Présentation des chapitres de mathématiques de MP

Convergence des suites numériques ou de fonctions

Dans ce chapitre préliminaire très court, nous donnerons quelques compléments sur les suites numériques, puis nous introduirons ce qu'est une suite de fonctions, avec l'outil de base nécessaire à l'étude d'une telle suite : la norme infinie.

Une difficulté en analyse est lorsqu'on veut étudier la convergence d'une suite complexe $(u_n)_{n\geqslant 0}$ pour laquelle on n'a pas la moindre idée de sa limite ℓ, ou lorsque son existence est déjà un problème en soi (c'est fréquemment le cas si ℓ est la somme d'une série, mais pas seulement). On contourne la difficulté grâce à une idée naturelle, et que nous devons formaliser : si $(u_{n+1}-u_n)_{n\geqslant 0}$ ou $(u_{n+p}-u_n)_{n\geqslant 0}$ est « suffisamment petit » pour n au voisinage de l'infini, alors il est tentant de penser que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge. L'avantage est qu'étudier la « taille » de ces quantités ne nécessite aucunement de connaître *a priori* la limite ℓ.

Nous formalisons ce qu'on entend par être « suffisamment petit ». Dans le cas de $(u_{n+1}-u_n)_{n\geqslant 0}$, il s'agit d'être suffisamment petit pour que la série télescopique $\sum\limits_{n\geqslant 0}(u_{n+1}-u_n)$ converge : c'est le lien suite-série, que vous connaissez déjà. C'est l'accent sur sa mise en œuvre qui est éventuellement inédit. En application, nous démontrons l'existence de la constante d'Euler-Mascheroni et le théorème du point fixe de Banach-Picard *via* l'utilisation de séries télescopiques adéquates.

Dans le cas de $(u_{n+p}-u_n)_{n\geqslant 0}$, c'est la notion de suite de Cauchy qui permet de formaliser le fait d'être suffisamment petit pour que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge. Une suite est de Cauchy si $u_{n+p}-u_n$ est arbitrairement petit (c'est-à-dire : plus petit en valeur absolue qu'un réel strictement positif $\varepsilon>0$ quelconque) pour n suffisamment grand (c'est-à-dire : au-delà d'un certain rang N), et UNIFORMÉMENT : le rang N ne doit pas dépendre de p. Cela se quantifie ainsi :

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\geqslant N,\ \forall p\in\mathbb{N},\quad |u_{n+p}-u_n|\leqslant\varepsilon.$$

Cela n'équivaut pas à la convergence de $(u_{n+p}-u_n)_{n\geqslant 0}$ pour tout $p\in\mathbb{N}$ (puisque dans ce cas, le rang N au-delà duquel $|u_{n+p}-u_n|$ est inférieur à $\varepsilon>0$ dépend éventuellement de p).

Exercice 1.

1. Montrer que la suite $(\ln(n))_{n\geqslant 1}$ n'est pas de Cauchy alors que pour tout $p\in\mathbb{N}$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}(\ln(n+p)-\ln(n))=0$.
2. Soit $\alpha\in]0,1[$. Faire la même vérification avec la suite $(n^\alpha)_{n\geqslant 0}$.

J'insiste sur le côté *uniforme* de la majoration par ε (indépendance en p du rang N), puisque ce mot reviendra très souvent cette année et sera la clé pour avoir de bons théorèmes.

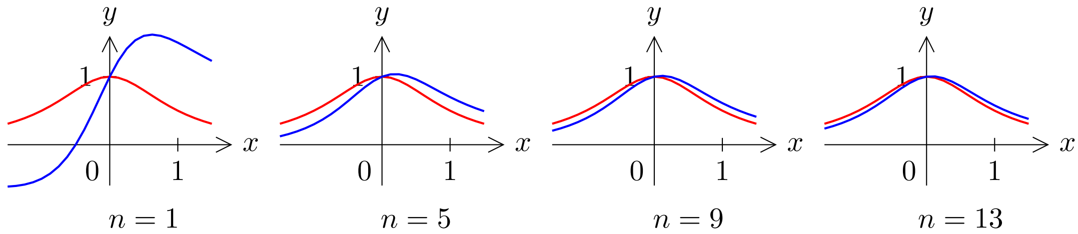
Nous démontrerons alors qu'une suite de Cauchy réelle ou complexe est nécessairement convergente, ce qui fournira une nouvelle approche pour démontrer la convergence de suites sans manipuler la limite candidate ℓ. En application, nous (re)démontrerons que la convergence absolue d'une suite numérique implique sa convergence.

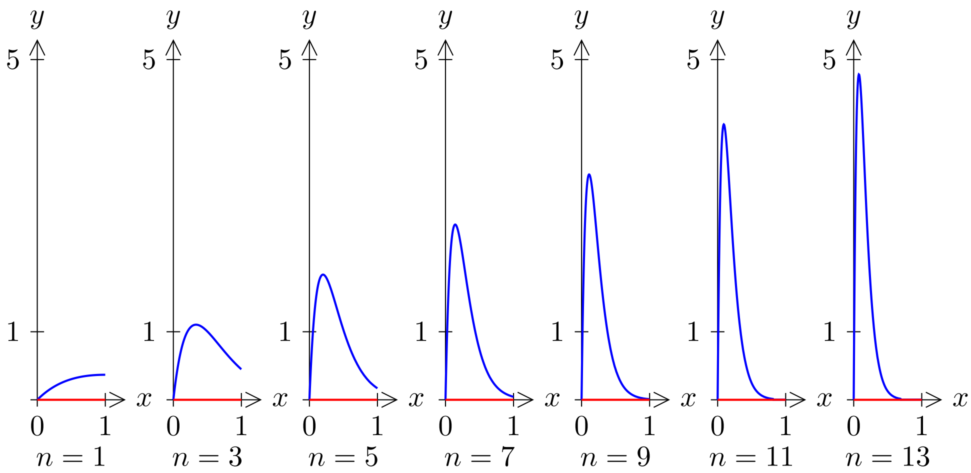
La seconde partie de ce chapitre préliminaire introduira les suites de fonctions qui, sans grande surprise, concernent des fonctions dépendant d'un paramètre entier n, et dont on étudie le comportement quand $n\to+\infty$. Nous définirons la convergence d'une telle suite ; plus précisément, il sera question de convergence *simple* ou *uniforme* : ici, la convergence uniforme de $(f_n : I\to K)_{n\geqslant 0}$ vers une fonction $f : I\to K$ signifie que la majoration de $|f_n(x)-f(x)|$ par ε est vraie au-delà d'un certain rang N indépendant de $x\in I$:

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\geqslant N,\ \forall x\in I,\quad |f_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon.$$

Nous nous efforcerons de donner une compréhension intuitive de ce qu'est la convergence uniforme, afin de la reconnaître à l'œil nu dans les cas simples ; on retiendra notamment qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers f si le graphe de f_n se rapproche indéfiniment du graphe de f, tandis qu'elle ne converge pas uniformément (mais simplement) lorsqu'un maximum qui se déplace quand n varie ; on parle couramment de « bosse glissante » pour qualifier ce phénomène.

Ci-dessous nous présentons un exemple visuel de suite de fonctions uniformément convergente, et un autre où ce n'est pas le cas (le graphe rouge est celui de la fonction f qui serait la seule limite candidate, le bleu est celui de f_n) :





La convergence simple de $(f_n : I \to K)_{n \geqslant 0}$ vers $f : I \to K$ signifie simplement (hé oui) que l'on a : $\forall x \in I,\ f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$. En termes epsilonesques, cela revient à prendre les quantificateurs ci-dessus, mais en mettant « $\forall x \in I$ » en début de ligne (en particulier, N peut dépendre de x).

Une problématique récurrente en analyse est : si $(f_n)_{n \geqslant 0}$ converge (uniformément ou simplement) vers une fonction f, est-ce que la fonction f hérite des propriétés de la fonction f_n ? Nous ne traiterons que très partiellement cette question dans ce chapitre, reléguant la plupart des problématiques et des théorèmes qui y répondent au chapitre *Suites et séries de fonctions* (page **??**), néanmoins l'interprétation graphique ci-dessus, et ses deux exemples, rendent acceptable l'intuition suivante : c'est en cas de convergence uniforme que le graphe de f et le graphe de f_n semblent suffisamment proches pour partager des propriétés de régularité : par exemple, en cas de convergence uniforme, on imaginerait mal f_n être continue, c'est-à-dire avoir un graphe qui se trace sans lever le stylo, tandis que le graphe de f serait en deux tenants. Ainsi nous montrerons que la réponse à la question précédente est positive dans le cas de la convergence uniforme d'une suite de fonctions continues : la limite reste continue. Ce n'est pas le cas si l'on n'a pas convergence uniforme :

Exercice 2.

1. Soit $I = [0,1]$. On pose : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \forall x \in I,\ f_n(x) = x^n$. Montrer que $(f_n)_{n \geqslant 1}$ converge simplement sur I vers une fonction f qui n'est pas continue sur I (et pourtant, f_n est continue pour tout entier $n \geqslant 1$).
2. Soit $a \in [0,1[$. On prend cette fois-ci : $I = [0, a]$. Montrer que $(f_n)_{n \geqslant 1}$ converge uniformément (et simplement) sur I vers une fonction f, et comparer les régularités de f_n pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et de f.

On retiendra, aussi bien pour les suites de Cauchy que pour les suites de fonctions, le principe selon lequel ce sont les majorations uniformes qui permettent d'avoir des théorèmes d'analyse fins. Ce chapitre est surtout pour l'illustrer et vous y préparer mentalement.