Présentation des chapitres de mathématiques de MP

Équations différentielles linéaires

1 La théorie

La théorie des équations différentielles linéaires est intégralement traitée en 1re année dans les deux cas particuliers suivants :

— les équations différentielles linéaires du 1re ordre ;

— les équations différentielles linéaires du 2e ordre, à coefficients constants, avec un second membre « sympathique » (exponentielle, fonction trigonométrique, application polynomiale).

Nous irons plus loin en seconde année en donnant la structure algébrique générale de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire, peu importe son ordre, ou d'un système différentiel linéaire. En particulier, nous verrons qu'un problème de Cauchy de la forme :

$$\left\{\begin{array}{rcl} y^{(p)} + a_{p-1}y^{(p-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y & = & b, \\ \forall i \in [\![0, p-1]\!],\ y^{(i)}(t_0) & = & y_i \end{array}\right.$$

où les $a_i : I \to K$ et $b : I \to K$ sont des applications continues, t_0 un réel fixé de l'intervalle d'étude I, et les y_i des scalaires fixés, admet toujours une *unique* solution.

Pour cette équation différentielle linéaire, comme pour toutes les autres (ainsi que pour les systèmes différentiels faisant intervenir plusieurs fonctions), l'idée sera de se ramener à une équation équivalente : $Y' = AY + B$, où A et B sont des fonctions vectorielles à valeurs dans $\mathrm{M}_p(K)$ et $\mathrm{M}_{p,1}(K)$ (pour un certain entier naturel non nul p qui dépend de l'ordre des dérivées, ainsi que du nombre de fonctions inconnues, apparaissant dans l'équation ou le système), et Y une fonction vectorielle à déterminer. Ce n'est pas très difficile, comme en atteste l'exercice suivant :

Exercice 1.

1. Soient $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ trois applications de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Définir des applications continues $A : \mathbb{R} \to \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ et $B : \mathbb{R} \to \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et une application dérivable $Y : \mathbb{R} \to \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ (où A et B ne dépendent pas de f, g et h), telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl} f'(t) & = & -2f(t) + g(t) + h(t) + 1 \\ g'(t) & = & f(t) - 2g(t) + h(t) + t \\ h'(t) & = & f(t) + g(t) - 2h(t) + t^2 \end{array}\right. \iff Y' = AY + B.$$

2. Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe C^3 sur $\mathbb{R}$. Définir une application continue $A : \mathbb{R} \to \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ et une application dérivable $Y : \mathbb{R} \to \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ (où A ne dépend pas de y), telles que : $y''' + y'' - 10y' + 8y = 0 \iff Y' = AY$.

3. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux applications de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Définir des applications continues $A : \mathbb{R} \to \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ et $B : \mathbb{R} \to \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et une application dérivable $Y : \mathbb{R} \to \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ (où A et B ne dépendent pas de f ni de g), telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{rcl} f''(t) & = & f(t) + g(t) + \exp(t) \\ g'(t) & = & f(t) + f'(t) + g(t) + \exp(-t) \end{array}\right. \iff Y' = AY + B.$$

Cette réduction illustre un phénomène général : quitte à augmenter la dimension, on peut ramener toute équation linéaire à une équation d'ordre 1. On peut ainsi résoudre entièrement certains systèmes différentiels :

Exercice 2. On pose : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

1. Trouver un vecteur non nul $\vec{x}_1 \in \mathbb{R}^3$ tel que : $u(\vec{x}_1) = 5\vec{x}_1$, et deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ *linéairement indépendants* $\vec{x}_2$ et $\vec{x}_3$ tels que : $u(\vec{x}_2) = -\vec{x}_2$, $u(\vec{x}_3) = -\vec{x}_3$.
2. Montrer que $\mathcal{B} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, et écrire la matrice représentative de u relativement à $\mathcal{B}$.
3. En déduire qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que : $A = PDP^{-1}$, avec : $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. *Utiliser la formule du changement de base.*

Soient f, g et h trois applications dérivables sur $\mathbb{R}$. On pose : $Y = \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}$, et : $Z = P^{-1}Y$.

4. Montrer : $Y' = AY \iff Z' = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} Z$, et en déduire une expression explicite des composantes de Z.
5. En déduire les solutions du système différentiel :

$$\begin{cases} f' &= f + 2g + 2h, \\ g' &= 2f + g + 2h, \\ h' &= 2f + 2g + h. \end{cases}$$

6. Adapter la méthode des deux questions précédentes au système différentiel :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} f'(t) &= f(t) + 2g(t) + 2h(t) + e^t, \\ g'(t) &= 2f(t) + g(t) + 2h(t) - e^{-t}, \\ h'(t) &= 2f(t) + 2g(t) + h(t) + 1. \end{cases}$$

7. En s'inspirant de ce qui précède, donner un énoncé général sur la forme des solutions d'une équation de la forme : $Y' = AY + B$ d'inconnue $Y : I \to \mathrm{M}_{p,1}(K)$ dérivable, lorsque $A \in \mathrm{M}_p(K)$ est semblable à une matrice diagonale D (notez bien que A n'est pas une application $I \to \mathrm{M}_p(K)$, ou du moins elle est constante) et $B : I \to \mathrm{M}_{p,1}(K)$ est une application continue.

La dernière question de cet exercice donne l'ensemble des solutions dans un cas très particulier (A à coefficients constants et semblable à une matrice diagonale). Mais cela ne donne pas encore le cas général. Nous l'obtiendrons grâce à un bel argument topologique (qui est, pour votre serviteur, une des plus belles applications de la topologie à un théorème hors de ce domaine), en remarquant que l'équation $Y' = AY + B$ munie d'une condition initiale $Y(t_0) = Y_0$ équivaut à l'équation :

$$\forall t \in I, \quad Y(t) = Y_0 + \int_{t_0}^{t} (A(x)Y(x) + B(x))\mathrm{d}x.$$

L'intérêt d'intégrer est de rajouter de la régularité et de faciliter les raisonnements impliquant des inégalités, puisque la dérivation est rarement compatible avec icelles.

Autrement dit, montrer l'existence et l'unicité d'une solution à l'équation différentielle équivaut à l'existence et l'unicité d'un point fixe de l'application $F : Y \mapsto \left(t \mapsto Y_0 + \int_{t_0}^{t} (A(x)Y(x) + B(x))\mathrm{d}x \right)$. Nous l'obtiendrons en montrant un analogue du théorème du point fixe de Banach-Picard (déjà montré en exemple dans le chapitre introductif), où il faut néanmoins s'adapter parce que F est une application de $\mathrm{C}^0(I, K)$ dans lui-même, et elle n'est pas nécessairement contractante. Ces complications techniques étant résolues, nous aurons démontré *le théorème de Cauchy linéaire* (existence et unicité d'une solution de $Y' = AY + B$ vérifiant une condition initiale prescrite), qui est le théorème majeur de ce chapitre.

Ce résultat est équivalent à la donnée d'une certaine bijection, qui est un isomorphisme lorsqu'il n'y a pas de second membre (c'est-à-dire lorsque B est identiquement nulle). Notons S l'espace vectoriel des solutions $Y : I \to \mathrm{M}_{p,1}(K)$ de $Y' = AY$, et fixons $t_0 \in I$. On a alors l'isomorphisme suivant, équivalent au théorème de Cauchy linéaire :

$$\Phi_{t_0} : \begin{cases} S & \to & K^p \\ Y & \mapsto & Y(t_0) \end{cases} .$$

C'est bien plus riche d'implications, parce qu'on a *rajouté de la structure.* Surtout : cela donne un isomorphisme entre un espace mal connu (que l'on cherche à expliciter, justement) et l'espace vectoriel par excellence K^p dans lequel on sait tout faire (notamment trouver des bases). Or un isomorphisme conserve tout ce qui est relatif à la structure : ainsi, au lieu de démontrer certains résultats concernant des fonctions dans S, nous aurons simplement à les démontrer dans K^n. On l'illustre dans l'exercice 4.

Exercice 3. Vérifier l'affirmation selon laquelle l'existence et l'unicité d'une solution $Y : I \to \mathrm{M}_{p,1}(K)$ dérivable de l'équation $Y' = AY + B$, avec la condition initiale $Y(t_0) = Y_0$ (ici $t_0 \in I$ et $Y_0 \in \mathrm{M}_{p,1}(K)$ sont fixés), équivaut à l'isomorphisme ci-dessus.

Exercice 4. Utiliser l'isomorphisme ci-dessus pour répondre aux questions suivantes.

1. Montrer : $\dim(S) = p$.
2. Soient $Y_1, \dots, Y_p$ des solutions de : $Y' = AY$. Montrer que $(Y_1, \dots, Y_p)$ est une base de S si et seulement s'il existe $t_0 \in I$ tel que la famille $(Y_1(t_0), \dots, Y_p(t_0))$ soit libre, si et seulement si la famille $(Y_1(t), \dots, Y_p(t))$ est libre pour tout $t \in I$.
3. Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathrm{M}_{p,1}(K)$. Montrer que l'application $W : t \mapsto \det_{\mathcal{B}}\left((Y_1(t), \dots, Y_p(t))\right)$, appelée *wronskien* de $Y_1, \dots, Y_p$, ne s'annule pas sur I ou est identiquement nulle.

Chaque question de cet exercice sera traitée en cours et aura des conséquences heureuses : la donnée de la dimension nous assure qu'il suffit de trouver p solutions indépendantes de $Y' = AY$, peu importe par quel moyen, pour en déduire une base de l'espace vectoriel des solutions, et la seconde question nous dit qu'il suffit de vérifier la liberté des évaluations en un seul réel pour avoir une base de l'espace de solutions ! C'est utile aussi bien en théorie qu'en pratique.

La troisième question semble dire la même chose que la seconde. Pas tout à fait : l'application W permet d'utiliser des techniques d'analyse pour avoir plus d'informations sur le comportement d'une famille $(Y_1, \dots, Y_p)$ *quand on fait varier* t, au contraire de l'isomorphisme Φ_{t_0} : c'est en effet une application continue (et même mieux) et à valeurs dans K, dont l'étude en tant que fonction de la variable réelle, donc une étude *analytique*, permet d'avoir des informations *algébriques* (annulation ou non d'un déterminant) !

2 La pratique

L'exercice 2 donne déjà des exemples de résolutions pratiques, que nous rendrons plus méthodiques. ← page 1 Pour une description exhaustive et élégante des solutions, plus facile à manipuler notamment dans les exercices théoriques, nous utiliserons l'exponentielle matricielle, et montrerons que les solutions de $Y' = AY + B$ s'écrivent exactement comme les solutions dans le cas réel $y' = ay + b$, *dans le cas où A est à coefficients constants.* Comme le calcul d'une exponentielle de matrice est élémentaire dans le cas diagonal, nous étudierons aussi plus spécifiquement le cas d'une matrice A semblable à une matrice diagonale.

Reste le cas des coefficients non constants, bien plus délicat, et que nous étudierons en général dans le cas particulier des équations différentielles scalaires d'ordre 2 : $y'' + ay' + by = c$, où a, b et c sont des applications continues. Nous le verrons, *le plus dur est de trouver* UNE *solution non triviale.* Pour y parvenir, la méthode privilégiée est la recherche de solutions sous la forme d'une fonction développable en série entière. Une fois qu'on a trouvé une solution non triviale f, on sait en produire une seconde linéairement indépendante g à l'aide d'une méthode qui n'est pas sans rappeler la méthode de variation de la constante, et (f, g) est alors une famille libre de l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle, qui est de dimension 2 comme on l'a dit plus haut ; c'est donc une base. L'exercice ci-dessous donne une idée de l'approche :

Exercice 5. Considérons a et b deux applications continues sur un intervalle I et à valeurs complexes. Soit f une application deux fois dérivable sur I, solution de l'équation différentielle $(E) : y''+ay'+by = 0$. Soit z une application deux fois dérivable sur I. On pose : $g = f \cdot z$.

1. Montrer que g est solution de (E) si et seulement si z' est solution d'une équation différentielle du premier ordre dont les coefficients dépendent de a et b
2. En déduire l'expression d'une solution g de (E) qui ne soit pas proportionnelle à f.

Cependant dans certains cas nous devrons nous contenter d'informations qualitatives sur les solutions, à défaut de pouvoir les expliciter.

3 Résumé : objectif du chapitre

Dans un premier temps, nous expliquerons comment toute équation et tout système différentiels se ramènent à une équation de la forme : $Y' = AY + B$, comme exposé ci-dessus ; nous serons plus précis sur le sens de « s'y ramener », afin de s'assurer que les solutions de $Y' = AY + B$ donnent *exactement* les solutions de l'équation différentielle de départ. Nous démontrerons alors le théorème de Cauchy linéaire, assurant l'existence et l'unicité d'une solution de cette équation vérifiant une condition initiale prescrite. Cela permet d'en déduire un isomorphisme riche en implications : il permettra notamment d'avoir la structure de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle (à commencer par sa dimension) et des conditions nécessaires et suffisantes simples pour qu'une famille de solutions soit une famille génératrice (dans le cas où c'est un espace vectoriel).

Ces résultats théoriques ont pour implication pratique que pour trouver toutes les solutions d'une équation différentielle, il suffit de trouver autant de solutions linéairement indépendantes que l'ordre de l'équation. La théorie de la réduction et l'exponentielle matricielle permettront d'expliciter les solutions dans le cas simple de coefficients constants. Lorsque les coefficients ne sont pas constants, on s'adapte : on trouve une ou plusieurs solutions à la main, le plus méthodique étant de les chercher sous forme de fonction développable en série entière ; une fois qu'on a une solution, trouver les suivantes est moins difficile. Pour trouver des solutions particulières dans le cas d'un second membre, on introduira la méthode de variation *des* constantes.

Nous donnerons enfin, en exercice, des situations où les solutions ne sont pas explicites, et nous verrons comment les outils introduits (les isomorphismes et le wronskien) permettent malgré tout d'avoir le comportement asymptotique des solutions (limite en $+\infty$, caractère borné, etc.).