Familles sommables

Les familles sommables seront revues (ou plutôt vues) cette année. Tout ce qui suit ne donne que les définitions et propositions nécessaires au traitement du devoir des vacances d'été.

Dans toute cette note, J est un ensemble en bijection avec $\mathbb{N}$ (c'est-à-dire un ensemble dit *dénombrable*). Pour de tels exemples, hormis $\mathbb{N}$, vous pouvez songer aux ensembles suivants : $2\mathbb{N}$, $2\mathbb{N}+1$ (ou plus généralement : n'importe quelle partie infinie de $\mathbb{N}$), ou encore :

$$\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Q}, \quad \mathbb{N}\times\mathbb{N}, \quad A\times B \ \text{ (avec } A \text{ et } B \text{ dénombrables).}$$

Pour la plupart de ces ensembles, l'existence d'une bijection avec $\mathbb{N}$ n'est pas évidente et nous la démontrerons. Dans le cadre du devoir des vacances d'été, J sera en général $\mathbb{P}$ ou $(\mathbb{N}\setminus\{0,1\})\times\mathbb{P}$, qui sont en bijection avec $\mathbb{N}$ (non trivialement).

La notion de famille sommable permet de donner une définition très confortable d'une somme $\sum\limits_{x\in J} x_j$ indexée par J, où $(x_j)_{j\in J}$ appartient à $[0,+\infty]^J$ ou $\mathbb{C}^J$ (par définition : $[0,+\infty] = \mathbb{R}_+\cup\{+\infty\}$). Je parle de définition « confortable » au sens où les opérations classiques sur les sommes à support fini (celles que vous manipulez depuis toujours), que nous récapitulerons ci-dessous, restent valables.

Définitions

On définit la somme d'une famille $(x_j)_{j\in J}$ d'éléments de $[0,+\infty]$ ainsi :

$$\sum_{j\in J} x_j = \sup\left\{\sum_{j\in K} x_j \mid K\subseteq J,\ K \text{ fini}\right\} \in [0,+\infty].$$

Cette définition laisse penser que la valeur de la somme ne dépend pas de l'ordre dans lequel on somme, au contraire de la somme d'une série $\sum\limits_{n\geqslant 0} x_n$ (où l'on somme en commençant par x_0, x_1, x_2, etc.).

Il y a trois cas où l'interprétation de cette somme ne pose aucun problème :

— je me suis placé dans le cas où J est en bijection avec $\mathbb{N}$, et en particulier est infini, parce que lorsque J est fini : la définition ci-dessus donne la même somme qu'au sens naïf ;

— si $J=\mathbb{N}$, alors : $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_n$;

— s'il existe $j\in J$ tel que : $x_j=+\infty$, alors : $\sum\limits_{j\in J} x_j = +\infty$.

Dans les autres cas (ou quand $(x_j)_{j\in J}$ n'est pas à valeurs dans $[0,+\infty]$), manipuler voire calculer cette somme nécessite les formules données plus bas, surtout le théorème de sommation par paquets.

On dit alors que la famille $(x_j)_{j\in J}$ est *sommable* si : $\sum\limits_{j\in J} x_j < +\infty$. Lorsque $J=\mathbb{N}$, cela équivaut à la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} x_n$.

La situation est différente si $(x_j)_{j\in J}$ est une famille de nombres complexes (et c'est ce que je suppose à présent) : on définit la sommabilité AVANT de définir la somme. On dit que la famille $(x_j)_{j\in J}$ est *sommable* si la famille de nombres réels positifs $(|x_j|)_{j\in J}$ est sommable, c'est-à-dire si : $\sum\limits_{j\in J} |x_j| < +\infty$.

Lorsque $J=\mathbb{N}$, cela équivaut à la convergence absolue de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} x_n$.

Si $(x_j)_{j\in J}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$ et sommable, alors on sait démontrer sans trop de peine que les familles de réels **positifs** $(x_j^+)_{j\in J}$ et $(x_j^-)_{j\in J}$ sont sommables, où l'on a posé : $\forall j\in J$, $x_j^+ = \max(x_j,0)$, $x_j^- = \max(-x_j,0)$. On pose alors : $\sum\limits_{j\in J} x_j = \sum\limits_{j\in J} x_j^+ - \sum\limits_{j\in J} x_j^-$, ces deux dernières sommes étant définies suivant la définition ci-dessus.

Si $(x_j)_{j\in J}$ est à valeurs dans $\mathbb{C}$ et sommable, alors les familles de nombres réels $(\mathrm{Re}(x_j))_{j\in J}$ et $(\mathrm{Im}(x_j))_{j\in J}$ sont sommables. On pose alors : $\sum\limits_{j\in J} x_j = \sum\limits_{j\in J}\mathrm{Re}(x_j) + i\sum\limits_{j\in J}\mathrm{Im}(x_j)$.

On calcule rarement, *en pratique*, une telle somme grâce aux identités ci-dessus.

Propriétés de base

On retiendra simplement ces propriétés en constatant que tout se passe comme pour les sommes à support fini, tant qu'on somme des éléments de $[0,+\infty]$ ou d'une famille sommable de nombres complexes.

Proposition 1 (Propriétés de base)**.** *Soient $(x_j)_{j\in J}$ et $(y_j)_{j\in J}$ des familles à valeurs dans* $[0,+\infty]$.
— *pour toute bijection $\varphi : J' \to J$, on a :* $\sum\limits_{j\in J} x_j = \sum\limits_{j'\in J'} x_{\varphi(j')}$ (changement d'indice) *;*
— *pour toute partie K de J, on a :* $\sum\limits_{j\in K} x_j \leqslant \sum\limits_{j\in J} x_j$ (restriction) *;*
— *pour tous réels* POSITIFS *a et b, on a :* $\sum\limits_{j\in J}(ax_j+by_j) = a\sum\limits_{j\in J} x_j + b\sum\limits_{j\in J} y_j$ (linéarité) *;*
— *Si $x_j \leqslant y_j$ pour tout $j\in J$, alors :* $\sum\limits_{j\in J} x_j \leqslant \sum\limits_{j\in J} y_j$ (croissance).

La propriété de linéarité semble indiquer qu'on sait multiplier tout réel par tout élément de $[0,+\infty]$. C'est possible en posant : $0\times+\infty = +\infty\times 0 = 0$.

La formule de changement d'indice est instructive : elle assure que permuter des termes de la somme ne change pas sa valeur (au contraire du paradoxe que je vous avais illustré lors de notre première rencontre), lorsqu'on somme des réels POSITIFS.

De plus, elle permet de donner un sens plus concret à la somme $\sum\limits_{j\in J} x_j$ lorsque J est une partie infinie de $\mathbb{N}$. On sait dans ce cas construire une bijection $\varphi : \mathbb{N}\to J$ strictement croissante, et on a : $\sum\limits_{j\in J} x_j = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_{\varphi(n)}$. C'est une somme de série. Ainsi les sommes sur des parties de $\mathbb{N}$ ne sont pas fondamentalement différentes de celles que vous connaissiez.

Par exemple, si l'on veut comprendre ce qu'est la somme : $\sum\limits_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p}$, où $\mathbb{P}$ est l'ensemble des nombres premiers : il suffit de noter $(p_n)_{n\geqslant 0}$ la suite des nombres premiers ordonnés en sens croissant, et on a : $\sum\limits_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{p_n}$.

Proposition 2. *Soient $(x_j)_{j\in J}$ et $(y_j)_{j\in J}$ des familles* SOMMABLES *de nombres complexes. Alors :*
— *pour toute bijection $\varphi : J' \to J$, on a :* $\sum\limits_{j\in J} x_j = \sum\limits_{j'\in J'} x_{\varphi(j')}$ (changement d'indice) *;*
— *pour toute partie K de J, la famille $(x_j)_{j\in K}$ est sommable* (restriction) *;*
— *pour tous nombres complexes a et b, la famille $(ax_j+by_j)_{j\in J}$ est sommable et on a :* $\sum\limits_{j\in J}(ax_j+by_j) = a\sum\limits_{j\in J} x_j + b\sum\limits_{j\in J} y_j$ (linéarité) *;*
— *la famille $(|x_j|)_{j\in J}$ est aussi sommable, et on a :* $\left|\sum\limits_{j\in J} x_j\right| \leqslant \sum\limits_{j\in J} |x_j|$ (inégalité triangulaire) *;*
— *Si $x_j \leqslant y_j$ pour tout $j\in J$, alors :* $\sum\limits_{j\in J} x_j \leqslant \sum\limits_{j\in J} y_j$ (croissance).

Proposition 3 (Théorème de comparaison)**.** *Soient $(x_j)_{j\in J}$ et $(y_j)_{j\in J}$ deux familles à valeurs dans $\mathbb{C}$, telles que : $\forall j\in J$, $|x_j| \leqslant |y_j|$. Si $(y_j)_{j\in J}$ est sommable, alors $(x_j)_{j\in J}$ l'est également.*

Formules servant au calcul *en pratique*

La plus importante (et impressionnante) des formules de cette note est celle de sommation par paquets. Presque toutes les autres formules que vous devez connaître sur les familles sommables en découlent.

Théorème 4 (Théorème de sommation par paquets)**.** *Soit $(x_j)_{j\in J}$ une famille d'éléments de $[0,+\infty]$. Alors, pour toute réunion* disjointe $J = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} J_n$, *on a :* $\sum\limits_{j\in J} x_j = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\sum\limits_{j\in J_n} x_j$.

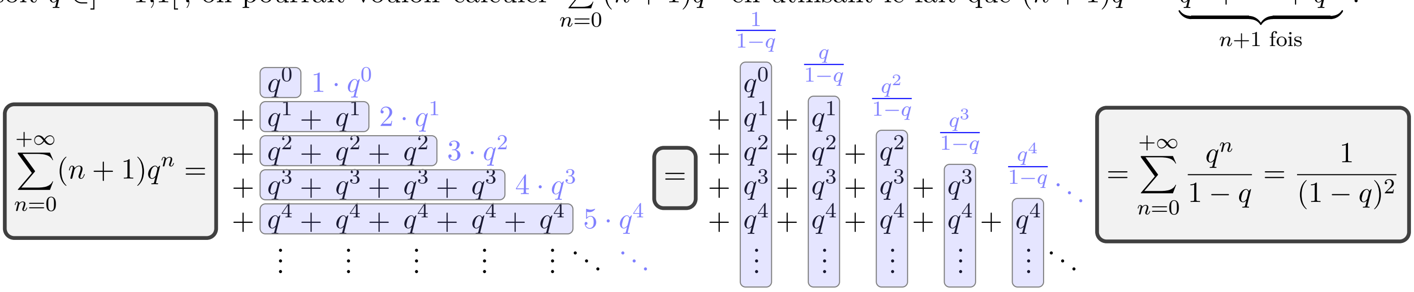
Le résultat reste valable si $(x_j)_{j\in J}$ est une famille de nombres complexes SOMMABLE. *L'indexation $n\in\mathbb{N}$ peut être remplacée par $n\in K$ avec K fini ou dénombrable.*

Les J_n de la partition sont appelés les « paquets ». Ce théorème dit essentiellement que lorsqu'on somme des réels positifs ou des nombres complexes d'une famille sommable, on peut regrouper les termes comme il nous arrange (le but de la manœuvre étant bien entendu de se ramener à des sommes plus simples).

Exemple 1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une famille *sommable* de nombres complexes. Alors, en regroupant les x_n indexés par des entiers n positifs d'une part, et ceux indexés par des entiers négatifs d'autre part (en isolant 0 pour éviter les ambiguïtés), on a : $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} x_n = x_0 + \sum\limits_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} x_n + \sum\limits_{n\in-\mathbb{N}\setminus\{0\}} x_n = x_0 + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} x_k + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} x_{-k}$. Cela revient en effet à appliquer le théorème de sommation par paquets avec $I_0 = \{0\}$, $I_1 = \mathbb{N}\setminus\{0\}$, et $I_2 = -\mathbb{N}\setminus\{0\}$, qui vérifient bien : $I_0 \cup I_1 \cup I_2 = \mathbb{Z}$ (réunion disjointe). Si l'on choisit à la place les paquets : $\forall n\in\mathbb{N},\ I_n = \{n,-n\}$, alors on obtient : $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} x_n = x_0 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(x_n + x_{-n})$.

Exemple 2. Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} x_n$ une série de nombres complexes absolument convergente. Alors la famille $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable, et d'après le théorème de sommation par paquets on peut regrouper les indices pairs d'une part et les indices impairs d'autre part (cela revient à prendre $I_0 = 2\mathbb{N}$ et $I_1 = 2\mathbb{N}+1$, qui vérifient bien : $I_0\cup I_1 = \mathbb{N}$). On a alors : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_n = \sum\limits_{n\in 2\mathbb{N}} x_n + \sum\limits_{n\in 2\mathbb{N}+1} x_n = \sum\limits_{\ell=0}^{+\infty} x_{2\ell} + \sum\limits_{\ell=0}^{+\infty} x_{2\ell+1}$. Cet exemple montre que, *quand une série converge absolument, on peut séparer la somme selon les indices pairs et impairs* (ce qui serait faux avec la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ comme vous pouvez le vérifier : il apparaît deux séries divergentes).

Exemple 3. L'extrême souplesse du théorème de sommation par paquets autorise les expérimentations non rigoureuses dans un premier temps, lorsqu'on veut calculer des sommes par regroupement visuel des termes. Il suffit ensuite de formaliser les paquets qu'on a utilisés pour former notre raisonnement graphique. Par exemple, soit $q\in]-1,1[$; on pourrait vouloir calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)q^n$ en utilisant le fait que $(n+1)q^n = \underbrace{q^n+\cdots+q^n}_{n+1 \text{ fois}}$:



L'approche est fructueuse parce qu'elle nous ramène à calculer exclusivement des sommes géométriques : on sait faire. Pour formaliser ce raisonnement, il suffit de remarquer que notre représentation graphique est simplement l'illustration de l'identité : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)q^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n} q^n = \sum\limits_{(k,n)\in\Delta} q^n$ avec : $\Delta = \{(k,n)\in\mathbb{N}^2 \mid 0\leqslant k\leqslant n\}$, et que notre regroupement des termes ci-dessus revient à prendre pour paquets : $\forall k\in\mathbb{N},\ J_k = \{k\}\times[\![k,+\infty[\![$ (au lieu de sommer ligne après ligne, on somme colonne après colonne, la k^{e} colonne étant donnée par J_k). Et voilà :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)q^n = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{(k,n)\in J_k} q^n = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=k}^{+\infty} q^n = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{q^k}{1-q} = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

On n'a cependant pas justifié la sommabilité : soit on utilise : $(n+1)q^n = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, soit on fait d'abord ce calcul avec $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}|(n+1)q^n|$ (c'est permis puisqu'on somme là une famille de $[0,+\infty]$). On trouve : $\frac{1}{(1-|q|)^2} < +\infty$.

Exemple 4. En sommant $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ avec les paquets : $\forall k\in\mathbb{N},\ J_k = [\![2^k,2^{k+1}-1]\!]$, nous allons redémontrer la divergence de la série harmonique avec énormément d'efficacité :

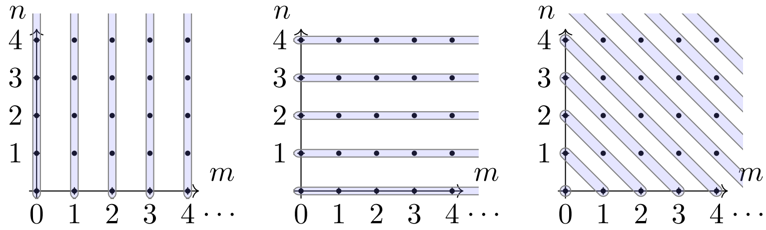
$$\sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}\frac{1}{n} = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1}\frac{1}{n}\right) \geqslant \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1}\frac{1}{2^{k+1}}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2} = +\infty.$$

Étudiez les autres séries de Riemann avec ces mêmes paquets, pour voir ce que vous obtenez !

Exemple 5. Soit $(x_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ une famille sommable. Pour calculer $\sum\limits_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} x_{m,n}$ en sommant par paquets, il y a trois façons naturelles de procéder, assez visuelles (voir figure ci-dessous) :

— on peut sommer « tranche par tranche verticalement » (les paquets sont : $\forall m\in\mathbb{N},\ J_m = \{m\}\times\mathbb{N}$) ;

— on peut sommer « tranche par tranche horizontalement » (les paquets sont : $\forall n \in \mathbb{N},\ J_n = \mathbb{N} \times \{n\}$) ;
— on peut sommer « diagonale par diagonale » (les paquets sont : $\forall n \in \mathbb{N},\ J_n = \{(k,\ell) \in \mathbb{N}^2 \mid \ell = n-k\}$).



Ces trois façons de faire donnent respectivement les trois égalités :

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} x_{m,n} = \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} x_{m,n} \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} x_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} x_{k,n-k}.$$

L'égalité $(*)$ est intéressante puisqu'elle nous dit que, lorsqu'une famille est sommable, on peut intervertir deux sommes infinies : c'est le théorème de Fubini (corollaire 5), et la dernière égalité donnera plus loin ce qu'on appelle un *produit de Cauchy* de deux sommes (voir la proposition 7). Il y a bien d'autres possibilités !

Corollaire 5 (Théorème de Fubini)**.** *Soient J et J deux ensembles dénombrables, et soit $(x_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille à valeurs dans $[0,+\infty]$. Alors : $\sum_{(i,j)\in I\times J} x_{i,j} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} x_{i,j} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} x_{i,j}$. Autrement dit : on peut permuter les sommes.*

Si $(x_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ est une famille de nombres complexes telle que : $\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} |x_{i,j}| < +\infty$, alors la famille est sommable et l'interversion ci-dessus reste valable.

Corollaire 6 (Produit de deux sommes)**.** *Soient I et J deux ensembles au plus dénombrables, et soient $(x_i)_{i\in I}$, $(y_j)_{j\in J}$ deux familles à valeurs dans $[0,+\infty]$. Alors : $\left(\sum_{i\in I} x_i\right)\left(\sum_{j\in J} y_j\right) = \sum_{(i,j)\in I\times J} x_i y_j$.*

Le résultat reste valable si $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_j)_{j\in J}$ sont deux familles de nombres complexes SOMMABLES (la famille $(x_i y_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est alors également sommable).

Exemple 6. Posons : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \{(n_1,n_2,n_3) \in \mathbb{N}^3 \mid 2n_1 + 3n_2 + 5n_3 = n\}$, $s_n = \operatorname{card}(S_n)$. Bien que les termes de la suite $(s_n)_{n\geqslant 0}$ ne soient pas simples à expliciter *a priori*, sa série génératrice (c'est-à-dire $\sum_{n\geqslant 0} s_n x^n$) est au contraire aisée à obtenir avec le résultat ci-dessus et le théorème de sommation par paquets. Pour tout $x \in]-1,1[$, on a convergence absolue des séries géométriques ci-dessous, et donc :

$$\left(\sum_{n_1=0}^{+\infty} x^{2n_1}\right)\left(\sum_{n_2=0}^{+\infty} x^{3n_2}\right)\left(\sum_{n_3=0}^{+\infty} x^{5n_3}\right) = \sum_{(n_1,n_2,n_3)\in\mathbb{N}^3} x^{2n_1+3n_2+5n_3} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{(n_1,n_2,n_3)\in S_n} x^{2n_1+3n_2+5n_3} = \sum_{n=0}^{+\infty} s_n x^n.$$

On en déduit : $\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} s_n x^n = \frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^5)}$. Ce genre de manipulation est le point de départ de nombreux raisonnements dénombrant des solutions d'une équation diophantienne par des méthodes analytiques.

Proposition 7 (Produit de Cauchy)**.** *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux familles sommables de nombres complexes. Alors : $\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k\right)\left(\sum_{\ell\in\mathbb{N}} v_\ell\right) = \sum_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2} u_k v_\ell = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.*

Exemple 7. Soit $q \in]-1,1[$. On a, par cette formule appliquée à deux fois la famille sommable $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\frac{1}{(1-q)^2} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} q^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} q^k q^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} q^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)q^n.$$

On a trouvé la valeur de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)q^n$ (à comparer avec la technique de l'exemple 3).

Exemple 8. Soit $(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2$. Comme la série exponentielle converge absolument en tout nombre complexe, les familles $\left(\frac{z_1^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\frac{z_2^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont sommables, donc par la proposition précédente :

$$e^{z_1}e^{z_2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{z_1^k}{k!}\,\frac{z_2^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z_1+z_2)^n}{n!} = e^{z_1+z_2}.$$

Montrer qu'une famille est sommable

Pour montrer : $\sum\limits_{j\in J} |x_j| < +\infty$, on peut au choix :

— calculer explicitement la somme si possible (par exemple en reconnaissant une somme usuelle, ou en s'y ramenant en sommant par paquets convenables) ;

— si la famille est indexée par $\mathbb{N}$ ou une partie de $\mathbb{N}$: utiliser les méthodes de 1re année vues dans l'étude des séries (théorème de comparaison en particulier) ;

— majorer le terme général par celui d'une somme dont on saurait justifier la finitude (théorème de comparaison) ou majorer directement la somme (restriction à une sous-partie) : la deuxième approche est plus pertinente si $(x_j)_{j\in J}$ est une famille extraite d'une famille qu'on sait être sommable.

On rappelle que $(|x_j|)_{j\in J}$ étant une famille de réels positifs, TOUT EST PERMIS pour calculer sa somme.

Toutes ces techniques peuvent se combiner. Par exemple, dans le cas d'une somme indexée par $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, on peut *d'abord* utiliser le théorème de Fubini pour se ramener à une somme de la forme : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\sum\limits_{m=0}^{+\infty} u_{m,n}$, ensuite simplifier $v_n = \sum\limits_{m=0}^{+\infty} u_{m,n}$, et enfin montrer que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$ est fini grâce aux méthodes classiques d'étude des séries (c'est possible en particulier si l'on a un équivalent asymptotique simple de $(v_n)_{n\geqslant 0}$).

Exemple 9. Soit $z\in\mathbb{C}$. Montrons que la famille $\left(\frac{z^p}{q!}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable. Par le théorème de Fubini :

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}\left|\frac{z^p}{q!}\right| = \sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{|z|^p}{q!} = \sum_{q=0}^{+\infty}\frac{1}{q!}\sum_{p=0}^{+\infty}|z|^p = \sum_{q=0}^{+\infty}\frac{1}{q!}\frac{1}{1-|z|} = \frac{1}{1-|z|}\sum_{q=0}^{+\infty}\frac{1}{q!} = \frac{e^1}{1-|z|} < +\infty.$$

On a bien montré la sommabilité.

Exemple 10. Soit $x\in[0,1[$. Montrons que $\left(x^{(2n+1)k+n}\right)_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable grâce au théorème de Fubini :

$$\sum_{(n,k)\in\mathbb{N}^2} x^{(2n+1)k+n} = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} x^{(2n+1)k+n} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k\sum_{n=0}^{+\infty}(x^{2k+1})^n = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{1-x^{2k+1}}.$$

Or : $\frac{x^k}{1-x^{2k+1}} \underset{k\to+\infty}{\sim} x^k$, et la série géométrique $\sum\limits_{k\geqslant 0} x^k$ converge car $x\in[0,1[$. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, il en est de même pour la série $\sum\limits_{k\geqslant 0}\frac{x^k}{1-x^{2k+1}}$, d'où la finitude de la somme ci-dessus. Ainsi la famille $\left(x^{(2n+1)k+n}\right)_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.

Exemple 11. Si I est l'ensemble des entiers naturels dont l'écriture en base 10 admet 1 comme chiffre des unités, alors $\left(\frac{1}{i^2}\right)_{i\in I}$ est sommable car : $\sum\limits_{i\in I}\frac{1}{i^2} \leqslant \sum\limits_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}\frac{1}{n^2} < +\infty$. Cette dernière somme est en effet celle d'une série de Riemann d'exposant strictement supérieur à 1.

Conclusion. Pour résumer le contenu de cette note :

— quand on veut sommer des réels positifs : TOUT EST PERMIS ;

— quand on veut sommer des complexes quelconques : tout est permis À CONDITION QUE LA FAMILLE SOIT SOMMABLE.

Voici, alors, comment procéder dans l'étude d'une somme $\sum\limits_{i\in I} x_i$:

1. On montre d'abord que : $\sum\limits_{i\in I}|x_i| < +\infty$, sachant que TOUT EST PERMIS pour le faire parce que c'est la somme d'une famille de réels positifs : la somme existe *a priori*, on peut sommer par paquets comme on le souhaite, etc.
2. Puisque $\sum\limits_{i\in I}|x_i| < +\infty$, la famille $(x_i)_{i\in I}$ est sommable, donc les théorèmes de cette section s'appliquent également au calcul de la somme $\sum\limits_{i\in I} x_i$.