Présentation des chapitres de mathématiques de MP

Intégration

Lorsque l'énoncé d'un exercice est accompagné du symbole « ✪ » dans la marge, cela signifie qu'il ne peut pas être traité avec toute la rigueur mathématique attendue tant qu'on est cantonné aux outils de MPSI (j'indique alors clairement ce qu'il est nécessaire d'admettre). Vous pourrez essayer de les traiter à nouveau, rigoureusement, au moment adéquat l'année prochaine.

On peut se demander quel est l'intérêt de traiter un exercice où l'on passe à côté de difficultés essentielles : ces exercices concernent majoritairement les *problèmes d'interversion*. Ils sont le cœur d'exercices souvent épineux parce qu'ils nécessitent des compétences variées : 1° la mémorisation ou compréhension d'énoncés aux hypothèses et conclusions nombreuses, qui se ressemblent beaucoup d'un énoncé à l'autre sans être exactement les mêmes ; 2° la reconnaissance d'une situation où on doit les appliquer ; 3° la maîtrise des majorations fines en analyse, 4° la maîtrise dans l'étude des convergences de séries et intégrales, 5° la maîtrise dans le calcul brut. Une solution à cela est de *diluer* ces difficultés. Avec ces exercices, vous aurez déjà une bonne pratique des points 2° et 5°, et vous pourrez vous consacrer pleinement aux points 1°, 3° et 4° durant l'année.

1 Intégrales impropres

Nous commencerons le chapitre d'intégration de 2$^{\text{e}}$ année par une généralisation des intégrales définies en 1$^{\text{re}}$ année : alors que vous n'intégriez que sur des segments jusqu'à présent, on s'autorisera désormais à intégrer sur tout type d'intervalle. Il peut y avoir plusieurs motivations à cela :

— un simple désir d'exhaustivité : en principe, il ne devrait pas y avoir de raison de se limiter à des segments : en 1$^{\text{re}}$ année vous définissiez l'intégrale d'une fonction continue comme limite d'intégrales de fonctions en escalier, et l'apport majeur du segment fut que la continuité uniforme (découlant du théorème de Heine) vous permit aisément de fabriquer des fonctions en escalier f_n « approchant bien » une fonction continue f (avec le vocabulaire de 2$^{\text{e}}$ année, vous diriez que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge *uniformément* vers f) ; bref, la restriction à des segments était une question de confort et non un obstacle théorique majeur ;

— comme le physicien ou le probabiliste le sait bien, une intégrale peut être interprétée comme une moyenne, disons sur un ensemble de valeurs prises par une variable aléatoire X ; mais si X peut prendre n'importe quelle valeur réelle par exemple (imaginons par exemple que X représente le nombre de secondes avant la désintégration d'un atome : X peut prendre n'importe quelle valeur de $\mathbb{R}_+$), alors une moyenne impliquant X nécessite de savoir calculer une intégrale de la forme $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \bigstar$: encore faut-il savoir définir un tel objet et le manipuler dans les calculs ;

— dans la même veine que l'item précédent : produire des objets invariants par une opération nécessite parfois de « moyenner » ; par exemple, pour fabriquer une fonction 1-périodique à partir d'une fonction quelconque f, il suffit de considérer $x \mapsto \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$ (à condition que cela ait un sens) ; mais si l'on veut produire une fonction invariante par une opération faisant intervenir un ensemble continu plutôt que discret ($\mathbb{Z}$ dans l'exemple ci-avant est discret), par exemple $x \mapsto ax$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, alors la somme ne peut faire l'affaire, puisque seules les familles au plus dénombrables sont sommables : c'est l'intégration qui permet de remplacer la somme, mais dans ce cas l'intervalle d'intégration peut éventuellement être $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_+^*$, etc. ;

— même en intégrant sur des segments, des passages à la limite peuvent naturellement faire intervenir des intervalles qui n'en sont pas ; par exemple, il serait tendant de dire que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t$, étant donné que : $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty}[0,n] = \mathbb{R}_+$, et : $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}$; mais pour cela, encore faut-il que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t$ ait un sens.

L'ensemble des motivations ci-dessus n'est pas exhaustif.

Pour définir l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle de la forme $[a,b[$ (où b est un réel ou $+\infty$), nous utiliserons un passage à la limite :

$$\int_a^b f = \lim_{x\to b^-} \int_a^x f,$$

sous réserve que la limite existe ; le cas échéant, nous parlerons d'intégrale *convergente*. Si l'intervalle est de la forme $]a,b]$ avec $a \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$, on procède de même : $\displaystyle\int_a^b f = \lim_{x\to a^+}\int_x^b f$. La définition pour une intégrale sur $]a,b[$ est légèrement différente*.

Exercice 1. Soit $s \in \mathbb{R}$. Discuter la convergence des intégrales suivantes, en utilisant la définition ci-dessus :

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}\mathrm{d}t,\ \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^s},\ \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^s},\ \int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t,\ \int_1^e \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1-\ln(t)}},\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(t)\mathrm{d}t,\ \int_1^{+\infty}\frac{\sin(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}e^{\cos(\sqrt{t})}\mathrm{d}t,$$

et donner leur valeur en cas de convergence.

L'interprétation visuelle comme aire algébrique reste valable. Dans l'idée, pour qu'une intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge, il suffit que f décroisse « suffisamment vite » au voisinage de $+\infty$ pour que l'aire sous la courbe y soit « négligeable ». Cette interprétation très informelle n'a bien sûr aucune valeur de démonstration, mais elle permet déjà de pressentir les intégrales qui convergent ou non.

Exercice 2.

1. Pour chacune de ces intégrales, se les représenter graphiquement (même très grossièrement), et en déduire pour lesquelles il est ÉVIDENT que l'intégrale ne converge pas (sans démonstration) :

$$\int_0^{+\infty}(\sin(t))^2\mathrm{d}t,\ \int_0^{+\infty}\sin(t)\mathrm{d}t,\ \int_1^{+\infty}\frac{(\sin(t))^3}{t}\mathrm{d}t,\ \int_0^{+\infty}(t^3-2t+6)\mathrm{d}t,\ \int_0^{+\infty}\frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t,\ \int_0^{+\infty}\lambda\mathrm{d}t,$$

   où $\lambda \in \mathbb{R}$. Ne rien conclure si ce n'est pas « évident ».
2. Démontrer vos conjectures si possible.

De plus, on sent que la formalisation de cette intuition peut se faire *via* un théorème de comparaison, comme pour les séries numériques : c'est en effet le moyen rigoureux de définir ce que, dans la proposition : « être suffisamment petit pour que l'intégrale converge », l'on entend par « suffisamment petit ». Ce théorème de comparaison aura le même intérêt que pour les séries : en général on ne sait pas calculer explicitement une intégrale (pire encore : parfois, on ne *peut* pas, un exemple fameux étant $x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$ qui ne peut pas s'exprimer grâce à des sommes, produits, exponentiations et compositions de fonctions usuelles), et donc le calcul direct et explicite de $\displaystyle\lim_{x\to b^-}\int_a^x f$ est hors de portée. Une comparaison permet donc d'avoir la convergence de l'intégrale de manière indirecte.

Ainsi que ces intégrales généralisées soient simples d'emploi dans les calculs, nous généraliserons toutes les propriétés de base connues dans le cas d'un segment, ainsi que l'importante formule de l'intégration par parties ou du changement de variable.

2 Passages à la limite sous le signe intégrale, intégrales à paramètres

Si l'on s'intéresse à des calculs de limite de la forme : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_I f_n(t)\mathrm{d}t$, dans le cas où l'intégrale n'est pas explicitement calculable, une envie très naïve serait de tout simplement passer à la limite

*. Cette définition de l'intégrale sur un intervalle quelconque est assez laborieuse, mais c'est celle au programme. Je donnerai aussi la « vraie » définition éventuellement selon mon avancée dans le traitement du chapitre.

dans l'intégrale, en calculant d'abord pour tout $t \in I$: $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)$, puis en intégrant le résultat obtenu. Autrement dit, on aimerait écrire :

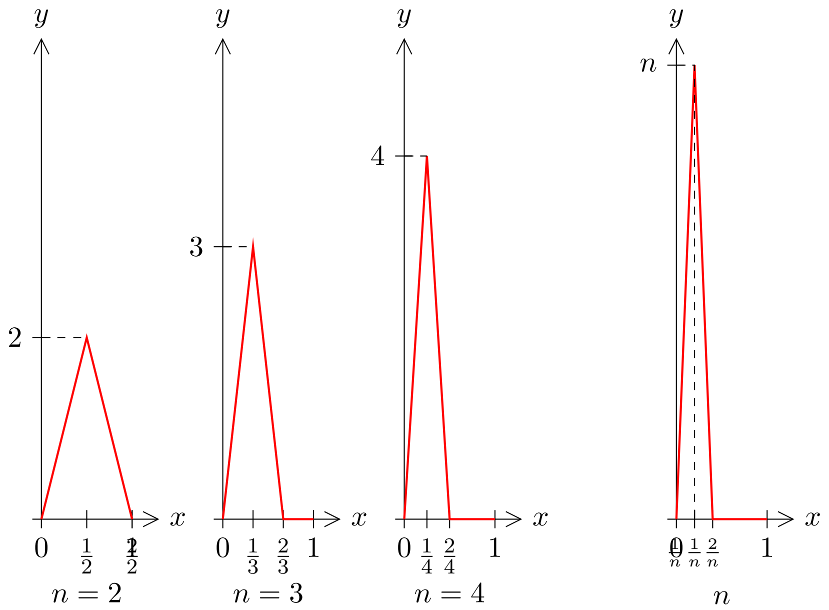
$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(t)\mathrm{d}t = \int_I \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t. \qquad (*)$$

C'est ce qu'on appelle un *problème d'interversion*. Oui, c'est un problème, parce qu'on se heurte très vite à des contre-exemples de cette identité, même quand les limites existent et sont finies :

Exercice 3. Montrer :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 nt^n\mathrm{d}t \neq \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} nt^n\mathrm{d}t, \quad \text{et :} \quad \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 n^2e^{-nx}\mathrm{d}x \neq \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} n^2e^{-nx}\mathrm{d}x.$$

Le problème à l'origine de ces deux contre-exemples, qui empêche l'égalité $(*)$ d'être vraie, est le même. Nous allons le mettre en valeur avec un exemple plus visuel. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, considérons la fonction f_n définie sur $[0,1]$ dont le graphe est le suivant (je représente d'abord les cas $n \in \{2,3,4\}$, puis n arbitraire) :



Alors : $\forall x \in [0,1]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ (pour $x = 0$ c'est immédiat, et pour $x \in]0,1]$ on note que pour n suffisamment grand, x est « à droite du pic » et donc $f_n(x) = 0$), et donc : $\displaystyle\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 0\mathrm{d}x = 0$. Or, d'après la formule : Aire d'un triangle $= \frac{\text{Base}\times\text{Hauteur}}{2}$, on a : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \frac{\frac{2}{n}\times n}{2} = 1$, donc : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = 1$. Or : $1 \neq 0$, donc on a bien démontré : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x \neq \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$.

Exercice 4. Donner une description analytique de f_n pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, et vérifier soigneusement les affirmations ci-dessus (à savoir : $\forall x \in [0,1]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$, et : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = 1$).

Analysons pourquoi ce contre-exemple en est un : on note que toute la contribution à l'intégrale des f_n se concentre en un « pic » de plus en plus resserré. Or, quand on passe à la limite quand $n \to +\infty$, le pic est resserré en un point, et vous savez depuis le cours de MPSI que les intégrales ignorent la valeur des fonctions en des points isolés : ainsi toute la masse qui était concentrée en un pic s'évapore subitement en passant à la limite. C'est la source des contradictions ci-dessus.

Exercice 5. Se représenter les graphes des applications $t \mapsto nt^n$ et $x \mapsto n^2 e^{-nx}$ sur [0,1], et reconnaître la formation du fameux « pic ». Comment le mathématiser ?

On a deux moyens d'y remédier :

— en ajoutant l'hypothèse supplémentaire que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément (nous avons en effet souligné que cette notion de convergence empêchait l'apparition de pics) ;

— en imposant une borne *simultanée* à toutes les fonctions f_n, pour les empêcher de prendre des valeurs arbitrairement grandes.

Ces deux moyens d'y remédier impliquent deux théorèmes d'interversion, c'est-à-dire deux théorèmes dont la conclusion permet d'écrire $(*)$. L'un d'eux est le *théorème de convergence dominée*, qui est l'un des théorèmes d'analyse les plus utiles et importants de classes préparatoires. Le terme « dominée » renvoie à l'idée d'une borne simultanée pour toutes les fonctions f_n.

Lorsque ces deux théorèmes ne seront pas applicables, un autre recours (qui est le même qu'en 1re année) est un usage adéquat du théorème des gendarmes : on encadre l'intégrande, puis par croissance de l'intégrale on en déduit un encadrement de l'intégrale.

Exercice 6. Déterminer, avec le théorème des gendarmes, les limites des intégrales suivantes quand $n \to +\infty$:

(a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{nt}}{\sqrt{1+t^3}}\mathrm{d}t$, (b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sin(t)e^{-nt}}{1+\sqrt{t}}\mathrm{d}t$, (c) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln(t)}{n+t}\mathrm{d}t$, (d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1+t^n}}\mathrm{d}t$, (e) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{n}} \frac{e^{-t/n}}{t^2}\mathrm{d}t$.

Exercice 7.

1. Montrer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^n \mathrm{d}t = 0$.
2. Montrer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x = 0$ (voir les commentaires de la section 1 pour la définition de cette intégrale malgré le problème de définition en 1). ← page 1

Néanmoins ces deux exercices (surtout le dernier) nécessitent des majorations techniques et parfois tortueuses. Cela échoue dès que l'intégrande est trop compliqué. Le théorème de convergence dominée apportera beaucoup de confort dans ces calculs de limites.

Le calcul de telles limites a déjà un intérêt en soi, mais il peut aussi servir en sens inverse : étant donnée une intégrale $\displaystyle\int_I f$ qu'on ne sait pas calculer, on peut essayer de l'obtenir comme une limite d'intégrales $\displaystyle\int_I f_n$ où les fonctions f_n sont « simples », de sorte que ces intégrales soient calculables, et donc la limite ℓ de cette suite d'intégrales aussi. Par unicité de la limite : $\ell = \displaystyle\int_I f$. On peut par exemple obtenir ainsi la valeur de l'intégrale de Gauß $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$.

☆ **Exercice 8.** On ADMET : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$. En déduire la valeur de l'intégrale de Gauß (*indication : se ramener* via *changement de variable à une intégrale de Wallis, et utiliser ce que vous aviez démontré là-dessus dans vos exercices de 1re année*).

Ayant à disposition des théorèmes permettant d'écrire sous quelle condition suffisante l'égalité $(*)$ est vraie, et en utilisant la caractérisation séquentielle de la limite, nous pourrons obtenir des énoncés analogues où l'entier n tendant vers $+\infty$ est remplacé par une variable réelle x tendant vers n'importe quel $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Puisque toutes les notions de régularité (continuité, dérivabilité) se définissent par un passage à la limite, nous en déduirons des énoncés de régularité des fonctions de la forme :

$$g : x \mapsto \int_J f(x,t)\mathrm{d}t$$

qu'on appelle des intégrales à paramètres, le réel x étant ci-dessus le *paramètre* de l'intégrale. La problématique sera essentiellement : est-ce que la fonction g hérite des propriétés de la fonction f ? Si g est dérivable, est-ce que sa dérivée s'exprime en fonction de la dérivée par rapport à x de f ? Nous en déduirons une nouvelle méthode de calculs des intégrales : même si $g(x) = \int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ n'est pas calculable par les méthodes standards, on espère néanmoins que $g'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t$ l'est (la dérivation de f par rapport à x pouvant faire disparaître un quotient gênant, ou remplacer un logarithme ou une arc tangente par une fraction rationnelle, etc.), de sorte que g' soit explicite, et donc g aussi après intégration.

Exercice 9. On admettra que l'égalité : $\forall x \in I,\ \frac{\partial}{\partial x}\int_J f(x,t)\mathrm{d}t = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t$ est valable, *uniquement dans cet exercice* (ce n'est pas le cas en toute généralité !).

1. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}t^x\mathrm{d}t = \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$ (l'intégrande se prolonge par continuité en 0 et 1 et il n'y a donc pas de problème de définition).
2. Montrer : $\forall (a,b) \in]1,+\infty[^2,\ \int_0^\pi \ln\left(\frac{b-\cos(t)}{a-\cos(t)}\right)\mathrm{d}t = \pi\ln\left(\frac{b+\sqrt{b^2-1}}{a+\sqrt{a^2-1}}\right)$.

Exercice 10. Trouver un contre-exemple à l'égalité : $\frac{\partial}{\partial x}\int_J f(x,t)\mathrm{d}t = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t$. Vous pouvez vous inspirer de l'un des contre-exemples donnés pour l'égalité $(*)$ de cette section.

Plusieurs valeurs d'intégrales remarquables (l'intégrale de Gauß $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$ ou de Dirichlet $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$) s'obtiennent par cette approche ! On ajoute intelligemment une variable x dans l'intégrande, on dérive pour se ramener à une intégrale calculable, et on intègre le résultat obtenu.

3 Résumé : objectif du chapitre

Nous définirons les intégrales sur des intervalles quelconques, en généralisant tous les résultats connus dans le segment des intégrales sur des segments. Un peu de prudence est nécessaire, du fait que les intégrales sur des intervalles quelconques n'existent pas toujours (puisque, on l'a vu, c'est défini comme des limites : encore faut-il qu'elles existent). Nous donnerons des moyens pratiques de montrer l'existence de ces intégrales, dont certains rappelleront l'étude des séries numériques (théorèmes de comparaison). Nous donnerons des exemples de référence (fonction Γ d'Euler, intégrale de Dirichlet).

Dans un second temps, nous apporterons des réponses au problème d'interversion : « sous quelles hypothèses l'égalité suivante est-elle valable : $\lim_{n\to+\infty}\int_I f_n(t)\mathrm{d}t = \int_I \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t$? ». L'une de ces réponses est le fameux théorème de convergence dominée, qui admet également pour corollaires des théorèmes de régularité des intégrales à paramètres, c'est-à-dire : sous certaines hypothèses, l'application $g : x \mapsto \int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ hérite de la régularité de f par rapport à x, et dans le cas dérivable on a : $\frac{\partial}{\partial x}\int_J f(x,t)\mathrm{d}t = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t$.

Forts de tous ces théorèmes, nous pourrons en exercice étudier voire calculer plusieurs intégrales remarquables :

$$\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t, \quad \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t,$$

mais aussi nous reviendrons sur la remarque introductive selon laquelle l'intégration sert à *moyenner*, ou à *régulariser* des fonctions. C'est ce qui fait le succès de plusieurs transformations : notamment la transformée de Laplace vue en SII, mais aussi la *transformée de Fourier* d'une fonction f :

$$\hat{f} : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt}\mathrm{d}t,$$

ou le *produit de convolution* de deux fonctions f et g :

$$f * g : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\mathrm{d}t,$$

qu'on peut interpréter comme une moyenne de f pondérée par g, en quelque sorte. Ce moyennage permet de lisser f, par exemple : si g est de classe C^∞, alors $f * g$ l'est aussi (même si f ne l'est pas). Grâce à cette opération de lissage, nous obtiendrons plusieurs résultats d'approximation intéressants, dont le théorème de Weierstraß dans un chapitre ultérieur (toute fonction continue sur un segment est limite uniforme de fonctions polynomiales).