Présentation des chapitres de mathématiques de MP

Dérivation et intégration des fonctions vectorielles

Lorsque l'énoncé d'un exercice est accompagné du symbole « ✪ » dans la marge, cela signifie qu'il ne peut pas être traité avec toute la rigueur mathématique attendue tant qu'on est cantonné aux outils de MPSI (j'indique alors clairement ce qu'il est nécessaire d'admettre). Vous pourrez essayer de les traiter à nouveau, rigoureusement, au moment adéquat l'année prochaine.

1 Fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé

Ce chapitre complète l'étude des fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans un K-espace vectoriel normé E. Cette étude fut déjà faite en grande partie dans le chapitre de topologie, et elle se résumait en quelques mots ainsi : une fonction $f : I \to E$ vérifie une certaine propriété $\mathcal{P}$ si et seulement si ses composantes $f_i : I \to K$ dans une base de E vérifient $\mathcal{P}$. Ce qui est bien commode, puisque cela nous ramène à une situation connue et plus simple (l'espace ambiant de départ et d'arrivée est de dimension 1).

Cette équivalence fut établie pour : avoir une limite, être continue, être bornée, être lipschitzienne. Nous établissons dans ce chapitre pour la dérivabilité (que nous aurons bien sûr définie dans ce cadre) : si $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ est une base de E, et si : $\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\vec{e}_i$, alors f est dérivable si et seulement si f est dérivable pour tout i ; le cas échéant, on a : $\forall x \in I,\ f'(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(x)\vec{e}_i$. En particulier, si $A : I \to \mathrm{M}_n(K)$ est une application dérivable, il suffit de dériver toutes ses composantes $a_{i,j} : I \to K$ pour obtenir A'.

Cette simplicité permet de généraliser plusieurs théorèmes connus pour les fonctions réelles ou complexes, en raisonnant coordonnée par coordonnée : caractérisation des fonctions dérivables constantes, théorème de la limite de la dérivée, etc. De même pour la classe C^k plus généralement.

Seulement il n'est pas toujours agréable de calculer la dérivée d'une fonction vectorielle en explicitant ses coordonnées. Par exemple, si A et B sont deux applications de I dans $\mathrm{M}_n(K)$ et dérivables, est-on vraiment obligé de se casser la tête à calculer chaque composante du produit matriciel $A \cdot B$, puis de les dériver, pour en déduire $(A \cdot B)'$? À cet effet nous donnerons des formules de dérivation qui auront l'avantage d'être intrinsèques (c'est-à-dire ne nécessitant pas un choix de base), notamment concernant la dérivation de :

- la composition d'une application $f : I \to E$ avec une application linéaire ;
- la composition d'une application $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant k} : I \to \prod_{i=1}^{k} E_i$ avec une application k-linéaire (le produit matriciel en étant un cas particulier).

Nous verrons en particulier que toutes les compositions avec des applications bilinéaires se dérivent selon le modèle du produit $(uv)' = u'v + uv'$:

$$\langle f, g \rangle' = \langle f', g \rangle + \langle f, g' \rangle, \quad (\det_{\mathcal{B}}((f,g)))' = \det_{\mathcal{B}}((f',g)) + \det_{\mathcal{B}}((f,g')), \quad \text{etc.}$$

Le cas de la dérivation étant réglé, son *alter-ego* (l'intégration) aura aussi droit à sa généralisation aux applications continues par morceaux de I dans E, sans subtilité majeure.

2 Une fonction vectorielle remarquable : exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice

Les chapitres *Topologie des espaces vectoriels normés*, *Suites et séries de fonctions* et *Séries entières*, conjointement à celui-ci, permettent de définir et d'étudier la fonction exponentielle d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, ou d'une matrice carrée, en posant :

$$\forall f \in \mathrm{L}(E),\ \exp(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} f^n, \quad \forall M \in \mathrm{M}_p(K),\ \exp(M) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} M^n.$$

Exercice 1. Calculer $\exp(M)$ avec des exemples concrets de matrices M diagonales. Vérifier au moins dans ce cas que l'interprétation de la somme du membre de droite est facile.

Nous l'avons dit dans la présentation du chapitre sur les séries entières : l'intérêt de définir la fonction exponentielle sur $\mathrm{L}(E)$ ou $\mathrm{M}_p(K)$ est de pouvoir résoudre les mêmes problèmes dans ces espaces que dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, en espérant que les propriétés de l'exponentielle se préservent. Il serait impossible de résumer en peu de mots les nombreuses applications de l'exponentielle, mais en voici deux parmi d'autres pour illustrer mon propos :

— la résolution des équations différentielles linéaires ;

— la détermination des racines complexes de l'unité (et plus généralement des racines d^{es} de n'importe quel nombre complexe, mais pour simplifier la discussion je vais me limiter aux racines de l'unité).

Concernant le premier point : on sait en effet démontrer que les solutions de l'équation différentielle : $y' = ay+b$ (avec a et b deux fonctions continues) sont de la forme $y : t \mapsto e^{A(t)} \left(\lambda + \int_{\star}^{t} e^{-A(x)} b(x)\mathrm{d}x\right)$, où A est une primitive de a et λ une constante quelconque.

Exercice 2. Vérifier cette affirmation. Pour gagner du temps, on peut remarquer qu'elle se démontre très rapidement en multipliant l'égalité : $y'-ay = b$, par une fonction convenable, de sorte à reconnaître dans le membre de gauche la dérivée d'un produit de fonctions.

La clé, pour cela, est le fait que e^A ait pour dérivée ae^A.

Or nous verrons au chapitre *Équations différentielles linéaires* que TOUTE équation différentielle linéaire et TOUT système différentiel linéaire se ramènent à savoir résoudre : $Y' = AY + B$, où A et B sont des fonctions vectorielles à valeurs dans $\mathrm{M}_p(K)$ et $\mathrm{M}_{p,1}(K)$ respectivement (pour un certain entier naturel non nul p qui dépend de l'ordre des dérivées, ainsi que du nombre de fonctions inconnues, apparaissant dans l'équation ou le système), et Y une fonction vectorielle à déterminer. Suivant la discussion ci-dessus, il est raisonnable d'espérer que les solutions de l'équation $Y' = AY+B$ s'obtiennent encore une fois à l'aide de l'exponentielle, matricielle cette fois-ci.

Concernant le second point, je me permets une digression conceptuelle assez longue car, je pense, elle est instructive sur l'intérêt des morphismes en général : la raison pour laquelle l'exponentielle classique permet de produire si facilement des racines de l'unité provient du fait que ce soit un morphisme de groupes surjectif de $(\mathbb{R}, +)$ (ou $(\mathbb{C}, +)$) dans $(\mathbb{R}^*, \times)$ (ou $(\mathbb{C}^*, \times)$). Or un morphisme préserve relativement bien les « racines de l'élément neutre » (et même parfaitement bien si c'est un *isomorphisme*) dans un groupe [*]. Précisons ce qu'on entend par là :

Exercice 3. Soient G et H deux groupes, et f un morphisme de groupes de G dans H.

1. Soient $x \in G$ et $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On pose : $y = f(x) \in H$. Montrer que si : $x^d = 1_G$, alors : $y^d = 1_H$, et montrer que l'implication réciproque est fausse en général.
2. On conserve les notations de la question précédente, et on suppose de plus que f est *injectif* (uniquement dans cette question). Montrer : $x^d = 1_G \iff y^d = 1_H$.
3. On suppose dans cette question que G et H sont des groupes commutatifs, et que f est *bijectif.* Montrer que les ensembles $\mathbb{U}_{G,d} = \{x \in G \mid x^d = 1_G\}$ et $\mathbb{U}_{H,d} = \{y \in H \mid y^d = 1_H\}$ sont des groupes et qu'ils sont isomorphes pour tout $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Que reste-t-il de ce résultat si G et H ne sont pas supposés commutatifs ?

Autrement dit : si f est un isomorphisme alors, connaissant les racines d^{es} de l'unité de G, on en déduit celles de H (et inversement). Si f n'est pas bijectif, on a tout de même mieux que rien :

4. On suppose à présent que f est surjectif. Soient $y \in H$ et $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Montrer :

$$\mathbb{U}_{H,d} = \left\{ y \in H \mid \exists x \in G,\ \exists e \in \ker(f),\ y = f(x) \text{ et } x^d = e \right\}.$$

*. Le terme adéquat, qui sera défini l'an prochain, est qu'un isomorphisme préserve les *ordres* (finis) des éléments d'un groupe.

La dernière question de cet exercice nous dit, en substance : pour obtenir les racines d^{es} de l'unité dans H, il suffit de calculer les racines d^{es} des éléments du noyau de f, où f est un morphisme de groupes surjectif d'un groupe G dans H (une fois que c'est fait, on prend l'image par f des racines ainsi obtenues) : l'affaire est rentable **s'il est plus facile d'extraire des racines d^{es} dans G que dans H, et c'est souvent le cas si la loi de G est additive** ! (Quand la loi est additive, l'équation $x^d = e$ d'inconnue x s'écrit plutôt $dx = e$, et il suffit de « savoir diviser par d » pour en déduire x.) C'est ce qui explique l'apport de l'exponentielle dans ce cadre : c'est un morphisme de groupes surjectif de $(\mathbb{C}, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$, dont le noyau est $2i\pi\mathbb{Z}$. Par ce qui précède, pour obtenir les racines complexes d^{es} de l'unité, il suffit de savoir résoudre l'équation $dx = 2i\pi k$ d'inconnue $x \in \mathbb{C}$, ce qui est complètement trivial, puis de prendre l'image par l'exponentielle des solutions trouvées. On retrouve la description bien connue : $\mathbb{U}_d = \left\{ e^{\frac{2i\pi k}{d}} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

J'insiste sur le fait que la loi du groupe de départ est additive : c'est la clé qui rend tout plus simple dans $\mathbb{C}$ que dans $\mathbb{C}^*$, et qui fait de l'exponentielle un morphisme remarquablement utile.

Si je reformule ce problème classique en des termes si savants (parce qu'au fond, vous savez calculer des racines complexes d^{es} de l'unité sans parler de morphismes de groupes), c'est pour identifier ce dont on a réellement besoin pour, ensuite, faire la même chose dans $\mathrm{M}_p(K)$ voire dans tout anneau [†] : si l'on disposait d'un morphisme de groupes f surjectif de $(\mathrm{M}_p(K), +)$ dans $(\mathrm{GL}_n(K), \times)$ dont on connaîtrait le noyau, il suffirait de savoir résoudre l'équation $dM = E$, avec $E \in \ker(f)$ et $M \in \mathrm{M}_p(K)$ l'inconnue, pour en déduire les solutions de l'équation $N^d = \mathrm{I}_p$ d'inconnue $N \in \mathrm{GL}_p(K)$: il suffirait en effet de prendre l'image par f des solutions de $dM = E$. Comme un morphisme qui convient est l'exponentielle dans le cas réel ou complexe, il est naturel d'espérer que l'exponentielle matricielle soit le morphisme recherché.

À la lumière de cette discussion, on comprend que si l'on souhaite définir l'exponentielle matricielle afin de résoudre des équations différentielles linéaires ou extraire des racines d^{es} dans $\mathrm{M}_n(K)$ (et encore ! je rappelle que je n'ai choisi que deux des applications possibles de l'exponentielle matricielle ; des motivations parfaitement complémentaires de la seconde auraient été possibles, notamment en géométrie), nous devons étudier :

— la dérivation de l'application $t \mapsto e^{A(t)}$ où A est une application dérivable à valeurs matricielles : obtient-on $t \mapsto A'(t)e^{A(t)}$? peut-on s'en servir pour résoudre des équations différentielles ?

— la propriété de morphisme de l'exponentielle matricielle : a-t-on toujours l'identité $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$? que peut-on en tirer comme conséquences ?

Nous verrons qu'il apparaît des complications du fait que $\mathrm{M}_p(K)$ ne soit pas un anneau commutatif. Les exercices suivants l'illustrent :

Exercice 4. On pose : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!}$, $\mathrm{sh}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

2. ☆ En déduire : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\exp(tA) = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(t) & \mathrm{sh}(t) \\ \mathrm{sh}(t) & \mathrm{ch}(t) \end{pmatrix}$. Comparer $t \mapsto \exp(tA)$ et $t \mapsto A\exp(tA)$. *On ne se souciera pas, pour le moment, des questions de convergence.*

3. Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. A-t-on l'égalité : $\exp\left(B + B^\top\right) = \exp(B)\exp\left(B^\top\right)$?

†. Vous trouverez, dans mes feuilles d'exercices de l'an prochain, une démonstration que le groupe $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$ est cyclique lorsque p est un nombre premier impair, qui fait usage d'une exponentielle « p-adique ». En effet, montrer que ce groupe est cyclique revient à démontrer l'existence d'une racine primitive d^{e} de l'unité où $d = \mathrm{card}\left((\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times\right)$, et nous venons d'expliquer pourquoi l'exponentielle est une voie naturelle pour y parvenir.

Exercice 5. On pose : $\forall t \in \mathbb{R}$, $N(t) = \begin{pmatrix} 0 & t & t^2 \\ 0 & 0 & t^3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Comparer l'application $t \mapsto N'(t)\exp(N(t))$ et la dérivée de l'application $t \mapsto \exp(N(t))$ (dériver les matrices composante par composante). Que conclure ?

Tout n'est donc pas aussi simple que dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pas grave : nous résoudrons ces complications et apporterons des réponses satisfaisantes, bien que partielles, aux problèmes énoncés ci-dessus.

En plus de cela, le fil rouge de l'année de MP en algèbre linéaire s'appliquera également à l'exponentielle d'un endomorphisme ou d'une matrice, afin de simplifier son étude et son calcul : nous étudierons sa *réduction*.