_1y$, et : $g = y' - r_2y$, un calcul analogue à celui fait avec les suites permet de démontrer que l'on a : $f' = r_2f$, et : $g' = r_1g$ (faites-le). On a à nouveau *abaissé l'ordre* : f et g vérifient des équations différentielles linéaires du premier ordre. On sait les résoudre. On en déduit : $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = f(0)e^{r_2t}$, $g(t) = g(0)e^{r_1t}$, et on revient à la fonction inconnue d'origine en écrivant :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = \frac{f(t) - g(t)}{r_2 - r_1} = \frac{y'(0) - r_1y(0)}{r_2 - r_1}e^{r_2t} + \frac{y'(0) - r_2y(0)}{r_1 - r_2}e^{r_1t}.$$

On a démontré que toute solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 ci-dessus est combinaison linéaire des applications $t \mapsto e^{r_1t}$ et $t \mapsto e^{r_2t}$ (la réciproque est facile à vérifier).

Tout cela est très bien, mais pas entièrement satisfaisant :

— on n'est pas très efficace : va-t-on devoir recommencer cette stratégie chaque fois que l'on rencontre une équation linéaire d'ordre 2 ? (d'ailleurs, comment reconnaître une équation linéaire qui se résoudrait par cette approche ? est-ce applicable aux suites vérifiant $(n+2)u_{n+2}+n^2u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$? et à celles vérifiant $(n + 2)(n + 1)u_{n+2} + (n + 1)u_{n+1} + u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$? comment savoir ?) ne peut-on pas donner un énoncé général, dont les résolutions ci-dessus seraient des applications à des cas particuliers ?

— l'approche a tout l'air du bricolage : et si l'on rencontre une relation de récurrence ou une équation différentielle d'ordre 3, 4, etc., peut-on se ramener à des équations d'ordre inférieur ? si oui, comment ?

Je ne détaillerai pas le second point dans cette introduction, me contentant de dire qu'il y a bien un moyen de se ramener à des équations d'ordre inférieur, sans expliciter le « comment » (qui proviendra d'un résultat appelé le *lemme des noyaux*). Pour le premier point, nous allons expliquer dans les grandes lignes comment produire un énoncé général. Le bon cadre est celui de l'algèbre linéaire. De manière générale, lorsqu'on cherche à déterminer l'ensemble E des $\clubsuit$ vérifiant : $\bigstar = 0$, alors en posant g l'application $\clubsuit \mapsto \bigstar$, on note que l'on a :

$$E = \{\clubsuit \mid g(\clubsuit) = 0\} = \ker(g),$$

du moins si g est un morphisme (d'espaces vectoriels, de groupes, d'anneaux, etc., à ceci près que dans le cas d'un groupe le membre de droite doit éventuellement être 1, ou id, etc., selon le groupe). Cette réécriture a l'intérêt de reconnaître de la structure, et de pouvoir utiliser les énoncés généraux de vos cours sur les structures pour étudier E. Dans cette section, g est une application **linéaire**.

Dans le cas des deux exemples ci-dessus, on pourrait ainsi introduire les applications $(u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n)_{n\geqslant 0}$ et $y \mapsto y'' + ay' + by$, mais pour correctement définir notre problématique (se ramener à des équations d'ordre plus petit : comment définir l'*ordre*, en toute généralité ?), il est plus pertinent d'introduire les deux applications linéaires suivantes, très fréquemment rencontrées dans $K^{\mathbb{N}}$ et $\mathrm{C}^\infty(I, K)$:

$$T : \begin{cases} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n\geqslant 0} & \mapsto & (u_{n+1})_{n\geqslant 0} \end{cases}, \quad \text{et} \ : \quad D : \begin{cases} \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ y & \mapsto & y' \end{cases}$$

(je les appelle T comme « translation » et D comme « dérivation »). Avec ces notations, je vous laisse vérifier que :

$$\left\{(u_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0\right\} = \ker\left(T^2 + aT + b\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}\right)$$

(pour rappel : $T^2 = T \circ T$; plus généralement, T^k se définit par récurrence *via* la relation : $T^{k+1} = T^k \circ T$, et de même pour tout endomorphisme), et :

$$\{y \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid y'' + ay' + by = 0\} = \ker\left(D^2 + aD + b\mathrm{Id}_{\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})}\right).$$

Les deux ensembles que nous cherchions ont donc pour point commun de s'écrire sous la forme :

$$\ker\left(f^2 + af + b\mathrm{Id}_E\right),$$

où f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E. On peut parler dans chaque cas d'une équation *linéaire* (c'est le noyau d'une application linéaire), d'ordre 2 puisque c'est le noyau d'un « polynôme d'endomorphisme » (nous ferons un jour tomber les guillemets) de degré 2.

Dans ce contexte, la problématique de cette section est alors d'écrire ce noyau « mal connu » (on veut expliciter ses éléments) comme somme de noyaux de la forme $\ker(f - \alpha\mathrm{Id}_E)$ (qui donnent des solutions d'une équation d'ordre inférieur, et donc plus « simple »). Le lien avec l'introduction est fait dans ce cas particulier (avec $E = \ker\left(f^2 + af + b\mathrm{Id}_E\right)$ et les F_i de la forme $\ker(f - \alpha\mathrm{Id}_E)$).

Pour y parvenir : en s'inspirant des deux cas particuliers ci-dessus, on démontre que l'on a : $\ker\left(f^2 + af + b\mathrm{Id}_E\right) = \ker\left(f - r_1\mathrm{Id}_E\right) \oplus \ker\left(f - r_2\mathrm{Id}_E\right)$, ce qui abaisse effectivement l'ordre, puisque les deux noyaux du membre de droite n'ont plus de f^2 ! C'est valable pour tout endomorphisme, donc c'est en particulier valable pour T et D définis ci-dessus. Or :

$$\forall r \in \mathbb{R}, \quad \ker\left(T - r\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}\right) = \left\{(u_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - ru_n = 0\right\} = \mathrm{Vect}\left((r^n)_{n\geqslant 0}\right),$$

et :

$$\forall r \in \mathbb{R}, \quad \ker\left(D - r\mathrm{Id}_{\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})}\right) = \{y \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid y' - ry = 0\} = \mathrm{Vect}\left(x \mapsto e^{rx}\right),$$

donc :

$$\ker\left(T^2 + aT + b\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}\right) = \ker\left(T - r_1\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}\right) \oplus \ker\left(T - r_2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}\right) = \mathrm{Vect}\left((r_1^n)_{n\geqslant 0}, (r_2^n)_{n\geqslant 0}\right),$$

et de même : $\ker\left(D^2 + aD + b\mathrm{Id}_{\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})}\right) = \mathrm{Vect}\,(x \mapsto e^{r_1 x}, x \mapsto e^{r_2 x})$, ce qui permet de retrouver la forme des suites récurrentes linéaires et des solutions d'équations différentielles obtenue ci-dessus.

Mission accomplie ! On a bien posé le problème (ramener une équation linéaire *quelconque* d'ordre 2 à des équations d'ordre 1), on l'a résolu en ajoutant une hypothèse sur des racines, et il ne restait plus qu'à l'appliquer directement à des endomorphismes bien choisis pour obtenir la forme des suites récurrentes d'ordre 2 et des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2, *en même temps* * ! Et le fait d'avoir proposé une approche générale permet de l'appliquer à toutes les équations du même type que vous rencontrerez : voir l'exercice 1 ci-dessous.

Exercice 1. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

1. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel réel E. On suppose : $f^2 + af + b = 0_{\mathrm{L}(E)}$ (cette hypothèse équivaut à : $E = \ker\left(f^2 + af + b\mathrm{Id}_E\right)$), et que le polynôme $X^2 + aX + b$ admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2.
   Démontrer effectivement ce qui a été omis ci-dessus : $E = \ker(f - r_1\mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - r_2\mathrm{Id}_E)$.
2. Soient E l'espace vectoriel des suites réelles vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0$, et f l'endomorphisme $(u_n)_{n\geqslant 0} \mapsto (u_{n+1})_{n\geqslant 0}$. On suppose uniquement dans cette question que le polynôme $X^2 + aX + b$ admet une unique racine réelle r. Montrer que l'égalité : $E = \ker(f - r\mathrm{Id}_E)$ est impossible (*si possible*, se passer de votre connaissance *a priori* des relations de récurrence d'ordre 2).

On utilisera le résultat de la question 1 pour traiter les suivantes.

3. Déterminer les applications $y : \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ de classe C^∞ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et vérifiant :
$$\left(\tan\cdot(\tan\cdot y')\right)' = y.$$
4. On suppose que le polynôme $X^2 + aX + b$ admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2. Déterminer les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ vérifiant :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + (2x + a)y'(x) + \left(x^2 + 1 + ax + b\right) y(x) = 0.$$

Exercice 2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On se place dans le cas où $X^2 + aX + b$ admet une unique racine réelle.

1. Toujours par des techniques d'algèbre linéaire, déterminer les suites réelles vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0$. On n'utilisera pas notre connaissance *a priori* des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 pour traiter cette question.
2. De même pour les applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ telles que : $y'' + ay' + by = 0$.

Exercice 3. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On suppose que le polynôme $X^3 + aX^2 + bX + c$ admet une racine réelle simple μ et une racine réelle double λ.

1. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel réel E, vérifiant : $f^3 + af^2 + bf + c\mathrm{Id}_E = 0_{\mathrm{L}(E)}$. Montrer :
$$E = \ker(f - \mu\mathrm{Id}_E) \oplus \ker\left((f - \lambda\mathrm{Id}_E)^2\right).$$
2. En déduire la forme explicite des suites réelles $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} + au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0,$$
   et des applications $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ vérifiant : $y^{(3)} + ay'' + by' + cy = 0$.
3. Traiter tous les autres cas possibles, selon les ordres de multiplicité des racines du polynôme $X^3 + aX^2 + bX + c$ (ne pas oublier le cas où ce polynôme n'est pas scindé).

*. On n'expose là qu'un seul des très nombreux charmes et apports des *structures*.

Le dernier exercice semble indiquer que la méthode semble s'adapter aux ordres supérieurs strictement à 2. En fait, nous montrerons un résultat important, *le lemme des noyaux*, qui permet d'écrire tout noyau de « polynôme en f » comme une somme directe de noyaux de polynômes de degré inférieur (sauf si le polynôme en f initial est irréductible), qui proviennent de sa décomposition en facteurs irréductibles. Ainsi la méthode se généralise effectivement et permettra de donner les solutions de toute équation différentielle à coefficients constants, ainsi que la forme de toutes les suites récurrentes linéaires à coefficients constants. Et comme on le voit dans l'exercice 1, changer l'endomorphisme permet de résoudre bien d'autres équations !

2 Pour simplifier les calculs impliquant un endomorphisme

La théorie de la réduction se justifie naturellement aussi bien par la géométrie que par l'algèbre matricielle.

Il n'est pas nécessaire de préciser l'apport gigantesque qui a été fait aux mathématiques en introduisant la notion de repère (ou de base), afin de raisonner avec des coordonnées. Seulement, les calculs peuvent s'avérer difficiles si le repère est mal choisi. Par exemple, quand on fait tourner des objets autour d'un axe (et qu'il y a donc une rotation en jeu), n'importe quelle personne sensée préférerait que l'axe de la rotation soit aussi l'un des axes du repère choisi. De la même manière, une réflexion en dimension 3 est plus facile à étudier si son plan de réflexion est engendré par des axes du repère.

À l'inverse, si l'on a affaire à une transformation linéaire non identifiée, on la reconnaîtra mieux si son action sur des vecteurs directeurs des axes est simple. Prenons un exemple concret. Munissons $\mathbb{R}^2$ de la base canonique $\mathcal{B}_c = (\vec{i}, \vec{j})$, et soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application *linéaire* définie par :

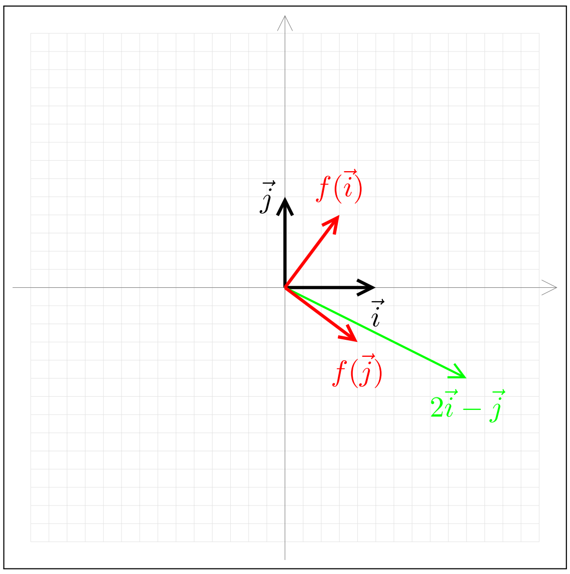
$$f(\vec{i}) = \frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}, \qquad \text{et :} \qquad f(\vec{j}) = \frac{4}{5}\vec{i} - \frac{3}{5}\vec{j}.$$

Définir une application linéaire sur une base suffit à la déterminer en tout vecteur. En effet, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$f((x,y)) = f(x\vec{i}+y\vec{j}) = xf(\vec{i})+yf(\vec{j}) = x\left(\frac{3}{5}\vec{i}+\frac{4}{5}\vec{j}\right)+y\left(\frac{4}{5}\vec{i}-\frac{3}{5}\vec{j}\right) = \left(\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y\right)\vec{i}+\left(\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y\right)\vec{j}.$$

Cela permet de calculer l'image par f de tout vecteur (d'ailleurs, même sans cette expression analytique, vous y parviendriez : le faire dans l'exercice suivant).

Exercice 4. Sur la figure ci-dessous, dessiner l'image par f de $2\vec{i}-\vec{j}$. Vous pouvez aussi de vous-mêmes dessiner d'autres vecteurs $\vec{u}$ et leurs images par f.



Même si l'on sait en théorie dessiner l'image par f de tout vecteur, le procédé est laborieux. Nous proposons une autre base où f est plus facile à calculer. Posons :

$$\vec{e}_1 = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} \quad \text{et :} \quad \vec{e}_2 = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath}.$$

On admet que $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base. Alors :

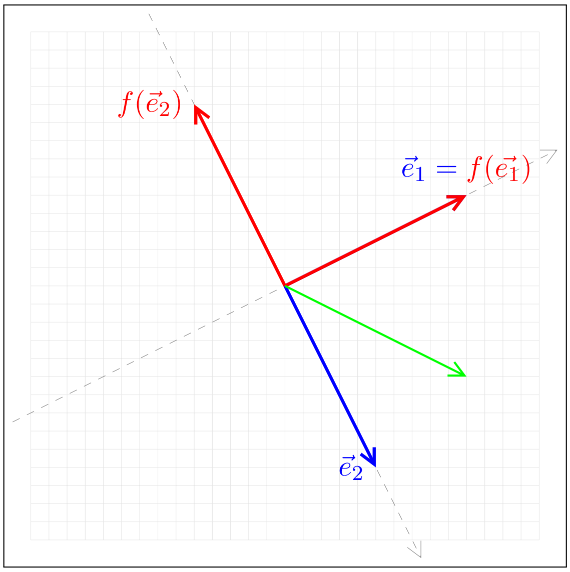
$$f(\vec{e}_1) = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} = \vec{e}_1, \quad \text{et :} \quad f(\vec{e}_2) = -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} = -\vec{e}_2,$$

ce qui facilite le calcul de l'image par f de tout vecteur du plan. Si $\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$, alors :

$$f(\vec{u}) = f(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2) = x\vec{e}_1 - y\vec{e}_2.$$

Je vous laisse apprécier la simplicité des représentations dans cette nouvelle base, avec l'exercice suivant :

Exercice 5. Sur la figure ci-dessous, dessiner à nouveau l'image par f du vecteur $2\vec{\imath} - \vec{\jmath}$ (le vecteur vert, dont les coordonnées dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ sont : $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$, mais vous n'en avez normalement pas besoin pour votre dessin). Dessinez ensuite de vous-mêmes d'autres vecteurs $\vec{u}$ et leurs images par f. Qu'en pensez-vous ?



Si vous vous y prenez bien, vous reconnaîtrez en f la réflexion par rapport à la droite dirigée par $\vec{e}_1$, tout simplement ! Voyez comment tout peut dépendre du bon choix de base.

Ainsi une application linéaire décrite en termes géométriques simples peut avoir une expression obscure dans la base canonique. Ce problème se lit aussi sur les matrices de f dans les bases $\mathcal{B}_c$ et $\mathcal{B}$; on a en effet :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(f) = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}, \text{ et } \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

et il est manifeste que $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$ est plus simple à étudier que $\mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(f)$, du fait qu'elle soit *diagonale* : ses puissances, son déterminant, son noyau, etc., se calculeraient plus rapidement. On passe de l'une à l'autre *via* la formule du changement de base appliquée à f, entre les bases $\mathcal{B}_c$ et $\mathcal{B}$:

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}, \quad \text{où :} \quad P = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Cette relation complètement explicite montre comment, après avoir achevé une étude dans la base $\mathcal{B}$, il n'est pas difficile d'en déduire ce qu'il se passe dans la base $\mathcal{B}_c$. Ainsi on ne perd aucune information en changeant de base.

La question qu'on se pose, à la lumière de cet exemple, est : étant donné un endomorphisme quelconque en dimension finie, est-il possible de déterminer une base où sa matrice est simple (« réduite »), en particulier *diagonale* ? Et si oui, comment déterminer cette base ? C'est cela qu'on appelle la *diagonalisation* d'un endomorphisme.

Nous avons formulé la question pour les endomorphismes. La question de diagonalisation pour les matrices est : étant donnée une matrice carrée, existe-t-il une matrice *diagonale* qui lui soit *semblable* ? Si oui, comment la déterminer ?

Il s'avère que ce n'est pas toujours possible (et nous aurons des critères simples pour trancher la question), et dans le cas contraire nous essaierons, faute de mieux, d'avoir d'autres réductions : la réduction à des matrices triangulaires supérieures est la seule au programme (en dehors de la réduction aux matrices diagonales), mais il y en a d'autres que nous croiserons en exercices (réduction de Dunford, Jordan, Frobenius, etc.).

Les exercices suivants permettent d'avoir une idée de ce qui permet ou non de *diagonaliser*.

Exercice 6.

1. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas semblable à une matrice diagonale (*indication : montrer, grâce à la trace et au déterminant par exemple, ou par un bon usage du rang, que si c'était le cas, les coefficients diagonaux d'une matrice diagonale semblable seraient* 1 *et* 1 *; en déduire une contradiction*).
2. Généraliser cet exemple : donner pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ une famille infinie de matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ qui ne sont pas semblables à une matrice diagonale.

Exercice 7. Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ un n-uplet de scalaires DISTINCTS. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$. On suppose que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, il existe un vecteur non nul $\vec{e}_i \in \mathbb{C}^n$ tel que : $f(\vec{e}_i) = \lambda_i \vec{e}_i$. On veut montrer que la famille $(\vec{e}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est libre. Soit $(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{C}^n$; on suppose : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{e}_i = \vec{0}$.

1. Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i^k \vec{e}_i = \vec{0}$.
2. En déduire : $\forall P \in \mathbb{C}[X]$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i P(\lambda_i) \vec{e}_i = \vec{0}$.
3. Conclure grâce à des polynômes interpolateurs bien choisis.
4. Écrire la matrice représentative de f dans la base $(\vec{e}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. Qu'avons-nous démontré dans cet exercice ?

L'exercice précédent a l'intérêt de vous faire jouer avec des notions majeures : les scalaires λ_i et les vecteurs non nuls $\vec{e}_i$ vérifiant : $f(\vec{e}_i) = \lambda_i \vec{e}_i$, sont respectivement appelés des *valeurs propres* et des *vecteurs propres* de f. Ce sont des objets cruciaux dans l'étude de n'importe quel endomorphisme et ils sont très riches en informations. Il n'est pas exagéré de dire que, peu importe votre cursus scientifique à venir, vous en aurez un usage abondant.

Les situations où il est plus intéressant de se ramener à une matrice diagonale ou, faute de mieux, triangulaire, sont nombreuses (en fait, on pourrait presque dire que *toute* situation s'y prête mieux). Les applications de la réduction ne peuvent donc pas être données exhaustivement. En voici quelques-unes néanmoins :

— l'étude des suites récurrentes linéaires et des équations différentielles (suivant un point de vue complémentaire à celui de la section 1) ; ← page 1

— la résolution d'équations matricielles ;

— l'étude du comportement asymptotique d'une suite ou d'une série de matrices.

L'exercice suivant permet de diagonaliser une matrice d'ordre 3 et d'illustrer deux de ces trois items :

Exercice 8. On pose : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

1. Trouver un vecteur non nul $\vec{x}_1 \in \mathbb{R}^3$ tel que : $f(\vec{x}_1) = 5\vec{x}_1$, et deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ *linéairement indépendants* $\vec{x}_2$ et $\vec{x}_3$ tels que : $f(\vec{x}_2) = -\vec{x}_2$, $f(\vec{x}_3) = -\vec{x}_3$.
2. Montrer que $\mathcal{B} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, et écrire la matrice représentative de f relativement à $\mathcal{B}$.
3. En déduire qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que : $A = PDP^{-1}$, avec : $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. *Utiliser la formule du changement de base.*
4. Calculer D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$, et en déduire une expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. Déterminer les suites réelles $(u_n)_{n\geqslant 0}$, $(v_n)_{n\geqslant 0}$ et $(w_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} &= u_n + 2v_n + 2w_n, \\ v_{n+1} &= 2u_n + v_n + 2w_n, \\ w_{n+1} &= 2u_n + 2v_n + w_n. \end{cases}$$

Indication : on introduira le vecteur colonne X_n défini pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$, puis on commencera par expliciter les coordonnées de $P^{-1}X_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3 Résumé : objectif du chapitre

Nous allons dans un premier temps étendre les résultats sur les sommes de sous-espaces vectoriels, afin de donner un sens à la somme directe : $E = \bigoplus_{i=1}^{k} F_i$, quand $k \geqslant 3$. En effet, selon la complexité de l'espace vectoriel E, il ne suffira pas de le décomposer en une somme directe de seulement deux sous-espaces vectoriels. Puis nous formulerons l'important lemme des noyaux, qui donne un moyen très efficace d'obtenir de telles décompositions lorsque E est un noyau (et c'est le cas si E est l'espace des solutions d'une équation linéaire homogène).

Puisque ces noyaux sont souvent des « polynômes en un endomorphisme f », nous devrons introduire la notion, ainsi que celle de polynôme *annulateur* (ce sont des polynômes en f dont le noyau donne tout l'espace) et donner des résultats de base sur ces polynômes. Un exemple important de polynôme annulateur est le polynôme minimal, que nous définirons.

Outre la motivation ci-dessus, les polynômes en f ont le bon goût de commuter avec f : la commutation est rare et précieuse avec les endomorphismes et matrices, donc la rencontrer a un intérêt particulier.

Viendra ensuite l'importante problématique de la réduction, qui survolera toute l'algèbre linéaire de cette année (et s'invitera même épisodiquement dans les autres chapitres). Nous introduirons les importantes notions de *valeurs propres*, *vecteurs propres*, *sous-espaces propres* et *polynômes caractéristiques* qui donnent un moyen pratique voire algorithmique de réduction des endomorphismes et matrices. De nombreux critères seront donnés pour déterminer si un endomorphisme ou une matrice est diagonalisable ou non ; lorsque ces critères ne sont pas vérifiés, nous devrons nous contenter d'exprimer un endomorphisme comme somme d'un endomorphisme diagonalisable et d'un endomorphisme nilpotent (décomposition de Dunford) : ainsi, moralement, quand on comprend les endomorphismes diagonalisables et les nilpotents, on comprend tout endomorphisme. C'est pourquoi ces derniers seront aussi l'objet de notre attention.

Nous donnerons de nombreuses applications, dont celles citées en fin de section précédente.