Présentation des chapitres de mathématiques de MP

Espaces préhilbertiens réels et euclidiens

Le programme de 1re année définit le produit scalaire dans des espaces vectoriels abstraits, afin de les « géométriser », et que l'intuition héritée de la géométrie en dimension 2 ou 3 permette de résoudre des problèmes dans des espaces qui n'ont *a priori* rien à voir avec la géométrie au sens classique. Mais comme souvent en mathématiques, la théorie reste assez pauvre tant qu'on n'introduit pas des *applications* interagissant avec la structure géométrique qu'on a définie. Nous introduirons à cet effet :

— la notion d'endomorphisme adjoint ;

— les endomorphismes symétriques ou autoadjoints (c'est synonyme), et d'autres de la même veine en exercices ;

— les isométries.

1 Les isométries

Vous avez déjà entendu parler des isométries dans vos jeunes années de géométrie : ce sont les applications linéaires (quoique vous ayez vu quelques exemples qui ne le sont pas : les translations) qui conservent les distances et les angles non orientés. Avec le vocabulaire de géométrie de MP, une isométrie vectorielle f est un endomorphisme d'un espace euclidien $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ vérifiant :

$$\forall(\vec{x},\vec{y}) \in E^2, \quad \langle f(\vec{x}), f(\vec{y})\rangle = \langle \vec{x},\vec{y}\rangle\,, \tag{$*$}$$

ou de manière équivalente : $\forall \vec{x} \in E$, $\|f(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|$, avec $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. L'ensemble des isométries vectorielles de E est noté $\mathrm{O}(E)$.

Exercice 1. Vérifier l'équivalence des deux définitions. Pour cela, se souvenir des formules permettant d'exprimer une norme en fonction du produit scalaire associé, et inversement.

Exercice 2. Comprendre pourquoi l'égalité $(*)$ coïncide avec la définition « antique » d'une isométrie (application qui conserve les distances et les angles non orientés). Pour cela, vous devrez notamment vous demander comment $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle$ s'exprime en fonction de l'angle entre $\vec{x}$ et $\vec{y}$.

Exercice 3. Lorsque vous définissiez les isométries dans vos jeunes années, la précision « linéaire » n'apparaissait pas. Pour comprendre pourquoi :

1. Montrer que si f est une application de E dans E vérifiant $(*)$ et $f(\vec{0}) = \vec{0}$, alors f est linéaire (*indication : calculer* $\|f(\vec{x}+\lambda\vec{y}) - (f(\vec{x}) + \lambda f(\vec{y}))\|^2$ *avec un usage adéquat de* $(*)$).
2. Montrer que si f est une application de E dans E vérifiant $(*)$, alors f est affine (c'est-à-dire la composition d'une translation et d'une application linéaire).

Ainsi on ne « perd » pas d'isométries en omettant la précision « linéaire ».

Des exemples d'isométries vectorielles dans le plan ont déjà été donnés depuis le début de votre pratique de la géométrie : les symétries axiales et les rotations.

Exercice 4. Soient E un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E.

1. Montrer que la symétrie par rapport à F et parallèlement à $F^\perp$ est une isométrie vectorielle (*un dessin permet de se convaincre que la conservation des normes est évidente ; l'utiliser comme support à une démonstration rigoureuse*).
2. Montrer que la projection par rapport à F et parallèlement à $F^\perp$ n'est pas une isométrie vectorielle, sauf si $F = E$ (*là encore, un support visuel devrait aider votre intuition géométrique*).
3. Montrer que si G est un sous-espace vectoriel supplémentaire de F, mais différent de $F^\perp$ (pour que ce soit possible, cela implique en particulier que F n'est pas $\{\vec{0}\}$ ni E), alors la symétrie par rapport à F et parallèlement à G n'est jamais une isométrie vectorielle. Cette question est plus subtile que les précédentes.

L'objectif de l'étude des isométries en MP est de classifier les isométries en dimension 2 et 3 (sachant que la méthode employée permet en principe de faire de même en toute dimension), c'est-à-dire : toutes les décrire, et donner des critères simples pour les distinguer et les reconnaître (étant donnée une isométrie vectorielle f dont on donne une description analytique ou matricielle, comment savoir de quelle isométrie il s'agit ?).

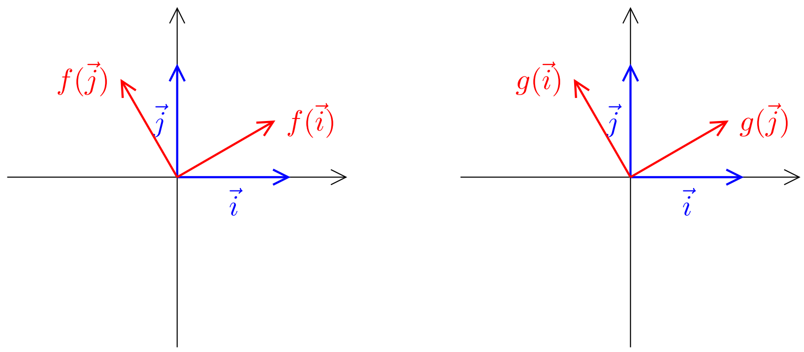
En dimension 2, nous verrons que les isométries connues depuis toujours (les rotations et les symétries axiales) sont les seules. En dimension 3, il y en a d'autres, mais elles restent obtenues à l'aide de compositions de rotations et de symétries d'un certain type (dites *orthogonales* : ce sont les symétries dont les caractéristiques géométriques sont orthogonales, dont il est question dans l'exercice 4). Pour distinguer les isométries entre elles, et en particulier trancher s'il s'agit d'une rotation ou d'une symétrie orthogonale (ou d'autre chose), on verra qu'il y a deux axes possibles :

— regarder la dimension de l'espace des points fixes : $\{\vec{x} \in E \mid f(\vec{x}) = \vec{x}\}$;

— regarder si l'*orientation* est préservée ou renversée.

L'orientation est une notion subtile à définir : nous ne le ferons pas ici, en nous basant seulement sur la compréhension intuitive que l'on vous a donnée jusqu'à présent. On dit qu'une isométrie préserve l'orientation si et seulement si elle ne change pas l'orientation d'une base (l'image d'une base orientée dans le sens direct, c'est-à-dire dans le sens trigonométrique, reste une base orientée dans le même sens). La figure de l'exercice suivant vous permet de regarder qu'effectivement, la simple question de l'orientation permet de trancher entre une rotation et une symétrie axiale, du moins dans le plan :

Exercice 5. Soient f et g deux isométries de $\mathbb{R}^2$. La figure suivante donne l'image par f et par g des vecteurs de la base canonique :



Donner la nature de f et g : rotation ou symétrie axiale ? Si c'est une rotation : dire comment obtenir son angle. Si c'est une symétrie axiale : représenter son axe, ou dire comment l'obtenir.

Mais en algèbre linéaire, il est souvent commode de caractériser matriciellement les propriétés. Cela fera partie de l'objet de la classification : reconnaître une isométrie à sa matrice représentative dans une base adéquate. Or les analogies matricielles de résultats géométriques sont possibles dès lors qu'on sait les traduire en termes de base, et il s'avère qu'il est possible de caractériser les isométries vectorielles à l'aide de leur action sur une base convenable : du fait qu'elles préservent les distances et les angles, elles préservent aussi les vecteurs unitaires et les relations d'orthogonalité.

Exercice 6. Soient E un espace euclidien et f un endomorphisme de E.

1. Montrer que si f est une isométrie et $\mathcal{B}$ une base *orthonormée* de E, alors $f(\mathcal{B})$ est une base orthonormée de E.
2. Étudier la réciproque : s'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que $f(\mathcal{B})$ soit une base orthonormée de E, peut-on conclure que f est une isométrie ?

Ainsi, suivant le principe selon lequel une propriété formulée en termes de bases a son pendant matriciel, nous obtiendrons notamment le résultat suivant :

Exercice 7. Soit f une isométrie de $\mathbb{R}^2$. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ (prenez la base canonique si vous le souhaitez : c'est presque sans importance).

1. Montrer qu'il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $x^2 + y^2 = 1$, et tel que la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}$ soit :
$$\begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix}, \quad \text{ou :} \quad \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}.$$
Vous verrez l'an prochain que pour savoir laquelle des deux matrices donne la matrice de f, cela dépend de l'orientation *de $f(\mathcal{B})$.*
2. En déduire qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}$ soit :
$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad \text{ou :} \quad \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$
Reconnaître, dans chaque cas, de quelle isométrie bien connue depuis votre tendre enfance il s'agit. Ne pas hésiter à *dessiner* l'image par f des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ dans chaque cas, pour y voir plus clair.

Plus généralement, l'étude des matrices d'isométries nous conduira à l'étude des matrices dites *orthogonales*, dont nous donnerons les propriétés.

Exercice 8. Revoir, dans votre cours de 1re année, les propriétés utilisant le principe nommé ci-dessus, selon lequel les propriétés formulées en termes de bases se lisent matriciellement ; et ce, afin de s'en imprégner.

Enfin, en exercice, nous verrons que l'ensemble $\mathrm{O}(E)$ des isométries vectorielles a pour avantage d'être un « petit » sous-ensemble de $\mathrm{GL}(E)$, aussi bien algébriquement (il peut être engendré par un nombre restreint d'endomorphismes) que topologiquement. De plus, on peut s'y ramener de toutes sortes de manières, ce qui le rend remarquable ; nous l'illustrerons et verrons en quoi c'est utile.

2 Les endomorphismes adjoints et autoadjoints

Vous avez peut-être été intrigués que, durant tout votre cours d'algèbre linéaire de 1re année, il n'ait jamais été question d'un lien entre l'application linéaire associée à une matrice (canoniquement ou non) et celle associée à sa transposée. Et pour cause : un tel lien existe en toute généralité (grâce à la notion d'espace dual, de base duale), mais il est assez peu pratique parce qu'il fait manipuler des applications linéaires dans des espaces vectoriels très différents ; c'est d'autant plus embêtant pour traduire en termes d'applications des égalités où apparaîtraient les deux matrices en même temps.

Néanmoins, lorsque E est un espace euclidien, la difficulté suggérée ci-dessus est résolue : à tout endomorphisme f de E, on peut associer un endomorphisme f^* de E (appelé endomorphisme adjoint de f) tel que, pour toute base *orthonormée* $\mathcal{B}$ de E, la matrice de f^* dans $\mathcal{B}$ soit la matrice transposée de f dans $\mathcal{B}$. Il peut être surprenant que la solution s'exprime joliment dans un cadre géométrique, alors qu'*a priori* la notion de matrice transposée ne nécessite pas de produit scalaire pour être définie.

Ainsi il devient possible de montrer avec souplesse des liens entre une matrice et sa transposée (par exemple, vous savez qu'une matrice et sa transposée ont même rang, mais y a-t-il un lien entre leurs images ? leurs noyaux ?), en passant par les endomorphismes ; l'intérêt des endomorphismes étant comme souvent qu'ils ne sont pas assujettis à une base donnée.

Pour avoir une idée du genre de lien que nous allons étudier : voir l'exercice ci-dessous.

Exercice 9. On munit $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel $(X, Y) \mapsto X^\top Y$. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer : $\ker(A) = \mathrm{im}\left(A^\top\right)^\perp$, et : $\mathrm{im}(A) = \ker\left(A^\top\right)^\perp$ (*commencer par une inclusion, et montrer l'égalité des dimensions*).
2. Retrouver ainsi le fait que A et $A^\top$ ont même rang.

Les résultats obtenus avec les endomorphismes adjoints sont d'autant plus intéressants lorsqu'ils sont associés à des matrices ayant une relation remarquable avec leurs transposées : c'est le cas en particulier des matrices symétriques et antisymétriques. Nous étudierons donc ces matrices (plus particulièrement les symétriques) grâce à ce cadre géométrique qui les rend très éclairantes. Un endomorphisme dont la matrice dans toute base orthonormée est symétrique, est lui-même appelé endomorphisme symétrique, ou autoadjoint (puisque cela correspondra à la situation où : $f = f^*$). Le résultat central de ce chapitre sera le *théorème spectral*, selon lequel il existe toujours une base orthonormée dans laquelle la matrice d'un endomorphisme *autoadjoint* est diagonale. Ce sont les meilleures bases qui soient : d'une part parce qu'en géométrie, tout est plus simple dans une base orthonormée (le produit scalaire s'exprime comme le produit scalaire usuel, de même la norme, etc.), et d'autre part parce qu'en algèbre matricielle tout est plus simple avec des matrices diagonales. Ce théorème sera appliqué en d'innombrables circonstances.

3 Résumé : objectif du chapitre

Après quelques rappels et compléments du programme de 1re année, nous définirons la notion d'endomorphisme adjoint, et verrons ce qu'elle entraîne. Parmi cela, il y a le lien avec la matrice transposée. Ainsi nous pourrons relier géométriquement toute matrice et sa transposée, ce qui permettra plus facilement de transférer les propriétés de l'une à l'autre.

Dans le cas particulier d'une matrice égale à sa transposée, les relations entre un endomorphisme et son adjoint seront d'autant plus instructives que nous pourrons en déduire un joli théorème de réduction, le théorème spectral, qui assure l'existence d'une base à la fois commode pour la géométrie (elle est orthonormée) et pour l'étude d'un endomorphisme associé à une matrice symétrique (dans cette base, la matrice de cet endomorphisme est diagonale).

Puis nous introduirons les isométries, donnerons quelques exemples remarquables (parmi lesquels les symétries orthogonales) et les représenterons matriciellement : la matrice d'une isométrie « se reconnaît à l'œil nu ». Cela donnera la notion de matrice *orthogonale*. En comprenant les isométries, nous comprendrons ces matrices, et réciproquement.

Nous étudierons plus spécifiquement les isométries du plan et de l'espace tridimensionnel, afin de montrer que les isométries étudiées dans vos jeunes années sont essentiellement les seules (rotations et symétries). En traduisant matriciellement cette classification, nous en déduirons des résultats de *réduction* des isométries (et donc des matrices orthogonales).