L'art de la majoration
(lecture indispensable)

> « *Pour acquérir le "sens de l'Analyse" indispensable jusque dans les spéculations les plus abstraites, il faut avoir appris à distinguer ce qui est "grand" de ce qui est "petit", ce qui est "prépondérant" et ce qui est "négligeable". En d'autres termes le Calcul infinitésimal, tel qu'il se présente dans ce livre, est l'apprentissage du maniement des* inégalités *bien plus que des égalités, et on pourrait le résumer en trois mots :* MAJORER, MINORER, APPROCHER ».
> *Calcul infinitésimal*, Jean Dieudonné.

Être bon en analyse revient à savoir majorer finement, c'est-à-dire : passer de quantités INCONNUES (qu'on veut justement estimer, dans un calcul de limite par exemple) à des quantités CONNUES mais PROCHES.

Définition de l'Analyse, ou l'art de la majoration

C'est majorer de l'INCONNU par du CONNU mais PROCHE.

C'est majorer SIMPLEMENT, mais en perdant LE MOINS D'INFORMATIONS POSSIBLE.

Ces définitions sont équivalentes.

L'art de majorer est très difficile, notamment parce qu'il n'existe pas de méthode exhaustive. Chaque exercice nécessite de se réinventer. Et cette difficulté est accentuée par des lacunes parfois incroyables dans les opérations élémentaires. Alors que dire des opérations subtiles ! Cette partie est ainsi structurée :

— dans la section 1, je mentionne des erreurs fondamentales, et propose des pistes pour progresser ; j'illustre en quelques exemples ce qu'il ne faut pas faire, et ce qu'il faudrait faire, en commentant parfois abondamment ma démarche ;

— dans les sections 2 à 4, je fais des rappels et donne quelques « astuces » vous permettant, je l'espère chaudement, d'y voir plus clair, et que votre habileté ne se base pas uniquement sur des efforts pénibles de mémoire ; la section 4, plus particulièrement, me semble extrêmement importante : j'y aborde comment « bien majorer » les valeurs absolues lorsque, par exemple, nous voulons calculer une limite grâce au théorème des gendarmes ;

— dans la section 5, on y aborde des techniques plus subtiles pour répondre à la principale exigence de l'analyse, rappelée plus haut : majorer de l'inconnu par du connu aussi proche que possible, dans le cas particulier d'une différence « petite » (différence entre une fonction et la partie régulière de son développement limité, ou différence entre les évaluations d'une même fonction en deux points proches).

Les sections marquées de « ✓ » **doivent absolument être maîtrisées**. La section 5 est essentielle pour les études de suites de fonctions et intégrales à paramètres notamment. Le reste est du bonus. Je pense que la section la plus subtile est la section 4.2.

Les conseils de mon document *Méthodes* en *Intégration* serviront de complément.

Il me semble aussi que cette lecture serait pure perte si vous ne pratiquiez pas les différents exercices, puisque dans cet art RIEN NE REMPLACE LA PRATIQUE RÉGULIÈRE !

Remarque. Ce document NE parlera PAS du bon usage de l'uniforme continuité ni des techniques d'approximation plus fines (comment utiliser la densité des polynômes, etc.).

1 ✓ Principales sources d'erreurs

Je retiendrai seulement les erreurs les plus fréquentes, les plus basiques (eu égard de la complexité des opérations effectuées) et les plus rapides à corriger... Du moins, POUR QUI EN FAIT L'EFFORT CONTINU.

1. Les erreurs d'inégalités sur les puissances.
2. Oubli des problèmes posés par le signe ou la valeur absolue.
3. Oubli du renversement des inégalités par passage à l'inverse. Ou encore, pour éliminer les dénominateurs, on lit souvent : $\frac{p}{q} \leqslant p$.
4. Manque de représentation visuelle des fonctions.

J'illustre ci-dessous, en quatre exemples, les raisonnements récurrents et faux sur les inégalités. Ensuite j'explique comment, à mon avis, vous pouvez les éviter.

DANS TOUS LES « CONTRE-EXEMPLES », J'EXPOSE VOLONTAIREMENT DES ERREURS FRÉQUENTES DANS LES INÉGALITÉS : ATTENTION À NE PAS LIRE TROP VITE ET À LES TENIR POUR CORRECTES !

Contre-exemple 1. (illustration du 1er point) Pour démontrer que l'intégrale de Gauß $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$ converge, après avoir bien sûr pensé à mentionner la continuité de $t \mapsto e^{-t^2}$ sur $[0, +\infty[$ (n'est-ce pas ?), vous aimez bien justifier l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$ en comparant cette fonction à celle de référence $t \mapsto e^{-t}$. Pourquoi pas ? Seulement on se trompe aisément, en écrivant :

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad 0 \leqslant e^{-t^2} \leqslant e^{-t}.$$

Pour montrer que cette inégalité est fausse, voyons à quelle inégalité équivalente simple, et dont on connaît la justesse, elle se ramène. Si $t \in]0, +\infty[$, alors :

$$e^{-t^2} \leqslant e^{-t} \iff -t^2 \leqslant -t \iff t^2 \geqslant t \overset{[\times \frac{1}{t}]}{\iff} t \geqslant 1.$$

Cette inégalité n'est donc valable que pour $t \geqslant 1$ (et $t = 0$). Attention !

Contre-exemple 2. (illustration du 2e point) Je parlerai plus amplement des valeurs absolues dans la section 4. Pour l'heure, je me concentre sur la gestion des signes : **quand vous avez un terme négatif, mais non explicitement (pas de signe moins), n'oubliez pas que multiplier par ce terme renverse l'inégalité**. C'est-à-dire : si $x \leqslant y$, il est faux qu'on a $xz \leqslant yz$ si z est négatif. Par exemple, l'inégalité :

$$\forall x \in [0,1], \quad \frac{x^2-1}{x+1} \leqslant x^2 - 1$$

est fausse (bien qu'on ait effectivement $\frac{1}{x+1} \leqslant 1$ sur cet intervalle), parce que $x^2 - 1 \leqslant 0$ si $x \in [0,1]$. On voit l'absurdité en posant $x = \frac{1}{2}$, par exemple : cette inégalité donnerait $-\frac{1}{2} \leqslant -\frac{3}{4}$, qui équivaut à $2 \geqslant 3$, ce qui est bien sûr absurde.

On évitera ces erreurs en testant des valeurs particulières de x (éventuellement des valeurs limites aux extrémités), et en faisant attention au signe des différents facteurs... Ce qui nécessite de regarder de près comment sont quantifiées les variables (on y revient toujours).

Contre-exemple 3. (autre illustration du 2e point) Il est FAUX que, si $a \leqslant a'$ et $b \leqslant b'$, alors $a - b \leqslant a' - b'$. C'est une très grosse bêtise. Ainsi je vois souvent le raisonnement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 - \sin(x) \leqslant 1 - 1 = 0,$$

ce qui voudrait dire que $1 \leqslant \sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. N'est-ce pas le contraire ?!

En vérité, du fait que $-1 \leqslant \sin \leqslant 1$, on a : $-1 \leqslant -\sin \leqslant 1$ (multiplier par -1 renverse les inégalités), et donc : $0 \leqslant 1 - \sin \leqslant 2$.

Pour majorer $a - b$

1. On majore a. Ainsi : $a \leqslant a'$.
2. On MINORE b : si $b'' \leqslant b$, alors : $-b \leqslant -b''$.

3. On somme les inégalités, et on en déduit : $a - b \leqslant a' - b''$.

Contre-exemple 4. (illustration du 3e point) Les inégalités se renversent lorsque nous passons à l'inverse. C'est la clé pour majorer des quotients. Si nous l'oublions, nous avons facilement des absurdités. N'est-il pas tentant d'écrire les inégalités suivantes :

$$\forall x \in [0,1[,\ \frac{1+x}{1-x} \leqslant 1+x \leqslant 2, \quad \forall x \in [0,1],\ \frac{x^2+2}{x+1} \leqslant \frac{x^2+2}{2} \leqslant \frac{3}{2}, \quad \forall x \in]0,1],\ \frac{e^x+2}{x} \leqslant e+2 \quad ?$$

Et pourtant, elles sont TOUTES fausses ! En effet, prendre $x \to 1^-$ ou $x \to 0^+$ donnerait :

$$+\infty \leqslant 2, \quad 2 \leqslant \frac{3}{2}, \quad +\infty \leqslant e+2,$$

inégalités toutes absurdes.

Songez à tester la justesse de vos inégalités avec des valeurs particulières de x !

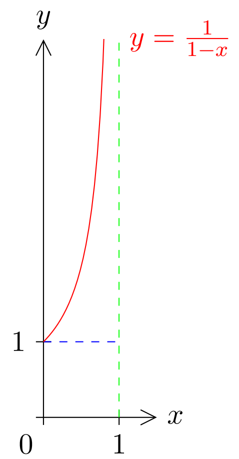
Contre-exemple 5. (illustration du 4e point) Imaginons qu'on ait à majorer $\displaystyle\int_0^t \frac{x^n}{1-x}\mathrm{d}x$ pour $t \in [0,1[$. La méthode est comme toujours de majorer l'intégrande par une fonction dont on connaît des primitives, et d'utiliser la croissance de l'intégrale. L'erreur fatale, qui aurait aussi eu toute sa place dans l'exemple ci-dessus, est d'écrire que $\frac{1}{1-x} \leqslant \frac{1}{1}$, de sorte que :

$$\int_0^t \frac{x^n}{1-x}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^t x^n \mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^t = \frac{t^{n+1}}{n+1}.$$

C'est très facile... Mais totalement faux. Illustrons l'absurdité de l'inégalité utilisée $\dfrac{1}{1-x} \leqslant 1$ sur la figure 1.

Non seulement on constate qu'en vérité, on a TOUJOURS $\dfrac{1}{1-x} \geqslant 1$ pour $x \in [0,1[$ (le contraire de l'inégalité demandée), mais en plus on voit que si l'inégalité $\dfrac{1}{1-x} \leqslant 1$ était vraie, alors quand $x \to 1^-$ on aurait : $+\infty \leqslant 1$. Absurde !

FIGURE 1 – Graphe de l'application $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$.



Le pouvoir des images permet de révéler les vérités et les erreurs de façon plus remarquable que les abstractions (avec les limites de la figuration qu'on connaît, bien évidemment). Je pense que c'est un moyen plus convaincant de se convaincre de l'absurdité d'une inégalité, plutôt que par des manipulations formelles.

Corollaire évident de cette liste d'avertissements. Pour progresser :

1. Vous devez, au moment de comparer a^x à d'autres puissances, **situer a par rapport à 1 ou prendre garde au signe de x** (éventuellement tout mettre sous forme exponentielle *au brouillon* pour redémontrer les inégalités voulues sans vous tromper).
2. Vous devez penser au signe. Lorsqu'on majore une différence $a-b$, obtenez des majorants de a et de $-b$ (ce qui revient à exiger un minorant de b). De même s'il faut minorer $a-b$.
3. Pour encadrer $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, encadrez d'abord isolément $g(x)$, **et renversez l'inégalité en passant à l'inverse**. Multipliez enfin par $f(x)$.
4. Vérifiez la cohérence de vos inégalités avec une représentation (rapide et grossière) des fonctions, ou (si vous ne parvenez pas à vous représenter visuellement les fonctions) **en regardant ce que donnent ces inégalités en des valeurs particulières de x ou asymptotiquement**.
   Nul besoin d'un tableau de variation détaillé : regardez les limites remarquables, là où la fonction s'annule, et reliez toutes ces informations de manière cohérente.

Je développe ces conseils de progression dans les sections 2, 3 et 4.

Exemple 6. (illustration du 3^e^ point) Fournissons des encadrements *corrects* des quantités de l'exemple 4. Nous ne pouvons pas majorer $\dfrac{1+x}{1-x}$ puisque, nous l'avons vu, cette quantité tend vers $+\infty$ quand $x \to 1^-$. En revanche, nous pouvons la minorer. Mais pour cela, il faut d'abord MAJORER $1-x$ (et passer à l'inverse). Pour majorer $1-x$ sans écrire de bêtise, on procède scolairement : on sait que $x \in [0,1[$, ce qu'on écrit : $0 \leqslant x < 1$. On essaie alors, par opérations élémentaires, de se ramener à un encadrement de $1-x$. Or :

$$0 \leqslant x < 1 \iff 0 \geqslant -x > -1 \iff 1 \geqslant 1-x > 0 \iff 0 < \frac{1}{1} \leqslant \frac{1}{1-x}.$$

On en déduit, après multiplication par $1+x \geqslant 0$:

$$\forall x \in [0,1[, \quad \frac{1+x}{1-x} \geqslant \frac{1+x}{1} \geqslant \frac{1+0}{1} = 1.$$

En procédant de même pour la deuxième inégalité : $0 \leqslant x \leqslant 1 \iff 1 \leqslant x+1 \leqslant 2 \iff \dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{x+1} \leqslant \dfrac{1}{1}$. De cela on déduit : $\forall x \in [0,1]$, $\dfrac{x^2+2}{2} \leqslant \dfrac{x^2+2}{x+1} \leqslant x^2+2$. Il reste à vérifier que pour tout $x \in [0,1]$, on a $2 \leqslant x^2+2 \leqslant 3$, et donc :

$$\forall x \in [0,1], \quad 1 = \frac{2}{2} \leqslant \frac{x^2+2}{x+1} \leqslant 3.$$

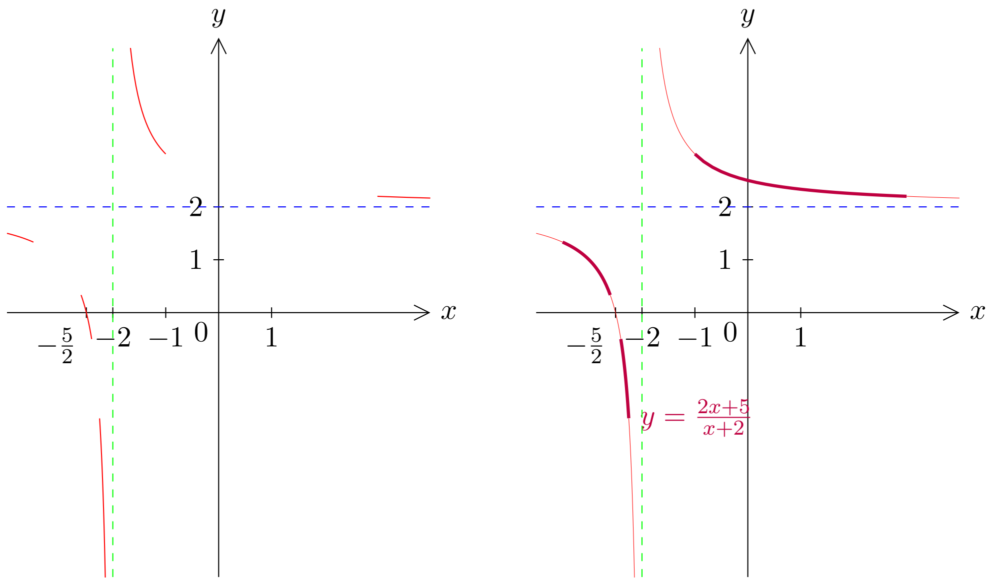
De même, $\dfrac{e^x+2}{x}$ ne peut être majorée quand $x \in]0,1]$, puisque cette quantité tend vers $+\infty$ quand $x \to 0^+$. Mais nous la minorons en notant que si $0 < x \leqslant 1$, alors $0 < \dfrac{1}{1} \leqslant \dfrac{1}{x}$ (l'inégalité se renverse). Donc :

$$\forall x \in]0,1], \quad \frac{e^x+2}{x} \geqslant \frac{e^x+2}{1} \geqslant e^0+2 = 3$$

(l'exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$, donc plus grande sur $]0,1]$ que sa valeur en 0).

Exemple 7. (illustration du 4^e^ point) Imaginons que nous souhaitions encadrer $f : x \mapsto \dfrac{2x+5}{x+2}$ en un coup d'œil, en espérant que ses asymptotes en $\pm\infty$ fournissent un encadrement. On a : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 2$. Mais est-ce que 2 est un majorant de f ? un minorant ? rien de tout cela ? Un tracé approximatif de f permet de nous aider à trancher sans même faire un examen approfondi.

Regardons les asymptotes. Outre : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 2$, on a aussi : $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = +\infty$ (le numérateur et le dénominateur sont positifs si $x > -2$), et : $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = -\infty$. Enfin, f s'annule manifestement en $-\frac{5}{2}$. De cela, on déduit les informations partielles (à gauche), et on complète du mieux qu'on peut (à droite) :



Il est alors manifeste qu'on a plutôt : $\forall x \in]-2,+\infty[,\ \dfrac{2x+5}{x+2} \geqslant 2$, et : $\forall x \in]-\infty,-2[,\ \dfrac{2x+5}{x+2} \leqslant 2$. Bien sûr, cela reste à démontrer, mais on a déjà éliminé des interprétations fautives qui pourraient être issues d'une conjecture négligente. Dans la section suivante, nous aurons une méthode pour encadrer très facilement f.

Exercice 1. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Uniquement à l'aide d'un dessin, encadrer $(t-a)(b-t)$ pour $t \in [a,b]$.

Les points deux et trois seront illustrés également dans l'exemple de la section 6, extrêmement exhaustif sur les techniques d'analyse auxquelles je veux vous sensibiliser.

2 ✓ Inégalités avec un quotient de fonctions

2.1 ✓ Encadrer rapidement : cas monotone

Avertissement. Dans cette section, il s'avérera que nous aurons toujours des encadrements de fonctions par leurs valeurs aux extrémités : **ce n'est en rien une règle générale, cela ne vaut que pour les fonctions monotones**. Malheur à ceux qui oseraient généraliser trop rapidement, et sans le comprendre, le discours ci-dessous pour ensuite écrire : $\forall x \in [-\pi,\pi],\ \cos(-\pi) \leqslant \cos(x) \leqslant \cos(\pi)$ (et donc $\cos(x) = -1$ pour tout $x \in [-\pi,\pi]$...)

Nous proposons deux approches pour encadrer une fonction f relativement simple :

1. Si $x \in [a,b]$, vous écrivez que $a \leqslant x \leqslant b$ et, par des opérations élémentaires (**additions, multiplications** – en prenant garde au signe –, **passage à l'inverse, exponentiation** – attention au signe, encore –), vous passez de cet encadrement à un encadrement de $f(x)$ (les extrémités seront $f(a)$ et $f(b)$ si f est monotone).
   Si $x \in [a,+\infty[$, on se contente de l'inégalité $x \geqslant a$, et de même si $x \in]-\infty,b]$; enfin, une borne exclue se traduira par une inégalité stricte.
   Il faut être prudent si l'on compose avec des fonctions puissances, parce que leur monotonie dépend de l'intervalle considéré.
2. Plus élégant : vous reconnaissez en f une composition de fonctions usuelles croissantes ou décroissantes, **sachant que composer par une fonction croissante ne change pas le sens de variation, et qu'au contraire composer par une fonction décroissante le renverse** (de sorte que la composition de deux fonctions décroissantes est croissante, par exemple). Une fois que vous avez établi la monotonie de f, vous en déduisez qu'elle est comprise entre ses valeurs aux extrémités de l'intervalle (remplacer ces valeurs par des limites, si les extrémités sont ouvertes), le sens de l'encadrement dépendant de la monotonie en question.

Des applications croissantes usuelles sont : l'exponentielle, le logarithme, les fonctions puissances (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}_+$ selon la parité de l'exposant), les fonctions affines de pente positive, la valeur absolue sur $\mathbb{R}_+$.

Des applications décroissantes usuelles sont : le passage à l'inverse, les fonctions puissances d'exposant pair sur $\mathbb{R}_-$, les fonctions affines de pente négative, la valeur absolue sur $\mathbb{R}_-$.

Exemple 8. Soit $t \in [0,1[$. Encadrons proprement $\dfrac{1}{1-x^2}$ pour $x \in [0,t]$.

Première méthode. On part de l'encadrement vérifié par x, et par des opérations élémentaires on se ramène à un encadrement de $\dfrac{1}{1-x^2}$:

$$0 \leqslant x \leqslant t \quad \overset{[x\mapsto x^2 \nearrow \text{ sur } \mathbb{R}_+]}{\iff} \quad 0 \leqslant x^2 \leqslant t^2 \quad \overset{[\times(-1)]}{\iff} \quad 0 \geqslant -x^2 \geqslant -t^2 \quad \overset{[+1]}{\iff} \quad 1 \geqslant 1-x^2 \geqslant 1-t^2.$$

Comme $t \in [0,1[$, on a $1-t^2 > 0$ (vérifiez-le), et on peut donc passer à l'inverse. Les inégalités se renversent, et donc :

$$0 \leqslant x \leqslant t \iff 1 = \frac{1}{1} \leqslant \frac{1}{1-x^2} \leqslant \frac{1}{1-t^2}.$$

Nous avons obtenu un encadrement de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$, et montré en passant qu'elle est croissante sur $[0,1[$ (sans dériver).

Deuxième méthode. L'application $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ est obtenue en composant les fonctions suivantes :

— $x \mapsto x^2$ (**croissante** sur $\mathbb{R}_+$ donc sur $[0,t]$, donc le sens de monotonie est à ce stade : $\nearrow$) ;

— $x \mapsto -x$ (**décroissante**, donc le sens de monotonie **se renverse** : $\searrow$), puisqu'on multiplie par -1 ;

— $x \mapsto x+1$ (**croissante**, donc le sens de monotonie **se conserve** : $\searrow$), puisqu'on ajoute 1 ;

— $x \mapsto \frac{1}{x}$ (**décroissante**, donc le sens de monotonie **se renverse** : $\nearrow$), puisqu'on passe à l'inverse.

(Évidemment, ces considérations doivent se faire *de tête*, sinon ce n'est pas profitable)

On en déduit que l'application $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ est croissante sur $[0,t]$, donc sa valeur minimale est en 0 et sa valeur maximale en t. On a : $\forall x \in [0,t]$, $1 \leqslant \dfrac{1}{1-x^2} \leqslant \dfrac{1}{1-t^2}$.

💡 En vérité, garder une trace des applications croissantes dans la composition n'a aucun intérêt, puisqu'elles ne changent pas le sens de monotonie : qu'il y en ait une ou mille, cela revient au même. Il suffit de compter combien d'applications décroissantes sont composées, pour déterminer le sens de variation : s'il y en a un nombre pair, alors l'application est croissante. Sinon, elle est décroissante. Ainsi, pour l'examen de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$, il suffit de noter que pour la définir, on a besoin de **deux** applications décroissantes (la multiplication par -1, le passage à l'inverse), donc elle est croissante.

Pour encadrer à l'œil nu

Comptez le nombre d'applications décroissantes qui interviennent dans votre fonction f.

Nombre PAIR d'applications décroissantes $\Longrightarrow$ f est CROISSANTE.
Nombre IMPAIR d'applications décroissantes $\Longrightarrow$ f est DÉCROISSANTE.

Applications décroissantes les plus fréquentes : passage à l'inverse, multiplication par -1.

Exercice 2. (encadrement « à l'œil nu ») *Sans étude de variations*, encadrer les quantités suivantes :

1. $\dfrac{1}{1+\frac{1}{t}}$ pour $\boxed{t \in [1,+\infty[}$, puis pour $\boxed{t \in \left[\frac{1}{2},2\right]}$.
2. $\dfrac{1}{1-t^2}$ pour $\boxed{t \in [0,x]}$ (ici $x \in [0,1[$), puis pour $\boxed{t \in [x,0]}$ (ici $x \in]-1,0]$).
3. $e^{\frac{1}{t^2+1}}$ pour $\boxed{t \in [-1,0]}$, puis pour $\boxed{t \in [x,+\infty[}$ (ici $x > 0$).
4. $\dfrac{1}{1-e^{-t}}$ pour $\boxed{t \in [1,+\infty[}$, puis pour $\boxed{t \in [-4,-1]}$, puis pour $\boxed{t \in [-1,x]}$ (ici $x \in]-1,0[$).

5. $\dfrac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\ln(t)}}}$ pour $\boxed{t \in [1,+\infty[}$.

2.2 ✓ Cas particulier des applications de la forme $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

Lorsqu'il s'agit d'encadrer une application de la forme $f : x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$, on pourrait démontrer *via* un calcul de dérivée que la fonction est strictement monotone sur $\left]-\infty, -\dfrac{d}{c}\right[$ et $\left]-\dfrac{d}{c}, +\infty\right[$, la monotonie étant décidée par le signe de $ad-bc$ (ce qui n'est pas sans rappeler le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$: ce n'est pas une coïncidence, mais en parler nous emmènerait trop loin).

Mais il est possible de les encadrer facilement en les décomposant en éléments simples *à la main*. Nul besoin de procéder comme d'habitude ici : on y parvient en ajoutant et soustrayant une quantité convenable au numérateur, de sorte à faire apparaître la même quantité qu'au dénominateur. Le numérateur est alors simplifié, et on a une relation de la forme : $\dfrac{ax+b}{cx+d} = \alpha + \dfrac{\beta}{cx+d}$.

Comme la monotonie de $x \mapsto cx+d$ est immédiate (elle dépend du signe de la pente c), en passant à l'inverse on en déduit la monotonie de $x \mapsto \dfrac{\beta}{cx+d}$ (attention au signe de β), et ajouter α ne change rien à la monotonie.

Exemple 9. Encadrons l'application $f : x \mapsto \dfrac{x+4}{x+7}$ sur $[1,+\infty[$. Pour tout $x \in [1,+\infty[$:

$$f(x) = \frac{x+4}{x+7} = \frac{x+7-7+4}{x+7} = \frac{x+7}{x+7} - \frac{3}{x+7} = 1 - \frac{3}{x+7}.$$

Il est alors facile de montrer que pour tout $x \in [1,+\infty[$, on a : $-\dfrac{3}{8} \leqslant -\dfrac{3}{x+7} \leqslant 0$ (en effet, on voit rapidement que l'application $x \mapsto -\dfrac{3}{x+7}$ est croissante grâce aux conseils de la section : sa définition fait intervenir **deux** applications décroissantes, à cause de l'inversion et de la multiplication par $-3<0$; elle est donc minorée par sa valeur en 1 et majorée par sa valeur limite en $+\infty$). On en déduit : $\forall x \in [1,+\infty[$, $\dfrac{5}{8} \leqslant f(x) \leqslant 1$.

Exemple 10. S'il n'y a pas le même coefficient en facteur de x au numérateur et au dénominateur, il suffit de factoriser par lesdits facteurs pour se ramener au cas précédent : encadrons l'application $f : x \mapsto \dfrac{3x+4}{5x+7}$ sur $[0,+\infty[$. Pour tout $x \in [0,+\infty[$:

$$f(x) = \frac{3x+4}{5x+7} = \frac{3}{5} \cdot \frac{x+\frac{4}{3}}{x+\frac{7}{5}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{x+\frac{7}{5}-\frac{7}{5}+\frac{4}{3}}{x+\frac{7}{5}} = \frac{3}{5}\left(1+\frac{\frac{4}{3}-\frac{7}{5}}{x+\frac{7}{5}}\right) = \frac{3}{5}\left(1-\frac{1}{15}\frac{1}{x+\frac{7}{5}}\right).$$

Vérifiez qu'on en déduit sans étude de variations : $\forall x \in [0,+\infty[$, $\dfrac{4}{7} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{3}{5}$.

Exercice 3. Avec la méthode ci-dessus, encadrer efficacement les quantités suivantes :

(a) $\dfrac{3t-2}{3t-5}$ pour $t \in [2,+\infty[$, (b) $\dfrac{3x+1}{5x+2}$ pour $x \in [0{,}5]$, (c) $\dfrac{-e^t-1}{2e^t+1}$ pour $t \in [0,+\infty[$,

(d) $\dfrac{x^2+3}{2x^2-1}$ pour $x \in [1,+\infty[$, (e) $\dfrac{3+2y}{y+1}$ pour $y \in [0{,}10]$, (f) $\dfrac{\cos(x)+2}{3-\cos(x)}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

2.3 ✓ Autres quotients de fonctions

Pour les quotients $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ plus compliqués, il faut combiner tous les enseignements de la section pour :

— encadrer $g(x)$, et en déduire un encadrement de $\dfrac{1}{g(x)}$ EN RENVERSANT LES INÉGALITÉS ;

— encadrer $f(x)$;

— multiplier par $\dfrac{1}{g(x)}$ l'encadrement vérifié par $f(x)$ (ou inversement), en faisant attention au signe de $g(x)$, et utiliser les inégalités vérifiées par $\dfrac{1}{g(x)}$ pour en déduire un encadrement de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Si f ou g change de signe (en principe g ne peut pas, sauf discontinuité, puisqu'elle ne s'annule pas), choisissez à la dernière étape de multiplier par la quantité positive. Ainsi vous n'aurez pas à vous soucier du renversement des inégalités.

Exemple 11. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si je veux encadrer $\dfrac{1+t^n}{\sqrt{1-t}}$ pour $t \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, *sans faire une étude de variations* (pourquoi s'en passerait-on ? pour gagner du temps, tout simplement), je commence par encadrer $\sqrt{1-t}$ par l'une des deux méthodes ci-dessus ; comme la racine carrée est croissante et $t \mapsto 1-t$ décroissante, la fonction $t \mapsto \sqrt{1-t}$ est décroissante sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, on a :

$$\forall t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \sqrt{1-\frac{1}{2}} \leqslant \sqrt{1-t} \leqslant \sqrt{1-0} \iff \forall t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \sqrt{\frac{1}{2}} \leqslant \sqrt{1-t} \leqslant 1 \iff \forall t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \frac{1}{1} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-t}} \leqslant \sqrt{2}.$$

N'oubliez pas de renverser les inégalités en passant à l'inverse. Après multiplication par $1+t^n \geqslant 0$, on a :

$$\forall t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad 1+t^n \leqslant \frac{1+t^n}{\sqrt{1-t}} \leqslant \sqrt{2}(1+t^n),$$

et comme $0 \leqslant t^n \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ pour tout $t \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ on en déduit facilement :

$$\forall t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad 1 \leqslant \frac{1+t^n}{\sqrt{1-t}} \leqslant \sqrt{2}\left(1+\frac{1}{2^n}\right).$$

On aurait aussi pu remarquer qu'on a ici fait le produit de deux fonctions croissantes et positives, nommément $t \mapsto 1+t^n$ et $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ (la croissance de cette dernière fonction étant immédiate, puisqu'elle s'obtient par composition de **deux** applications décroissantes : $t \mapsto \sqrt{1-t}$ et la fonction inverse). Donc $t \mapsto \dfrac{1+t^n}{\sqrt{1-t}}$ est croissante sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, et encadrée par ses valeurs en 0 et $\dfrac{1}{2}$.

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Encadrer efficacement les quantités suivantes :

(a) $\dfrac{1+t^n}{1+t^{2n}}$ pour $t \in [1, +\infty[$, (b) $\dfrac{\sin(x)}{x^2+2}$ pour $x \in \mathbb{R}$, (c) $\dfrac{e^x+3}{6x+\sin(x)}$ pour $x \in]-\infty, -1]$.

Selon les situations, nous n'avons pas forcément besoin de la meilleure majoration possible (mais seulement d'avoir une majoration par une constante, ou par une quantité qui tend vers zéro, etc., cela dépend du contexte). Dans ces cas-là, il faut accepter l'idée de faire des majorations grossières, en éliminant des termes gênants mais *négligeables*. Ainsi on *perd de l'information*, mais peu.

Exemple 12. Si l'on veut majorer $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{(n+1)^4}$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et *rapidement*, on note que $\dfrac{1}{(n+1)^4} \ll \dfrac{1}{n}$ pour n au voisinage de $+\infty$, donc ce n'est pas un grand sacrifice (si tout ce qui nous intéresse est un majorant : pas forcément le meilleur) de se débarrasser de $-\dfrac{1}{(n+1)^4}$ (qui est majoré par 0). On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)^4} \leqslant \frac{1}{n} \leqslant 1.$$

Il faut toutefois être prudent avec ce raisonnement, surtout au voisinage de 0 : ne pas faire apparaître accidentellement des dénominateurs pouvant s'annuler, ou des racines carrées négatives.

Exercice 5. Pour tout $x \in \left[\frac{3}{2},2\right]$, majorer : $\dfrac{x+1}{x-\sqrt{2x-x^2}}$, en maximum trois étapes (quitte à ne pas avoir la meilleure majoration).

Exercice 6. Majorer $x \mapsto \dfrac{x^2+1}{2x^3+x^2\sin(x)}$ sur $[1,+\infty[$ par une constante explicite.

3 ✓ Inégalités avec les puissances

Les erreurs concernant les fonctions puissances sont INACCEPTABLES. S'il vous est difficile de retenir leurs propriétés, notez que vous pouvez toutes les déduire des propriétés de l'exponentielle et du logarithme, en écrivant : $a^b = e^{b\ln(a)}$ (où $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}$). Par exemple, si $x \in]0,1]$, alors $x^2 \leqslant x$, puisqu'en effet :

$$2 \geqslant 1 \quad \overset{[\ln(x)\leqslant 0 \text{ car } 0<x\leqslant 1]}{\Longleftrightarrow} \quad 2\ln(x) \leqslant \ln(x) \quad \overset{[\exp \nearrow]}{\Longleftrightarrow} \quad e^{2\ln(x)} \leqslant e^{\ln(x)} \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 \leqslant x.$$

ATTENTION À L'OUBLI FRÉQUENT DU CAS $x \leqslant 1$ AU MOMENT DE COMPARER x^2 ET x ! L'INÉGALITÉ SE RENVERSE !

J'ai constaté que certains étudiants retiennent mieux les inégalités grâce au raisonnement suivant (qui m'étonne, mais je ne vais pas vous en priver) : la suite $(x^n)_{n\geqslant 0}$ est géométrique de raison x ; si $0<x<1$ alors on sait qu'elle est strictement décroissante, donc sa valeur en $n=1$ est supérieure à sa valeur en $n=2$, d'où : $x^2<x$. Raisonnement analogue si $x>1$.

C'est toutefois beaucoup d'artillerie pour peu de choses (laissez ces raisonnements au BROUILLON : n'embarrassez pas le correcteur), et la méthode ci-dessus ne permet pas d'étudier le cas où $x \leqslant 0$. Conformément au quatrième conseil donné dans la section 1, vous y penserez plus naturellement si vous avez en tête ces graphes très éclairants, où l'on compare $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ (voir la figure 2).

Plus généralement :

si	$a>1$,	alors	$x \mapsto a^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$,	i.e.	$\forall (x,y) \in \mathbb{R}$,	$x \leqslant y \Longleftrightarrow a^x \leqslant a^y$.
si	$0<a<1$,	alors	$x \mapsto a^x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$,	i.e.	$\forall (x,y) \in \mathbb{R}$,	$x \leqslant y \Longleftrightarrow a^x \geqslant a^y$.
si	$n \geqslant 0$,	alors	$x \mapsto x^n$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$,	i.e.	$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^*$,	$x \leqslant y \Longleftrightarrow x^n \leqslant y^n$.
si	$n \leqslant 0$,	alors	$x \mapsto x^n$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$,	i.e.	$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^*$,	$x \leqslant y \Longleftrightarrow x^n \geqslant y^n$.

Nous retiendrons plus facilement tous ces cas de figure en ayant en tête le graphe de ces fonctions : voir page 10.

Complétez cet état des lieux avec les cas suivants : monotonie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^*$ de $x \mapsto x^n$ selon que n soit un entier pair ou impair, positif ou négatif.

Exercice 7. Redémontrer toutes les inégalités ci-dessus grâce à la mise sous forme exponentielle (*quand elle est possible*).

Exercice 8. SORTIR VOTRE CALCULATRICE, et calculer :

— $\sqrt{x}$, x, x^2 et x^3 pour $x=\frac{1}{10^6}$, $x=\frac{1}{1000}$, $x=\frac{1}{10}$, $x=10$, $x=1000$, $x=10^6$, etc. (varier les plaisirs) ;

— $\frac{1}{\sqrt{x}}$, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$ et $\frac{1}{x^3}$ pour $x=\frac{1}{10^6}$, $x=\frac{1}{1000}$, $x=\frac{1}{10}$, $x=10$, $x=1000$, $x=10^6$, etc. ;

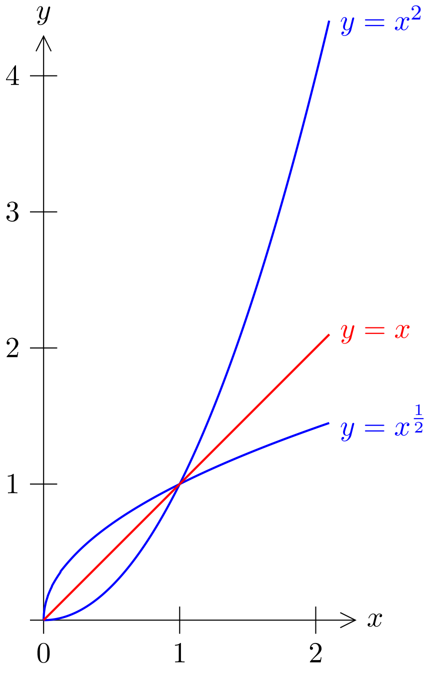
— 2^n pour $n \in \{-5,-3,-1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,3,5\}$, etc. ;

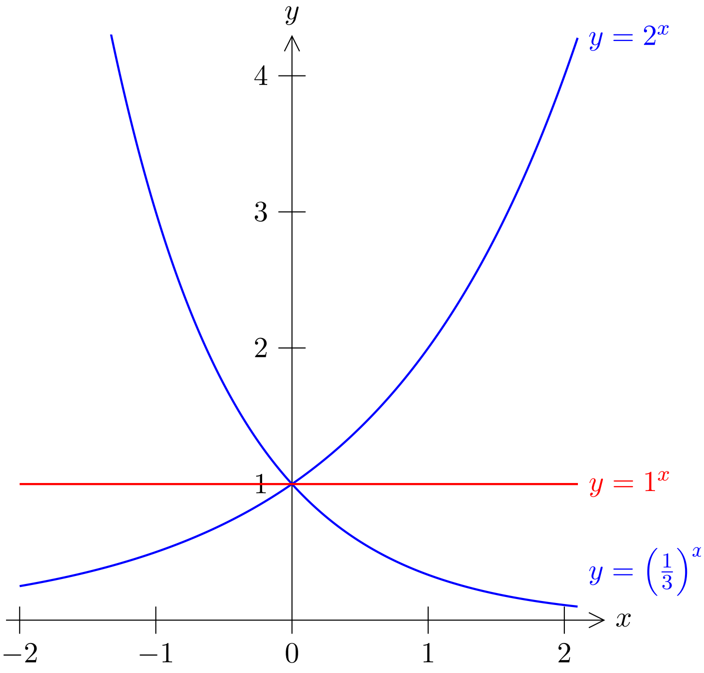
— $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour $n \in \{-5,-3,-1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,3,5\}$, etc.

et comparer avec les inégalités générales ci-dessus.

C'est probablement indispensable pour avoir une INTUITION de ces inégalités entre puissances, et ne pas écrire des âneries du type : $x+x^3 \underset{x\to 0}{\sim} x^3$.

Figure 2 – Graphes des différentes fonctions puissances.





$x^2 \leqslant x \leqslant x^{\frac{1}{2}}$ si $x \in]0,1]$

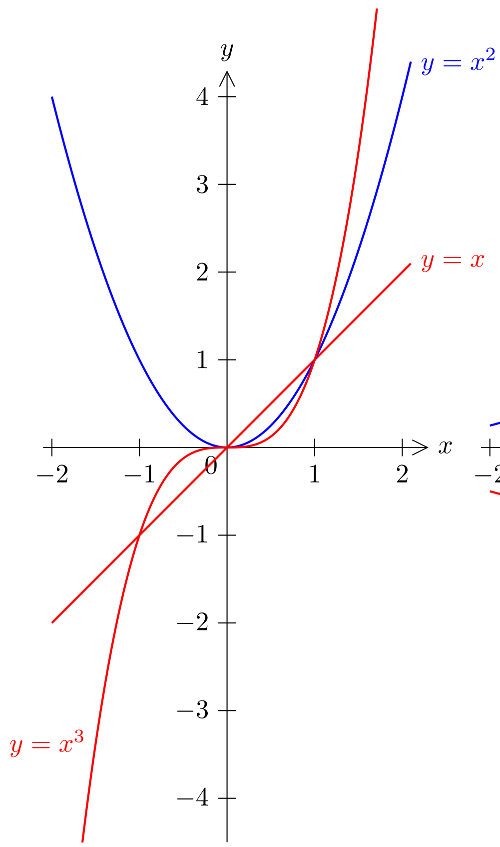
$x^{\frac{1}{2}} \leqslant x \leqslant x^2$ si $x \in [1,+\infty[$

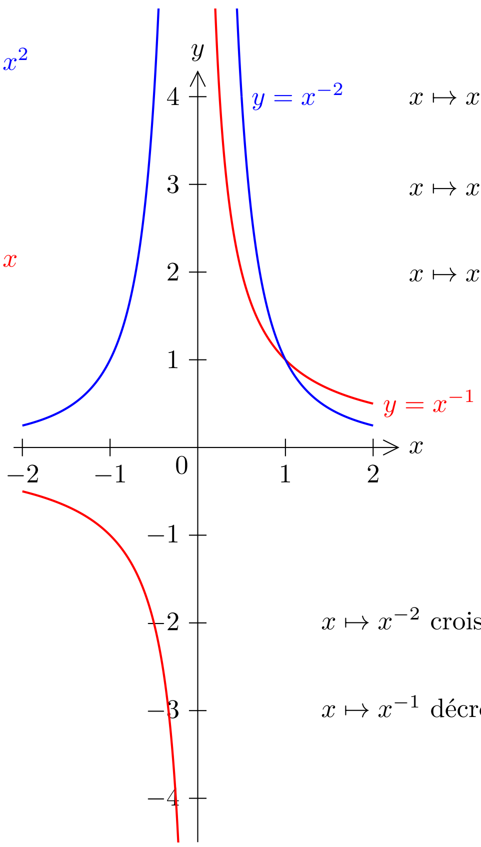
$\left(\frac{1}{3}\right)^x \leqslant 1^x \leqslant 2^x$ si $x \geqslant 0$

$2^x \leqslant 1^x \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^x$ si $x \leqslant 0$

$x \mapsto \left(\frac{1}{3}\right)^x$ décroissante sur $\mathbb{R}$

$x \mapsto 2^x$ croissante sur $\mathbb{R}$





$x \mapsto x^2$ décroissante sur $\mathbb{R}_-$, croissante sur $\mathbb{R}_+$

$x \mapsto x^3$ croissante sur $\mathbb{R}$

$x \mapsto x$ croissante sur $\mathbb{R}$

$x \mapsto x^{-2}$ croissante sur $\mathbb{R}_-^*$, décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

$x \mapsto x^{-1}$ décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$

4 Inégalités avec les valeurs absolues

Beaucoup d'étudiants sont bien embarrassés par les valeurs absolues, ne savent généralement pas quoi en faire, et les enlèvent sans justification dès que cela les arrange. Elles ont pourtant leur utilité, notamment lorsqu'on calcule une limite grâce au théorème des gendarmes :

$$\text{montrer que } \boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell} \text{ équivaut au fait que } \boxed{|u_n-\ell| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0};$$

comme cette valeur absolue est minorée par 0 quoi qu'il arrive, il suffit donc de majorer $|u_n-\ell|$ par le terme général d'une suite convergeant vers 0, et nous aurons démontré que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers ℓ. De plus, passer par les valeurs absolues a l'avantage que nous n'avons pas à nous poser la question du renversement des inégalités après multiplication (qui se produit dès qu'un facteur est négatif ou change de signe : un sinus par exemple). C'est pour ces raisons que nous y avons souvent recours, et vous ne pouvez pas y échapper.

Deux intérêts de la valeur absolue dans les inégalités

1. Les inégalités ne se renversent plus par multiplication (tout est positif).
2. En vue d'appliquer le théorème des gendarmes : on a une minoration « gratuite » (par 0).

Avant de parler du bon usage des valeurs absolues, commençons par parler de leurs mauvais usages.

4.1 ✓ Du mauvais usage des valeurs absolues

Vous devez définitivement retenir ceci :

Le raisonnement : « $a \leqslant b$, donc $|a| \leqslant |b|$ » est toujours invoqué à tort, ET DOIT ÊTRE OUBLIÉ À TOUT JAMAIS !

Le seul cas où ce raisonnement serait correct, serait le cas où a et b sont positifs... C'est-à-dire le seul cas où les valeurs absolues ne servent à rien.

Contre-exemple 13. On a par exemple : $-2 \leqslant 1$, mais on n'a certainement pas : $|-2| \leqslant |1|$. Ceci équivaudrait à $2 \leqslant 1$, qui est faux.

Contre-exemple 14. Le raisonnement suivant, souvent rencontré :

$$\ln(x) \leqslant x-1, \text{ donc : } |\ln(x)| \leqslant |x-1|$$

est FAUX, bien que la première inégalité soit vraie (et conséquence facile de la concavité du logarithme : voir section suivante). En effet, quand $x \to 0$, la seconde inégalité donnerait : $+\infty \leqslant 1$.

Ainsi, lorsqu'on vous demande de majorer une valeur absolue $|a|$, vous n'avez pas le choix : vous ne pouvez pas majorer a, pour ensuite prendre la valeur absolue dans l'inégalité. Vous devez travailler directement avec $|a|$. C'est TRÈS important.

Cette interdiction se formule de manière équivalente ainsi :

ON NE MAJORE PAS « DANS » LES VALEURS ABSOLUES !

Nous vous laissons vous convaincre que c'est *exactement* la même interdiction que ci-dessus.

Contre-exemple 15. Le raisonnement suivant est FAUX :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad |\underbrace{\cos(x)}_{\leqslant 1}-1| \leqslant |1-1| = 0,$$

parce que cette inégalité implique : $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant |\cos(x) - 1| \leqslant 0$, c'est-à-dire : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) - 1 = 0$, puis : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) = 1$. C'est évidemment faux en une infinité de réels x, et l'erreur vient du fait d'avoir majoré « dans » la valeur absolue. En vérité, on a d'après l'inégalité triangulaire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\cos(x) - 1| \leqslant |\cos(x)| + |1| \leqslant 2.$$

Cette majoration est la meilleure possible : on a le cas d'égalité pour $\cos(x) = -1$, donc pour $x = \pi$ par exemple.

Deux autres maniements faux des valeurs absolues, et extrêmement horripilants :

> $|x - y| \neq |x| - |y|$: la valeur absolue n'est PAS linéaire !

Les plus scrupuleux écrivent : « $|x - y| \leqslant |x| - |y|$ d'après l'inégalité triangulaire », et c'est aussi faux :

> Non, l'inégalité triangulaire n'implique PAS qu'on a :
> $|x - y| \leqslant |x| - |y|$

Contre-exemple 16. On aurait donc cette inégalité : $|1 - 2| \leqslant |1| - |2|$, puis : $1 \leqslant -1$.

Contre-exemple 17. J'ai déjà pu lire la majoration suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \left|(-1)^n - (-1)^{n+1}\right| \leqslant |(-1)^n| - \left|(-1)^{n+1}\right| = 1 - 1 = 0\,;$$

on découvre donc que $\left|(-1)^n - (-1)^{n+1}\right| = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui est bien sûr faux pour n'importe quel entier naturel n (et c'est égal à 2 : factoriser par $(-1)^n$, et utiliser la multiplicativité de la valeur absolue).

La raison de cette erreur est une utilisation bien trop rapide de l'inégalité triangulaire : dans le cas d'une différence, elle nous donne :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{C}^2, \quad |x - y| = |x + (-y)| \leqslant |x| + |-y| = |x| + |y|,$$

donc : $|x - y| \leqslant |x| + |y|$: il n'y a pas de signe moins dans le membre de droite, et c'est normal : le contraire produirait toujours une contradiction, où un nombre positif serait majoré par un nombre négatif.

En résumé :

> **Erreurs classiques à bannir**
>
> $a \leqslant b \Longrightarrow |a| \leqslant |b|$ est faux.
> On n'a pas : $|a - b| \leqslant |a| - |b|$, mais : $|a - b| \leqslant |a| + |b|$.

4.2 Du bon usage des valeurs absolues

Lorsque vous devez majorer une valeur absolue, en général en vue d'utiliser le théorème des gendarmes pour un calcul de limite, vous commencerez très souvent par les étapes suivantes :

> **Majorer une valeur absolue : premiers pas**
>
> **Dans cet ordre (sauf éventuellement en cas de sommes) :**
>
> (1) En cas d'intégrale : utilisez l'inégalité triangulaire pour rentrer la valeur absolue dans l'intégrale.
> (2) Factorisez autant que possible.
> (3) Utilisez la multiplicativité des valeurs absolues (c'est-à-dire : $|a \times b| = |a| \times |b|$ et $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$).
> (4) Simplifiez si possible des valeurs absolues, en écrivant $|a| = a$ si $a \geqslant 0$, et $|a| = -a$ si $a < 0$.

En cas de sommes : utiliser *intelligemment* l'inégalité triangulaire. Voir l'encart plus bas.

Le premier conseil sur les intégrales NE doit PAS être suivi si vous majorez non pas l'intégrale, mais une expression alternative de cette intégrale (obtenue par intégration par parties par exemple, comme dans le cas du lemme de Riemann-Lebesgue).

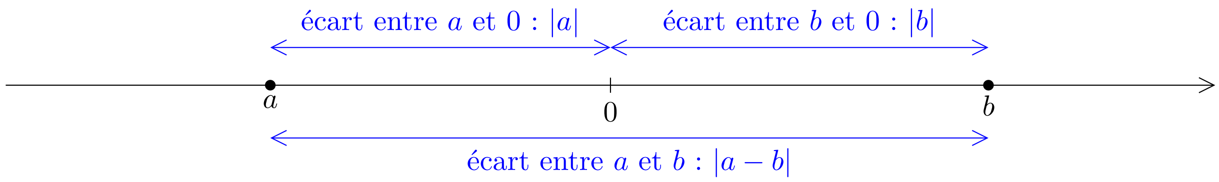
Ensuite, c'est plus subtil et cela dépend (grandement) des situations. On retiendra néanmoins cette Grande Idée qui préside toutes les réflexions en amont, lorsqu'on veut majorer une valeur absolue :

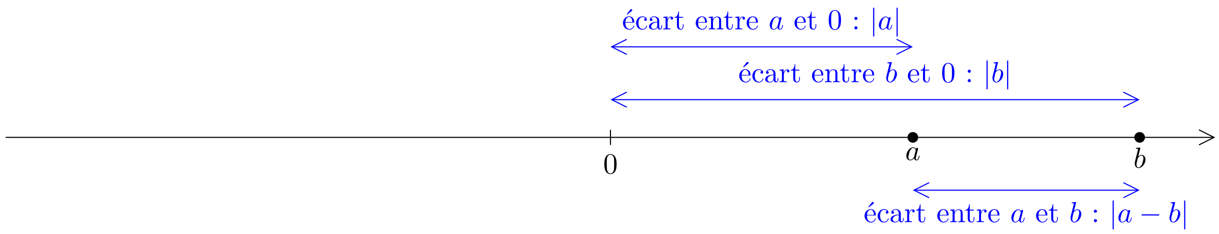
La Grande Idée

$|a-b|$ représente la distance entre a et b.

C'est tout ! Par exemple, intuitivement la distance entre 2 et -3 est 5. Effectivement : $|-3-2| = 5$. Ainsi $|a|$ peut être compris comme la distance entre a et 0 (sur l'axe des réels).

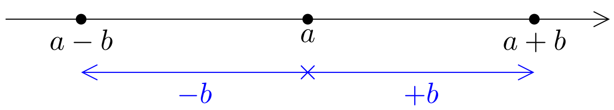
Interprétation visuelle. Avant de voir en quoi cette Grande Idée peut nous aider dans nos majorations, notons qu'elle permet de comprendre visuellement l'inégalité $|a-b| \leqslant |a|+|b|$, qui vous paraît contre-intuitive (puisque vous vous trompez souvent en l'invoquant) :





On voit sur cette figure que l'écart entre a et b ne peut pas être plus grand que le cumul des distances entre 0 d'une part, et a et b d'autre part, donc l'écart entre a et b est plus petit que $|a|+|b|$.

De la même manière, elle permet de traduire immédiatement la condition : $|x-a| < b$, en : $a-b < x < a+b$, sans écrire la moindre ligne de calcul. En effet, les réels x à une distance au plus b de a se voient graphiquement :



On pourrait traduire de même la condition : $|x-a| > b$. Faites-le.

Exercice 9. Résoudre les inéquations suivantes, *par pure lecture graphique* pour les (a) à (d) (pour les suivantes, il faudra probablement faire un peu de calcul) :

(a) $|x-3| \leqslant 5$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ (b) $|x-7| > 4$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ (c) $|x+2| \geqslant 1$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$

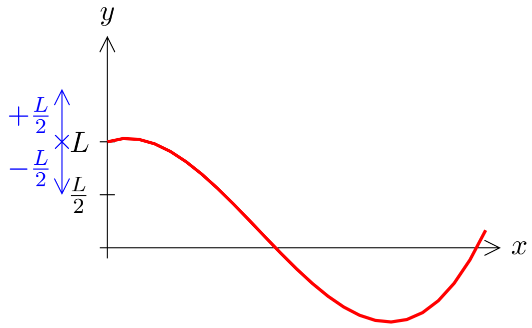
(d) $|x-3| \leqslant |x-6|$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ (e) $\left|\frac{1}{x}-3\right| \leqslant 4$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}^*$ (f) $\left|\frac{1}{x}-3\right| \leqslant 2$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}^*$

Enfin, elle permet de rendre plus explicite la définition de limite, en notant que tout est affaire de proximité. Lorsqu'on écrit :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I : |x-a| < \eta \Longrightarrow |f(x)-L| < \varepsilon,$$

cela signifie que $f(x)$ devient *arbitrairement proche* de L (distance inférieure à ε, et ce *quel que soit* ε), pourvu que x soit *suffisamment proche* de a (à distance au plus η). C'est donc plus concret qu'il n'y paraît. Et en particulier, on parvient mieux à traduire les idées du type : « si $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} L > 0$, alors pour x dans un voisinage de 0 on a : $f(x) > 0$ ». Comme dans l'exemple ci-dessous.

Exemple 18. Montrons que si $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} L > 0$, alors il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]-\eta, \eta[$, on ait : $f(x) > 0$. Pour cela, on note qu'il suffit d'avoir un écart entre $f(x)$ et L inférieur à $\frac{L}{2}$:



On voit en effet graphiquement que si $f(x)$ est à une distance de L inférieure à $\frac{L}{2}$, on a nécessairement : $f(x) \geqslant \frac{L}{2} > 0$. Or on sait que $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} L$, et donc que l'écart entre $f(x)$ et L peut être rendu arbitrairement petit : $|f(x) - L| \leqslant \varepsilon$ (pour tout $\varepsilon > 0$, pour x suffisamment proche de 0). Conformément à la discussion ci-dessus, on prend $\varepsilon = \frac{L}{2}$ pour être dans le cas où l'écart entre $f(x)$ et L est au plus $\frac{L}{2}$. On a alors l'existence de $\eta > 0$ tel que pour tout x vérifiant $|x| < \eta$, on ait :

$$|f(x) - L| \leqslant \frac{L}{2}, \text{ puis : } f(x) \geqslant L - \frac{L}{2} = \frac{L}{2} > 0,$$

d'où le résultat.

4.3 Majoration de $|a-b|$

Cette interprétation nous permet de savoir comment gérer, dans une majoration, une quantité de la forme $|a-b|$: faut-il utiliser l'inégalité triangulaire, ou non ? Réponse :

- si a et b sont « proches » (qu'on abrège en : $a \approx b$) alors $|a-b|$ est « petit » vu que c'est la distance de a à b ; mais dans ce cas, écrire $|a-b| \leqslant |a| + |b|$ serait une TRÈS MAUVAISE IDÉE, puisqu'on remplacerait un $|a-b|$ « petit » par $|a|+|b| \approx 2|b|$, qui peut être « grand » (si b est grand) : on laisse donc $|a-b|$ ainsi, et on majore cette valeur absolue par d'autres méthodes (voir encart ci-dessous) ;
- si a et b ne sont pas « proches », alors on ne perd pas d'information en écrivant : $|a-b| \leqslant |a| + |b|$ (il reste alors à simplifier éventuellement $|a|$ et $|b|$ si l'on connaît leurs signes).

Majorer une valeur absolue : début des subtilités

Quand faut-il majorer $|a-b|$ avec l'inégalité triangulaire ?

(5) **Si $a \not\approx b$:** utiliser l'inégalité triangulaire : $|a-b| \leqslant |a| + |b|$.

(6) **Si $a \approx b$:** NE SURTOUT PAS UTILISER L'INÉGALITÉ TRIANGULAIRE.

Comment majorer $|a-b|$ dans le second cas, si $|a-b|$ est de la forme :

$|u_n - \ell|$: PAS TOUCHE (tend vers 0 : est inférieur à ce qu'on veut pour n assez grand),
$|f(\alpha) - f(\beta)|$: inégalité des accroissements finis (si α et β proches),
$|f(x) - (\alpha + \beta x)|$: formule de Taylor avec reste intégral (si $f(x) = \alpha + \beta x + \underset{x\to 0}{o}(x)$).

Les deux derniers cas sont largement commentés dans la section 5.
Ensuite, il n'y a pas de recette miracle : il faut tenir compte des données pour majorer ce qu'il reste.

Exemple 19. Vous avez démontré en 1re année que si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \neq 0$, alors $\dfrac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\ell}$. Revoyons la démonstration de ce résultat, au regard des explications ci-dessus.

Montrons que $\dfrac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\ell}$ en montrant : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{\ell}\right| = 0$, grâce au théorème des gendarmes. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ assez grand, on a $|u_n| \geqslant \frac{|\ell|}{2} > 0$ vu que $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |\ell| \neq 0$, et donc $u_n \neq 0$, ce qui nous autorise effectivement à diviser par u_n (pour n assez grand). Alors, pour tout n au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| = \left|\frac{\ell - u_n}{u_n \cdot \ell}\right| \overset{(3)}{=} \frac{|\ell - u_n|}{|u_n| \cdot |\ell|}.$$

À ce stade, on sait que u_n et ℓ sont « proches » (vu que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers ℓ). Il est donc HORS DE QUESTION de majorer la quantité « petite » $|\ell - u_n|$ (qui tend vers zéro) par $|\ell| + |u_n|$ (qui tend vers $2|\ell|$, et non vers zéro). ON GARDE CETTE QUANTITÉ AINSI. Il reste à majorer $\dfrac{1}{|u_n| \cdot |\ell|}$ en MINORANT $|u_n| \cdot |\ell|$ et en passant à l'inverse. Mais comme on l'a dit plus haut, on a : $|u_n| \geqslant \dfrac{|\ell|}{2}$ pour tout n assez grand, donc :

$$0 \leqslant \left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| = \frac{|\ell - u_n|}{|u_n| \cdot |\ell|} \leqslant \frac{|\ell - u_n|}{|\ell|^2/2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{\ell}\right| = 0$. C'est ce qu'on voulait démontrer.

Exemple 20. Vous avez démontré en 1re année que si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_2$, alors $u_n \cdot v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1 \cdot \ell_2$ (ici je ne considère que des limites finies). Revoyons la démonstration de ce résultat, au regard des explications ci-dessus.

Montrons que $u_n \cdot v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1 \cdot \ell_2$ en montrant : $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n \cdot v_n - \ell_1 \cdot \ell_2| = 0$, grâce au théorème des gendarmes.

Pour cela, nous allons essayer de faire apparaître, dans la valeur absolue, des différences entre termes « proches ». Nous voudrions donc faire apparaître $|u_n - \ell_1|$ ou $|v_n - \ell_2|$, au vu des hypothèses sur $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$. Nous y parviendrons en ajoutant et soustrayant des quantités convenables. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|u_n \cdot v_n - \ell_1 \cdot \ell_2| = |(u_n - \ell_1 + \ell_1)v_n - \ell_1 \cdot \ell_2| = |(u_n - \ell_1)v_n + \ell_1 v_n - \ell_1 \cdot \ell_2| \overset{(2)}{=} |(u_n - \ell_1)v_n + \ell_1(v_n - \ell_2)|\,.$$

À ce stade, nous allons utiliser l'inégalité triangulaire pour considérer à part $|u_n - \ell_1|$ et $|v_n - \ell_2|$ (*a priori* on ne sait rien de la proximité entre ces deux termes : nous ne gagnons rien à les garder ensemble). Par contre, il est HORS DE QUESTION d'écrire $|u_n - \ell_1| \leqslant |u_n| + |\ell_1|$ ou $|v_n - \ell_2| \leqslant |v_n| + |\ell_2|$, ou nous perdrions l'information que nous avons des quantités « petites » du fait de la convergence de ces suites. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_n \cdot v_n - \ell_1 \cdot \ell_2| \overset{(5)+(6)}{\leqslant} |(u_n - \ell_1)v_n| + |\ell_1(v_n - \ell_2)| \overset{(3)}{=} |u_n - \ell_1| \cdot |v_n| + |\ell_1|\,|v_n - \ell_2|\,.$$

C'est presque gagné, dans la mesure où presque tout converge vers 0 dans le membre de droite : la seule incertitude plane sur le comportement de $|v_n|$ quand $n \to +\infty$. Mais nous savons que $(|v_n|)_{n\geqslant 0}$ converge vers $|\ell_2|$, donc pour tout n assez grand on a $|v_n| \leqslant 2|\ell_2|$ (par exemple : il vient un rang à partir duquel $||v_n| - |\ell_2|| \leqslant |\ell_2|$, en faisant le choix arbitraire $\varepsilon = |\ell_2|$ dans la définition de limite), donc :

$$0 \leqslant |u_n \cdot v_n - \ell_1 \cdot \ell_2| \leqslant \underbrace{|u_n - \ell_1|}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0} \cdot 2|\ell_2| + |\ell_1| \underbrace{|v_n - \ell_2|}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

d'où le résultat par le théorème des gendarmes.

Exemple 21. Montrons que si $(f_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de fonctions qui converge uniformément sur $[0,1]$ vers f, alors $\left(\dfrac{f_n}{1+f_n^2}\right)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers $\dfrac{f}{1+f^2}$

Nous devons commencer par majorer $\left|\dfrac{f_n(x)}{1+(f_n(x))^2}-\dfrac{f(x)}{1+(f(x))^2}\right|$ indépendamment de x :

$$\forall x\in[0,1],\quad \left|\frac{f_n(x)}{1+(f_n(x))^2}-\frac{f(x)}{1+(f(x))^2}\right| = \left|\frac{f_n(x)\left(1+(f(x))^2\right)-f(x)\left(1+(f_n(x))^2\right)}{\left(1+(f_n(x))^2\right)\left(1+(f(x))^2\right)}\right| \overset{(3)+(4)}{=} \frac{\left|f_n(x)\left(1+(f(x))^2\right)-f(x)\left(1+(f_n(x))^2\right)\right|}{\left(1+(f_n(x))^2\right)\left(1+(f(x))^2\right)}$$

Pour poursuivre, il y a deux questions : comment majorer le numérateur, comment minorer le dénominateur ?

Pour le dénominateur, la réponse est ici simple : on veut majorer la différence ci-dessus par une quantité convergeant vers 0, si l'on veut démontrer la convergence uniforme. Est-ce que le dénominateur $\left(1+(f_n(x))^2\right)\left(1+(f(x))^2\right)$ y contribue ? Non, manifestement : la seule dépendance en n est $(f_n(x))^2$, qui converge vers $(f(x))^2$, donc le dénominateur tend vers une limite finie : il n'aura pas d'impact sur une éventuelle limite nulle (cela aurait été le cas si, par exemple, on avait démontré qu'il tend vers $+\infty$). Ainsi on ne perd pas grand'chose à s'en débarrasser ! Pour ce faire, on le MINORE : $\forall x\in[0,1]$, $\left(1+(f_n(x))^2\right)\left(1+(f(x))^2\right)\geqslant 1\cdot 1=1$. Par passage à l'inverse :

$$\forall x\in[0,1],\quad \left|\frac{f_n(x)}{1+(f_n(x))^2}-\frac{f(x)}{1+(f(x))^2}\right| \leqslant \left|f_n(x)\left(1+(f(x))^2\right)-f(x)\left(1+(f_n(x))^2\right)\right|.$$

Ensuite : faut-il utiliser l'inégalité triangulaire ? si oui, comment ? si non, quels termes mettre ensemble, et comment les majorer ? Pour y répondre, nous devons réfléchir à ce qui est « proche » ici : f_n et f. Donc les différences de la forme $|f_n(x)-f(x)|$ sont « petites » : il faut les faire apparaître, et les garder. Or, en développant, on a pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[0,1]$:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f_n(x)}{1+(f_n(x))^2}-\frac{f(x)}{1+(f(x))^2}\right| &= \left|f_n(x)+f_n(x)(f(x))^2-f(x)-f(x)(f_n(x))^2\right|\\
&= \left|f_n(x)-f(x)+f_n(x)(f(x))^2-f(x)(f_n(x))^2\right|\\
&\overset{(2)}{=} \left|(f_n(x)-f(x))+f_n(x)f(x)(f(x)-f_n(x))\right|\\
&\overset{(2)}{=} \left|(f_n(x)-f(x))\cdot(1-f(x)f_n(x))\right|\\
&\overset{(3)}{=} |f_n(x)-f(x)|\cdot|1-f(x)f_n(x)| \leqslant \|f_n-f\|_\infty\cdot|1-f(x)f_n(x)|
\end{aligned}$$

On est parvenu à ce qu'on voulait : faire apparaître ce qu'on sait être « petit », à savoir $\|f_n-f\|\infty$. En revanche, pour la somme $|1-f(x)f_n(x)|$, il ne s'agit *a priori* pas de termes « proches » (on n'en sait rien). On peut utiliser l'inégalité triangulaire sans scrupule pour les majorer pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[0,1]$:

$$\left|\frac{f_n(x)}{1+(f_n(x))^2}-\frac{f(x)}{1+(f(x))^2}\right| \overset{(5)+(6)}{\leqslant} \|f_n-f\|_\infty\cdot(1+|f(x)|\cdot|f_n(x)|) \leqslant \|f_n-f\|_\infty\cdot(1+\|f\|_\infty\cdot\|f_n\|_\infty).$$

Il reste à s'assurer que le terme en facteur de $\|f_n-f\|_\infty$ reste borné pour ne pas contrebalancer la limite nulle de $\|f_n-f\|_\infty$. Pour cela, seul $\|f_n\|_\infty$ peut éventuellement poser problème, mais comme $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers f, on a pour tout n assez grand : $\|f_n\|_\infty\leqslant 2\|f\|_\infty$ (argument analogue à celui utilisé avec $(v_n)_{n\geqslant 0}$ dans l'exemple précédent), et donc, pour tout n assez grand :

$$\forall x\in[0,1],\quad \left|\frac{f_n(x)}{1+(f_n(x))^2}-\frac{f(x)}{1+(f(x))^2}\right| \leqslant \|f_n-f\|_\infty\cdot\left(1+2(\|f\|_\infty)^2\right).$$

Par propriété de la borne supérieure, pour tout n assez grand :

$$0\leqslant \left\|\frac{f_n}{1+f_n^2}-\frac{f}{1+f^2}\right\|_\infty \leqslant \underbrace{\|f_n-f\|_\infty}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0}\cdot\left(1+2(\|f\|_\infty)^2\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

et on conclut avec le théorème des gendarmes.

5 ★ Majorer une différence « petite » : convexité, inégalité des accroissements finis et théorème de Taylor

5.1 Cadre d'utilisation

Les raisonnements fins d'analyse exigent souvent qu'on majore des différences entre quantités proches. De telles différences apparaissent naturellement lorsqu'on étudie :

1. **La différence entre les évaluations d'une même fonction en deux réels « proches »**, par exemple :
$$\boxed{e^x - 1}\ (= e^x - e^0),\ \boxed{\sin(x)}\ (= \sin(x) - \sin(0)) \text{ quand } x \text{ est près de } 0,$$
$$\boxed{\cos\left(\frac{nx}{n+1}\right) - \cos(x)} \text{ quand } n \to +\infty,$$
et plus généralement $\boxed{f(x) - f(u_n)}$ avec $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$.
2. **La différence entre une fonction et la partie régulière de son développement limité** à un certain ordre, en un point. Si l'on s'en tient aux fonctions usuelles, ce genre de différence peut être :
$$\boxed{e^x - (1+x)},\ \boxed{\cos(x) - 1},\ \boxed{\sin(x) - x},\ \boxed{\ln(1+x) - x},\ \boxed{\ln(x) - (x-1)},\ \boxed{\arctan(x) - x},$$
$$\boxed{(1+x)^\alpha - (1+\alpha x)},$$
etc. Il est rare que nous ayons besoin d'aller au-delà de la partie affine du développement limité.

Le premier cas est en fait un cas particulier du second (en prenant un développement limité à l'ordre 0).

Dans le chapitre sur les suites de fonctions, cela se produit en général dans l'étude de $|f_n(x) - f(x)|$, lorsque vous désirez démontrer la convergence uniforme, et qu'une étude de variations n'est pas une idée raisonnable. Nous donnons alors deux méthodes *excellentes* qui permettent de remplacer la quantité « compliquée » $|f_n(x) - f(x)|$ par des quantités « linéaires » (c'est-à-dire de l'ordre de grandeur de x), voire quadratiques (de l'ordre de grandeur de x^2). Voici comment procéder :

1. $\boxed{\text{Si vous étudiez la différence entre deux évaluations d'une même fonction}}$, c'est-à-dire de la forme $f(b) - f(a)$ avec a et b « proches », alors vous utilisez **l'inégalité des accroissements finis** pour obtenir :
$$|f(b) - f(a)| \leqslant M \cdot |b - a|,$$
où M est un majorant de $|f'|$ sur $[a, b]$ (avec les notations de ce chapitre, on peut prendre pour M son plus petit majorant sur $[a, b]$, c'est-à-dire : $M = \|f'\|_\infty$). **Attention à ne pas oublier la valeur absolue**. Si a et b sont « proches », alors $|b - a|$ est « petit », et si la taille de M est aussi contrôlée alors on en déduit une majoration explicite, simple et « petite » de $|f(b) - f(a)|$.
En général, dans les questions de convergence uniforme, a dépend de n et converge vers $b = x$, donc ils sont effectivement « proches » pour n grand.
2. $\boxed{\text{Si vous étudiez la différence entre une fonction et la partie régulière de son développement limité}}$ à l'ordre k (en pratique $k \leqslant 2$), alors vous utilisez la formule de Taylor avec reste intégral, que nous rappelons. Soit f une application de classe C^{k+1} sur I. Alors, pour tous $a, x \in I$, on a :
$$f(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i + R(x),$$
où : $R(x) = \displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\mathrm{d}t = (x-a)^{k+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(a + t(x-a))\mathrm{d}t$. Ces deux intégrales sont reliées par un changement de variable. **Je recommande de retenir la seconde, pourtant plus compliquée, et j'explique pourquoi plus bas**.
On utilise en général cette formule en $a = 0$, et à l'ordre $k = 1$. Elle donne alors :
$$\boxed{f(x) = f(0) + f'(0)x + \int_0^x (x-t) f''(t)\mathrm{d}t = f(0) + f'(0)x + x^2 \int_0^1 (1-t) f''(tx)\mathrm{d}t.}$$

3. Si la fonction f est convexe, on a immédiatement : $f(x) \geqslant f(a) + f'(a)(x-a)$, sans recours à la formule de Taylor. De même si f est concave, en renversant l'inégalité : c'est un gain de temps précieux.

L'intérêt de la formule de Taylor avec reste intégral est qu'elle rend explicite le terme d'erreur de la formule de Taylor-Young (et affine l'inégalité de Taylor-Lagrange). Cette dernière formule a aussi le défaut d'être inutilisable quand x est *a priori* loin de a, et de plus le terme d'erreur est inexploitable dans des inégalités. **Voyons comment utiliser cette formule pour répondre à la problématique de notre section.** Je l'écris dans le cas $a = 0$ qui est le plus fréquent, mais il est facile de l'adapter à toute autre situation. Si f est de classe C^{k+1} sur un intervalle I contenant 0, et si la dérivée $(k+1)^{\mathrm{e}}$ vérifie sur cet intervalle : $\alpha \leqslant f^{(k+1)} \leqslant \beta$ (en pratique α ou β est nul, i.e. $f^{(k+1)}$ est de signe constant), alors pour tout $x \in I$ tel que $x^{k+1} \geqslant 0$ on a :

$$\alpha x^{k+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} \mathrm{d}t \leqslant R(x) \leqslant \beta x^{k+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} \mathrm{d}t.$$

Attention si $x^{k+1} < 0$, c'est-à-dire si $k+1$ est impair et x strictement négatif : les inégalités se renversent. L'encadrement ci-dessus donne après calcul des intégrales (faites-le) :

$$\frac{\alpha x^{k+1}}{(k+1)!} \leqslant R(x) \leqslant \frac{\beta x^{k+1}}{(k+1)!}.$$

On en déduit, en vertu de la formule de Taylor avec reste intégral $f(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i + R(x)$:

$$\frac{\alpha x^{k+1}}{(k+1)!} \leqslant f(x) - \sum_{i=0}^{k} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i \leqslant \frac{\beta x^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Si, à la place, la donnée sur f est que $f^{(k+1)}$ est bornée en valeur absolue par M, alors on écrit à la place :

$$\left| f(x) - \sum_{i=0}^{k} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i \right| = |R(x)| \leqslant \frac{|x-a|^{k+1}}{k!} \int_0^1 (1-t)^k |f^{(k+1)}(a+t(x-a))| \mathrm{d}t \leqslant M \frac{|x-a|^{k+1}}{k!} \int_0^1 (1-t)^k \mathrm{d}t.$$

On calcule cette intégrale et on en déduit :

$$\forall x \in [a,b], \quad \left| f(x) - \sum_{i=0}^{k} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i \right| \leqslant M \frac{|x-a|^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Pour le cas particulier fréquent $a = 0$ et $k = 1$, cela donne :

$$\boxed{\forall x \in [0,b], \ |f(x) - f(0) - f'(0)x| \leqslant \frac{Mx^2}{2}.}$$

On a majoré explicitement la différence entre $f(x)$ et la partie régulière de son développement limité, par un terme extrêmement simple : mission accomplie.

Remarque. La méthode utilisée ci-dessus pour majorer le reste est SYSTÉMATIQUE : on majore *uniquement* la dérivée $(k+1)^{\mathrm{e}}$ en présence par une constante, et on intègre la fonction puissance qui reste. *On ne majore pas* $(1-t)^k$ *par* 1*, la majoration devient ainsi moins bonne.*

Exemple 22. Soit $x > 0$. Mesurons l'écart entre $\ln(1+x)$ et la partie régulière de son développement limité à l'ordre 1 en 0, c'est-à-dire x. On a, d'après la formule de Taylor avec reste intégral :

$$\ln(1+x) = x + x^2 \int_0^1 (1-t) \ln''(1+tx) \mathrm{d}t = x - x^2 \int_0^1 \frac{1-t}{(1+tx)^2} \mathrm{d}t,$$

donc :

$$|\ln(1+x) - x| = x^2 \int_0^1 \frac{1-t}{(1+tx)^2} \mathrm{d}t \leqslant x^2 \int_0^1 (1-t) \mathrm{d}t = x^2 \left[-\frac{(1-t)^2}{2} \right]_0^1 = \frac{x^2}{2}.$$

On peut même être un peu plus précis, si l'on encadre l'intégrale SANS valeurs absolues (et c'est nécessaire, si l'on veut l'encadrement plus précis suivant : $\ln(1+x) \leqslant x$). On vérifie qu'on a : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-t}{(1+tx)^2}\mathrm{d}t \geqslant 0$, et donc :

$$\ln(1+x) = x - \underbrace{x^2 \int_0^1 \frac{1-t}{(1+tx)^2}\mathrm{d}t}_{\geqslant 0} \leqslant x.$$

On a démontré l'inégalité classique : $\forall x > 0$, $\ln(1+x) \leqslant x$, qui s'obtient aussi par un argument de concavité (elle vaut même si $x > -1$). Elle est plus précise que la majoration qu'impliquerait celle de $|\ln(1+x) - x|$ ci-dessus.

Remarque très importante (sauf si vous voulez vous compliquer la vie bêtement). En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral en a avec une fonction usuelle, IL NE VOUS SERT À RIEN DE RECALCULER $f^{(n)}(a)$ POUR TOUT n ! En effet, la partie régulière d'un développement limité est **unique**, donc vous savez SANS CALCUL que vous tomberez nécessairement sur le développement limité usuel que vous avez toujours eu à apprendre ! Ainsi, par exemple, en utilisant la formule de Taylor avec reste intégral en 1 avec le logarithme :

$$\forall x > 0, \quad \ln(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{\ln^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n + (x-1)^{N+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^N}{N!} \ln^{(N+1)}(1+t(x-1))\mathrm{d}t,$$

vous savez SANS CALCUL que : $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{\ln^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n$ (développement limité usuel). Ne perdez pas de temps !

Remarque. Je préfère la seconde formule du reste intégral (où l'intervalle d'intégration est $[0,1]$), bien qu'elle soit en apparence plus compliquée. La raison à cela est qu'on utilise en général le reste intégral dans la manipulation d'**inégalités**. Or, pour manipuler des intégrales dans les inégalités, nous avons besoin en général de la **croissance de l'intégrale**, qui n'est pas valable pour $\displaystyle\int_a^x$ si $x < a$. C'est pour éviter une distinction de cas que je préfère avoir l'intégrale $\displaystyle\int_0^1$, où la croissance de l'intégrale est toujours utilisable.

Remarque. On peut se demander pourquoi privilégier la formule de Taylor avec reste intégral à un argument de convexité, car ce dernier est souvent très rapide. Je suis d'accord : *quand c'est possible*, privilégiez un argument de convexité. Seulement, vous NE pouvez PAS démontrer, par un argument de convexité, une inégalité :

— faisant intervenir des puissances de x strictement supérieures à 1 : x^2, x^3, etc. ;

— qui MAJORE par la partie régulière du développement limité à l'ordre 1 (plus des termes correctifs) ; ou inversement dans le cas d'une fonction concave.

La formule de Taylor permet d'affiner les inégalités en proposant des encadrements (donc majoration ET minoration) et en incluant des puissances de x plus élevées.

Exemple 23. (utilisation de l'inégalité des accroissements finis) Comme :

$$\arctan\left(n^2+n\right) - \arctan\left(n^2\right) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0,$$

la différence $\arctan\left(n^2+n\right) - \arctan\left(n^2\right)$ est « petite » pour n grand. Mais à quel point est-elle petite ? L'est-elle suffisamment pour que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(\arctan\left(n^2+n\right) - \arctan\left(n^2\right)\right)$ converge, par exemple ? Il ne semble pas évident de trouver un équivalent du terme général en $+\infty$ (même si on pourrait y parvenir : exercice). Toutefois on remarque qu'il s'agit de la différence d'une même fonction évaluée en deux réels « proches », donc l'inégalité des accroissements finis devrait nous donner une bonne majoration. Pour tout n au voisinage de $+\infty$ on a, d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$|\arctan\left(n^2+n\right) - \arctan\left(n^2\right)| \leqslant \max_{x\in[n^2,n^2+n]}\left|\frac{1}{1+x^2}\right| \cdot |(n^2+n)-n^2| = \frac{1}{1+n^4}\cdot n \leqslant \frac{n}{n^4} = \frac{1}{n^3},$$

or la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^3}$ est d'exposant $3>1$ donc elle converge. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 0}\left(\arctan\left(n^2+n\right)-\arctan\left(n^2\right)\right)$ converge également. D'où le résultat.

Exercice 10. Obtenir la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0}\left(\arctan\left(n^2+n\right)-\arctan\left(n^2\right)\right)$ autrement.

Exemple 24. (utilisation de la formule de Taylor avec reste intégral) L'application $f : x \mapsto \frac{\cos(x)-1}{x^2}$ est continue sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, prolongeable par continuité sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ du fait que :

$$f(x)\underset{x\to 0}{\sim}\frac{-x^2/2}{x^2}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}-\frac{1}{2},$$

donc elle est bornée d'après le théorème des bornes atteintes. Mais cela ne nous donne pas des bornes explicites : comment en trouver ?

Cela revient à encadrer $\cos(x)-1$ pour $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$. Mais l'encadrement trivial $-1\leqslant\cos(x)\leqslant 1$ donnerait :

$$-\frac{2}{x^2}\leqslant\frac{\cos(x)-1}{x^2}\leqslant 0,$$

qui ne fournit pas de minorant puisque $-\frac{2}{x^2}\underset{x\to 0^+}{\longrightarrow}-\infty$ et n'est donc pas bornée au voisinage de 0. On peut alors se dire que : $|\cos(x)-1|=|\cos(x)-\cos(0)|$, ce qu'on peut majorer par $|x|$ grâce à l'inégalité des accroissements finis (le vérifier). Mais là encore, c'est insuffisant : ce ne donnerait que l'encadrement $|f(x)|\leqslant\frac{1}{x}$, qui ne fournit pas de borne de f puisque $\frac{1}{x}\underset{x\to 0^+}{\longrightarrow}+\infty$ (notons tout de même que l'encadrement est *légèrement* meilleur ainsi, vu que $\frac{1}{x}\ll\frac{1}{x^2}$ quand x est au voisinage de 0).

Néanmoins, on note que $\cos(x)-1$ est aussi la différence de $\cos(x)$ avec son développement limité **à l'ordre** 1 : on rappelle en effet que $\cos(x)=1+\underset{x\to 0}{o}(x)$ (pas de terme en x^1). On peut donc le majorer efficacement, tant que x est au voisinage de 0, grâce à la formule de Taylor avec reste intégral, en 0 à l'ordre 1. Pour tout $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, cela nous donne :

$$\cos(x)=1+x^2\int_0^1(1-t)\cos''(tx)\mathrm{d}t=1-x^2\int_0^1(1-t)\cos(tx)\mathrm{d}t.$$

Or, si $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ et $t\in[0,1]$, alors $tx\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ et donc $\cos(tx)\in[0,1[$. On en déduit facilement un encadrement du reste intégral, et :

$$\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right],\quad -\frac{x^2}{2}\leqslant\cos(x)-1\leqslant 0.$$

Donc : $\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, $-\frac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant 0$. D'où le résultat.

Exercice 11. Trouver une autre démonstration de l'encadrement de $\cos(x)-1$ ci-dessus, en utilisant une formule de trigonométrie adéquate et le fait que $|\sin(x)|\leqslant|x|$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ (conséquence de l'inégalité des accroissements finis).

Exercice 12. À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, ou d'une inégalité de convexité, montrer :

(a) $\forall x\in]0,+\infty[,\quad x-\frac{x^2}{2}\leqslant\ln(1+x)\leqslant x$, (b) $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R}_+,\quad e^x\geqslant\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$,

(c) $\forall x\in\mathbb{R},\quad 1-\frac{x^2}{2}\leqslant\cos(x)\leqslant 1$, (d) $\forall x\in\mathbb{R}_+,\quad x-\frac{x^3}{6}\leqslant\sin(x)\leqslant x$,

(e) $\forall x\in\mathbb{R}_+,\quad x-\frac{x^3}{3}\leqslant\arctan(x)\leqslant x$, (f) $\forall x\in\mathbb{R}_-,\quad x\leqslant\arctan(x)\leqslant x-\frac{x^3}{3}$.

(g) $\forall x\in\mathbb{R}_+,\quad 1-x\leqslant\frac{1}{1+x}\leqslant 1$, (h) $\forall x\in\mathbb{R}_+,\quad 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}\leqslant\sqrt{1+x}\leqslant 1+\frac{x}{2}$.

Nous vous encourageons à représenter graphiquement toutes les quantités en jeu, afin de vous convaincre de la qualité de l'encadrement pour certaines valeurs de x.

Ces deux derniers encadrements sont, dans l'idée, la méthode employée par nos anciens pour approcher des calculs d'inverse ou de racine carrée de « petits » nombres. Par exemple, cela nous donne : $1{,}375 \leqslant \sqrt{2} \leqslant 1{,}5$.

5.2 Quand préférer ces majorations à des majorations plus basiques ?

Il est important de retenir que ces deux méthodes **donnent d'excellentes inégalités, à condition que** :

— $\boxed{a \text{ et } b \text{ soient proches}}$ dans le cas de l'inégalité des accroissements finis : $|f(b) - f(a)| \leqslant \|f'\|_\infty \cdot |b - a|$;

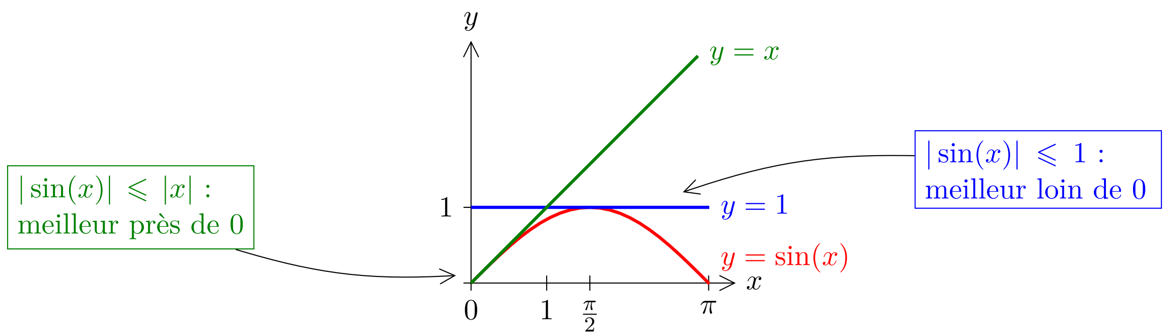
— $\boxed{\text{que } x \text{ soit proche de } a}$ dans le cas de l'inégalité : $\left| f(x) - \sum_{i=0}^{k} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i \right| \leqslant M \frac{|x-a|^{k+1}}{(k+1)!}$ **(en général** $a = 0$ **et** x **doit donc être « proche de** 0 **»)**.

Illustrons ce principe avec l'inégalité obtenue grâce à l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin(x)| = |\sin(x) - \sin(0)| \leqslant 1 \cdot |x - 0| = |x|.$$

D'après ce que nous venons de dire, $|\sin(x)| \leqslant |x|$ est une excellente inégalité quand x et 0 sont proches (ici $a = x$ et $b = 0$). Justifions-le au regard de la définition de l'analyse donnée en introduction de ce document.

Justification avec la première définition de l'analyse : majorer par du connu « proche ». L'inégalité $|\sin(x)| \leqslant |x|$ n'est pas plus intéressante que l'inégalité classique $|\sin(x)| \leqslant 1$ si x est grand (comparez pour $x = \frac{1}{1000}$ et pour $x = 1000$ par exemple). La *proximité* entre le sinus et ces deux majorants est très visuelle :



On voit bien que sur $[0{,}1]$, l'application $x \mapsto |\sin(x)|$ est plus « proche » de $x \mapsto |x|$ (écart infime entre les deux courbes), donc $|\sin(x)| \leqslant |x|$ est une majoration fine. À l'inverse, pour $x > 1$, il est clair que $x \mapsto 1$ est plus proche que $x \mapsto |x|$ du sinus. Donc $|\sin(x)| \leqslant 1$ est un meilleur choix.

Justification avec la seconde définition de l'analyse : majorer simplement « sans perdre d'information ». Il s'agit de se demander si, en « remplaçant » le sinus par $|x|$ ou 1 *via* une majoration, « cela ne change pas grand'chose » : cela ne change rien si $|\sin(x)|$ et son majorant vérifient les mêmes propriétés. Ainsi listons les propriétés vérifiées par $x \mapsto \sin(x)$, $x \mapsto |x|$ et $x \mapsto 1$:

$\sin(x)$	$\|x\|$	1
bornée limite nulle en 0	non bornée limite nulle en 0	bornée limite 1 en 0

On en déduit donc la qualité des majorations $|\sin(x)| \leqslant |x|$ et $|\sin(x)| \leqslant 1$ selon les informations sur $\sin(x)$ que conservent les majorants $|x|$ et 1 :

Informations perdues avec le majorant :	
$\|\sin(x)\| \leqslant \|x\|$	$\|\sin(x)\| \leqslant 1$
aspect borné	limite nulle en 0

A priori, les deux inégalités font perdre une information majeure, et aucune ne prévaut en première analyse. En revanche :

— **lorsqu'on est près de** 0 : $x \mapsto |x|$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$, mais est bien sûr bornée si l'on se restreint à un segment, et à plus forte raison si l'on est près de 0 ; alors, le tableau comparatif tourne en sa faveur :

Près de 0. Informations perdues avec le majorant :	
$\lvert\sin(x)\rvert \leqslant \lvert x\rvert$	$\lvert\sin(x)\rvert \leqslant 1$
	limite nulle en 0

on perd donc moins d'informations en majorant $|\sin(x)|$ par $|x|$ dans ce cas, et « remplacer » $|\sin(x)|$ par $|x|$ est quasiment indolore par rapport au remplacement de $|\sin(x)|$ par 1 : en conclusion, on privilégie la majoration $|\sin(x)| \leqslant |x|$;

— **lorsqu'on est loin de** 0 : on ne peut pas exclure le fait d'être au voisinage de $+\infty$ (donc l'aspect non borné de $x \mapsto |x|$ revient en ligne de compte), et par contre la limite en 0 n'est plus à prendre en compte (vu qu'on est loin de 0) ; alors le tableau comparatif devient :

Loin de 0. Informations perdues avec le majorant :	
$\lvert\sin(x)\rvert \leqslant \lvert x\rvert$	$\lvert\sin(x)\rvert \leqslant 1$
aspect borné	

on perd donc moins d'informations en majorant $|\sin(x)|$ par 1 dans ce cas, et la majoration $|\sin(x)| \leqslant 1$ est préférable.

Nous avons justifié de deux façons différentes (mais équivalentes) l'approche suivante :

$|\sin(x)| \leqslant x$, ou $|\sin(x)| \leqslant 1$?

$$\begin{array}{rcl} x \text{ près de } 0 & \Longrightarrow & \text{préférer } |\sin(x)| \leqslant |x| \\ x \text{ loin de } 0 & \Longrightarrow & \text{préférer } |\sin(x)| \leqslant 1 \end{array}$$

Ce que nous venons de faire avec le sinus vaut pour toute fonction, et vaut aussi pour la formule de Taylor.

Exercice 13.

1. Calculer les limites de $\frac{\arctan(x)-x}{x}$ quand $x \to 0$ et quand $x \to +\infty$, *sans recourir aux développements limités* (c'est seulement pour l'exercice ; sinon, je concède volontiers que c'est sans grand intérêt).
2. Encadrer $x \mapsto \frac{\arctan(x)-x}{x}$ sur $]0, +\infty[$ par des constantes explicites.

Analyser votre méthode de résolution dans les deux cas (près ou loin de 0), à la lumière de la discussion ci-dessus.

En particulier, **dans les questions d'intégrabilité** (plus précisément les hypothèses de domination, où il faut des inégalités et non des équivalents), c'est pour résoudre les problèmes **au voisinage de** 0 que les inégalités de cette section apporteront un ingrédient supplémentaire. Voir mon document *Méthodes* sur l'intégration pour plus de détails.

Même en ayant parfaitement en tête ces résultats, on ne pense pas à les employer si l'on ne reconnaît pas une quantité de la forme $f(b) - f(a)$, etc. ; il faut faire un effort conceptuel pour que, en voyant la quantité $\sin(x) - x$, on voie au-delà de quantités brutes, et reconnaisse la différence d'une fonction et de la partie régulière de son développement limité. Il faut avoir l'habitude de songer *à la nature des objets mathématiques* pour que cela saute aux yeux sans même y penser. Je n'insisterai jamais assez là-dessus. Cette habitude commencera en mémorisant les inégalités de la figure 3, qui sont les plus fréquemment utilisées.

Exercice 14. Représenter graphiquement toutes les fonctions de la figure 3, pour vous convaincre que les inégalités considérées comme plus pertinentes au voisinage de 0 sont *effectivement* de bonnes approximations.

Ces résultats sont d'une très grande souplesse, et on peut les utiliser dans tous les domaines de l'analyse. Dans les deux exercices suivants, on les utilise pour démontrer la convergence uniforme d'une suite de fonctions.

FIGURE 3 – À placer sur votre réfrigérateur.

L'ART DE LA MAJORATION : KIT DE SURVIE

	Inégalités à retenir	Comment les démontrer	Quand les privilégier
f	$\lvert f(b)-f(a)\rvert \leqslant \lVert f'\rVert_\infty \lvert b-a\rvert$	Accroissements finis	Quand a est proche de b, et f' facile à encadrer
sin	$\lvert\sin(x)\rvert \leqslant 1$ $\lvert\sin(x)\rvert \leqslant \lvert x\rvert$	C'est du cours Accroissements finis	Quand x est « grand » : $\lvert x\rvert \geqslant 1$ Quand x est « petit » : $\lvert x\rvert \leqslant 1$, x au voisinage de 0
arctan	$\lvert\arctan(x)\rvert \leqslant \frac{\pi}{2}$ $\lvert\arctan(x)\rvert \leqslant \lvert x\rvert$	C'est du cours Accroissements finis	Quand x est « grand » : $\lvert x\rvert \geqslant \frac{\pi}{2}$ Quand x est « petit » : $\lvert x\rvert \leqslant \frac{\pi}{2}$, x au voisinage de 0
ln	$\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leqslant x$ $\forall x > 0,\ \ln(x) \leqslant x-1$	Taylor, concavité Taylor, concavité	Quand x est « petit » : x au voisinage de 0 Quand x est au voisinage de 1
exp	$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geqslant 1+x$	Taylor, convexité	Quand x est « petit » : x au voisinage de 0

Exercice 15. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $\forall x \in [0,1]$, $f_n(x) = \arctan\left(\dfrac{nx}{\sqrt{x}+n}\right)$. À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction arc tangente.

Exercice 16. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $\forall x \in [0,1]$, $f_n(x) = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$.

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers $f : x \mapsto e^x$ **(ultra-classique !)**.
2. Avec l'inégalité des accroissements finis, montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\ \forall x \in [0,1], \quad |f_n(x)-f(x)| \leqslant e \cdot \left| n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - x\right|.$$
3. Avec la formule de Taylor, montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\ \forall x \in [0,1], \quad \left|\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right| \leqslant \frac{x^2}{2n^2}.$$
4. En déduire que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers f.

6 Un exemple qui récapitule tous les conseils du document

Je vais démontrer à la main (c'est-à-dire sans théorème d'interversion, mais avec le théorème des gendarmes) :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \left(\frac{x^n\sin(x) - x\cos\left(n\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right)}{1+x^n-e^{-n}}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 (-x\cos(x))\mathrm{d}x = -1-\cos(1)-\sin(1).$$

(cette valeur exacte ne sera pas démontrée dans ce qui suit : ce n'est pas le sujet)

Notons que c'est effectivement ce que vous obtiendriez si vous pouviez passer à la limite sous le signe intégrale. C'est donc facile à conjecturer (mais moins facile à démontrer).

D'après ce qu'on rappelle au début de la section 4, il s'agit de montrer :

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \int_0^1 \left(\frac{x^n\sin(x) - x\cos\left(n\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right)}{1+x^n-e^{-n}}\right)\mathrm{d}x - \int_0^1 (-x\cos(x))\mathrm{d}x \right| = 0.$$

J'ai choisi cet exemple effrayant parce qu'il me permettra d'illustrer TOUS les conseils des sections précédentes (majoration de quotients, gestion des valeurs absolues, utilisation de l'inégalité des accroissements finis ou de la formule de Taylor), ainsi que de mon document *Méthodes* du chapitre d'intégration, que je vous conseille de lire ou relire pour que la lecture ci-dessous soit profitable au maximum.

Je vais détailler chaque étape de la majoration. Ce n'est pas grave si vous ne tirez pas toute la substance du raisonnement. N'en tirer qu'une partie serait un progrès excellent. Les labels rouges au-dessus des inégalités et égalités font référence aux conseils des encarts de la section 4.2 (*Du bon usage des valeurs absolues*).

Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a :

$$0 \leqslant \left| \int_0^1 \left(\frac{x^n \sin(x) - x\cos\left(n \sin\left(\frac{x}{n}\right)\right)}{1 + x^n - e^{-n}} \right) \mathrm{d}x - \int_0^1 (-x\cos(x))\mathrm{d}x \right|$$

(pour l'instant, on va se contenter de la linéarité de l'intégrale pour regrouper les termes à comparer)

$$= \left| \int_0^1 \left(\frac{x^n \sin(x) - x\cos\left(n \sin\left(\frac{x}{n}\right)\right)}{1 + x^n - e^{-n}} + x\cos(x) \right) \mathrm{d}x \right|$$

(on rappelle qu'on ne majore pas « dans » les valeurs absolues : commençons par utiliser l'inégalité triangulaire, et par simplifier du mieux possible la valeur absolue de l'intégrande)

$$\overset{(1)}{\leqslant} \int_0^1 \left| \frac{x^n \sin(x) - x\cos\left(n \sin\left(\frac{x}{n}\right)\right)}{1 + x^n - e^{-n}} + x\cos(x) \right| \mathrm{d}x$$

(à présent réfléchissons, avant d'utiliser sauvagement l'inégalité triangulaire : comme ce fut formulé dans les conseils, il ne faut surtout pas l'utiliser s'il y a une différence entre deux termes « proches » ; or $\frac{x\cos\left(n\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right)}{1+x^n-e^{-n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{x\cos(x)}{1} = x\cos(x)$ pour $x \in [0{,}1[$ car $n\sin\left(\frac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n \times \frac{x}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$, donc $x\cos(x)$ et $\frac{x\cos\left(n\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right)}{1+x^n-e^{-n}}$ sont « proches » et nous devons conserver leur différence : regroupons-les)

$$= \int_0^1 \left| \frac{x^n \sin(x)}{1 + x^n - e^{-n}} + x\cos(x) - \frac{x\cos\left(n \sin\left(\frac{x}{n}\right)\right)}{1 + x^n - e^{-n}} \right| \mathrm{d}x$$

(j'utilise inégalité triangulaire comme annoncé, pour gérer séparément des valeurs absolues avec moins de termes, mais sans séparer les termes proches)

$$\overset{(5)+(6)}{\leqslant} \int_0^1 \left(\left| \frac{x^n \sin(x)}{1 + x^n - e^{-n}} \right| + \left| x\cos(x) - \frac{x\cos\left(n \sin\left(\frac{x}{n}\right)\right)}{1 + x^n - e^{-n}} \right| \right) \mathrm{d}x$$

(à présent, la linéarité de l'intégrale va me permettre de traiter à part chaque terme problématique)

$$= \int_0^1 \left| \frac{x^n \sin(x)}{1 + x^n - e^{-n}} \right| \mathrm{d}x + \int_0^1 \left| x \left(\cos(x) - \frac{\cos\left(n \sin\left(\frac{x}{n}\right)\right)}{1 + x^n - e^{-n}} \right) \right| \mathrm{d}x$$

(avant de majorer, supprimons autant de valeurs absolues que possible pour nous simplifier la vie : pour cela, utilisons leur multiplicativité : on a $1 + x^n - e^{-n} \geqslant 0$, $\sin(x) \geqslant 0$ et $x^n \geqslant 0$ pour tout $x \in [0{,}1]$)

$$\overset{(3)+(4)}{=} \int_0^1 \frac{x^n \sin(x)}{1 + x^n - e^{-n}} \mathrm{d}x + \int_0^1 x \left| \cos(x) - \frac{\cos\left(n \sin\left(\frac{x}{n}\right)\right)}{1 + x^n - e^{-n}} \right| \mathrm{d}x$$

(voyons à présent comment majorer intelligemment, c'est-à-dire en réfléchissant à ce qu'il faut garder ou non : conformément aux conseils de mon document *Méthodes* du chapitre d'intégration, il est hors de question de majorer x^n par 1 dans la première intégrale, puisque c'est ce terme qui fait tendre vers 0 l'intégrande – perte d'information ! – : si on l'enlève, ce n'est plus le cas et c'est fichu pour démontrer ce qu'on veut ! on le laisse donc, et on majore le reste de l'intégrande : on a $\sin(x) \leqslant 1$, et pour majorer $\frac{1}{1+x^n-e^{-n}}$ on MINORE $1 + x^n - e^{-n}$, or : $0 \leqslant x \leqslant 1 \iff 0 \leqslant x^n \leqslant 1 \iff 1 - e^{-n} \leqslant 1 + x^n - e^{-n} \leqslant 2 - e^{-n}$: on peut donc minorer par $1 - e^{-n}$; comme vous le voyez, nul besoin « d'idée » pour trouver la minoration ; comme c'est une quantité constante, on peut la sortir de l'intégrale !)

$$\leqslant \frac{1}{1 - e^{-n}} \int_0^1 x^n \mathrm{d}x + \int_0^1 x \left| \cos(x) - \frac{\cos\left(n \sin\left(\frac{x}{n}\right)\right)}{1 + x^n - e^{-n}} \right| \mathrm{d}x$$

(joie ! la première intégrale est facile à calculer, ce qui était d'ailleurs le but de la manœuvre ; de plus cela donnera une suite convergeant clairement par 0, ce qui nous arrange, donc ON N'Y TOUCHERA PLUS ! il reste à gérer la seconde intégrale, où je vais majorer x par 1 : ce n'est pas lui qui rend « petite » l'intégrale, puisqu'il ne dépend même pas de n et n'a donc pas d'impact sur la limite à calculer... ne nous risquons pas à enlever la valeur absolue : qui oserait prétendre que le signe est clairement lisible ?)

$$\leqslant \frac{1}{(n+1)(1 - e^{-n})} + \int_0^1 \left| \cos(x) - \frac{\cos\left(n \sin\left(\frac{x}{n}\right)\right)}{1 + x^n - e^{-n}} \right| \mathrm{d}x$$

(n'oublions pas ce qui avait motivé de regrouper $\cos(x)$ et $\frac{x\cos\left(n\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right)}{1+x^n-e^{-n}}$: ils sont proches vu que $\cos\left(n\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \cos(x)$, donc leur différence $\cos(x)-\cos\left(n\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right)$ est « petite », et je saurai la gérer grâce aux conseils de la section 5 (inégalité des accroissements finis) ; mais pour faire apparaître cette différence, il me faut tout mettre au même dénominateur : allons-y)

$$\leqslant \frac{1}{(n+1)(1-e^{-n})} + \int_0^1 \left|\frac{\cos(x)\left(1+x^n-e^{-n}\right)-\cos\left(n\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right)}{1+x^n-e^{-n}}\right| \mathrm{d}x$$

(la multiplicativité de la valeur absolue nous permet d'éliminer la valeur absolue au dénominateur, qui est positif ; au numérateur, regroupons les termes « proches » $\cos(x)$ et $\cos\left(n\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right)$ – c'était le but –)

$$\overset{(3)+(4)}{=} \frac{1}{(n+1)(1-e^{-n})} + \int_0^1 \frac{\left|\boxed{\cos(x)-\cos\left(n\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right)}+\cos(x)\left(x^n-e^{-n}\right)\right|}{1+x^n-e^{-n}} \mathrm{d}x$$

(je voudrais avoir $|\cos(x)-\cos\left(n\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right)|$ « seul » ; lorsqu'on a une somme de termes dans une valeur absolue, on peut la « casser » en plusieurs morceaux plus simples avec l'inégalité triangulaire ; je vais donc l'utiliser, tout en conservant $|\cos(x)-\cos\left(n\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right)|$... les termes x^n et e^{-n} ne gêneront pas et je les garderai, car ils convergent vers 0 et rendent donc l'intégrale « petite » ; attention au fait qu'avec l'inégalité triangulaire, il apparaît PLUS $|e^{-n}|$ et non MOINS $|e^{-n}|$)

$$\overset{(5)+(6)}{\leqslant} \frac{1}{(n+1)(1-e^{-n})} + \int_0^1 \frac{\left|\cos(x)-\cos\left(n\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right)\right|+|\cos(x)|\cdot\left(|x|^n+|e^{-n}|\right)}{1+x^n-e^{-n}} \mathrm{d}x$$

(le cosinus n'ayant pas d'impact sur la limite quand $n\to+\infty$, je le majore sans risque par 1 ; comme $x\geqslant 0$ et $e^{-n}\geqslant 0$, on a $|x|=x$ et $|e^{-n}|=e^{-n}$; ensuite, on utilise la linéarité de l'intégrale et, encore une fois, la MINORATION $1+x^n-e^{-n}\geqslant 1-e^{-n}$, dont on déduit une MAJORATION de $\frac{1}{1+x^n-e^{-n}}$, nous ramène à des intégrales qu'on sait calculer et qui convergent vers 0)

$$\overset{(4)}{\leqslant} \frac{1}{(n+1)(1-e^{-n})} + \frac{1}{1-e^{-n}}\int_0^1 \left|\cos(x)-\cos\left(n\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right)\right| \mathrm{d}x + \frac{1}{1-e^{-n}}\int_0^1 x^n \mathrm{d}x + \frac{e^{-n}}{1-e^{-n}}\int_0^1 \mathrm{d}x$$

(je vais calculer les deux dernières intégrales ; ensuite, la quantité $\left|\cos(x)-\cos\left(n\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right)\right|$ est une différence entre termes « proches », et il s'agit plus précisément de l'évaluation d'une même fonction, le cosinus, en deux réels « proches » : l'inégalité des accroissements finis est donc pertinente pour la majorer, et comme la dérivée du cosinus est majorée en valeur absolue par 1, cela donne le majorant $\left|x-n\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right|$)

$$\leqslant \frac{2}{(n+1)(1-e^{-n})} + \frac{1}{1-e^{-n}}\int_0^1 \boxed{\left|x-n\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right|} \mathrm{d}x + \frac{e^{-n}}{1-e^{-n}}$$

(rebelote : comme $n\sin\left(\frac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\times\frac{x}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$, nous sommes amenés à comparer deux termes « proches » ; mieux : en factorisant par n, on voit qu'il s'agit de majorer la différence de $\sin\left(\frac{x}{n}\right)$ avec le premier terme de son développement limité : $\frac{x}{n}$; dans la section 5, nous avons vu qu'une telle différence se majore avec le théorème de Taylor avec reste intégral, ici à l'ordre 1 puisqu'on compare avec son développement à l'ordre 1, et cela nous donne pour tout $x\in[0,1]$: $\sin\left(\frac{x}{n}\right)=\frac{x}{n}+\left(\frac{x}{n}\right)^2\int_0^1(1-t)\sin''\left(t\frac{x}{n}\right)\mathrm{d}t$; or $|\sin''|=|-\sin|\leqslant 1$, et on en déduit : $\left|\frac{x}{n}-\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right|\leqslant\frac{(x/n)^2}{2}$, ce qui nous ramène à une intégrale de fonction très facile à calculer)

$$= \frac{2}{(n+1)(1-e^{-n})} + \frac{1}{1-e^{-n}}\int_0^1 \frac{x^2}{2n}\mathrm{d}x + \frac{e^{-n}}{1-e^{-n}}.$$

Concluons. Nous avons démontré, après calcul de la dernière intégrale en jeu :

$$\forall n\in\mathbb{N}\backslash\{0\},\quad 0\leqslant\left|\int_0^1\left(\frac{x^n\sin(x)-x\cos\left(n\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right)}{1+x^n-e^{-n}}\right)\mathrm{d}x-\int_0^1(-x\cos(x))\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{1-e^{-n}}\left(\frac{2}{n+1}+\frac{1}{6n}+e^{-n}\right).$$

Le membre de droite converge vers 0, nous le montrons facilement. Ainsi, d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\int_0^1\left(\frac{x^n\sin(x)-x\cos\left(n\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right)}{1+x^n-e^{-n}}\right)\mathrm{d}x-\int_0^1(-x\cos(x))\mathrm{d}x\right|=0,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Voyez qu'il n'y a aucune magie derrière ces calculs : aussi compliqués soient-ils, tout est JUSTIFIÉ et MÉTHODIQUE.

La technicité du calcul ci-dessus vous démontre aussi le gigantesque apport du théorème de convergence dominée : il minimise le nombre de calculs ci-dessus. Le théorème de passage à la limite sous le signe intégrale, dans le cas d'un segment, n'est pas applicable ici parce qu'il n'y a pas convergence uniforme : il y a discontinuité de la limite simple en 1. L'élève en exercice le démontrera.

7 Plusieurs exercices récapitulatifs

À la différence des exemples des sections précédents, ici nous ne donnerons pas d'indice sur ce qu'il faut faire. Il s'agit de tester si vous avez compris à quelle occasion utiliser la formule de Taylor avec reste intégral ou non, l'inégalité triangulaire ou non, comment majorer un quotient, prendre garde au signe, etc.

Il y a des indications dans la dernière section du document.

Exercice 17. Montrer que la suite de fonctions $\left(f_n : \begin{cases} [0,\pi] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & n\left(\cos\left(\sqrt{\frac{x}{n}}\right)-1\right) \end{cases}\right)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur $[0,\pi]$ vers une fonction à déterminer, sans passer par une étude de variations.

Exercice 18. Trouver les valeurs extrémales de $\dfrac{1}{4+x+y+xy}$ pour $(x,y)\in[-1,1]^2$.

Exercice 19.

1. Trouver $a\in\mathbb{R}$ explicite tel que pour tout $x\geqslant a$, on ait : $x^3+2x^2+1\geqslant 27\cdot 10^6$.
2. Trouver $a\in\mathbb{R}$ explicite tel que pour tout $x\geqslant a$, on ait : $x^3-300x^2+1\geqslant 27\cdot 10^5$.
3. Trouver $a\in\mathbb{R}$ explicite tel que pour tout $x\geqslant a$, on ait : $x^3-10^{50}x^2-1\geqslant 27\cdot 10^5$.
4. Généraliser vos raisonnements ci-dessus pour montrer « à la main » la définition de la limite infinie, avec les trois applications polynomiales proposées : pour tout $M\in\mathbb{R}$, il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $x\geqslant a$, on ait : $\bigstar\geqslant M$.

Exercice 20.

1. Montrer que l'application $x\mapsto\dfrac{\lfloor x\rfloor}{x}$ est majorée sur $]0,+\infty[$.
2. Montrer que l'application $x\mapsto\dfrac{\lfloor x\rfloor}{x}$ est majorée sur $]-\infty,-1]$.
3. Est-ce que l'application $x\mapsto\dfrac{\lfloor x\rfloor}{x}$ est majorée sur $\mathbb{R}^*$?

Exercice 21. Majorer la fonction $f : x\mapsto\dfrac{x-\lfloor x\rfloor}{\sqrt{x}}$ sur $]0,+\infty[$, et en déduire : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Exercice 22. Montrer : $\forall x\in]0,1]$, $0\leqslant\dfrac{1}{x}-x\left\lfloor\dfrac{1}{x^2}\right\rfloor\leqslant x$.

Exercice 23. Montrer que pour tout $x>0$, on a : $\left|3x+4-\left(2x+3+\sqrt{x^2+2x+7}\right)\right|\leqslant\dfrac{3}{x}$.

Exercice 24. Montrer que pour tout $x\geqslant 0$, on a : $\sqrt{1+x}\leqslant 1+\dfrac{x}{2}$, sans passer par une étude de variations.

Exercice 25. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, calculer la partie entière de $\sqrt{n^2+n}$.

Exercice 26. Calculer : $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Exercice 27. On pose : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n=\displaystyle\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x$.

1. Montrer : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$, avec le théorème des gendarmes.
2. Expliquer pourquoi on peut raisonnablement conjecturer : $u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{2}}$, et démontrer cette conjecture en majorant convenablement $\left|u_n-\displaystyle\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{2}}\mathrm{d}x\right|$.

Exercice 28. Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{2x}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^4+1}}$, par un encadrement explicite et l'utilisation du théorème des gendarmes.

Exercice 29. Montrer : $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{\arctan(t^n)}{t^n}\mathrm{d}t=1$, sans le théorème de convergence dominée.

Exercice 30. Pour tout $x\in]0,+\infty[$, on pose : $f(x)=\int_x^{2x}\frac{e^{-t}-e^{-3t}}{t}\mathrm{d}t$.

1. Montrer : $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$, et : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.
2. Conjecturer un équivalent de $f(x)$ quand $x\to0$ grâce à un développement limité, et le démontrer.

Exercice 31. Pour tout $x\in]0,+\infty[$, on pose : $f(x)=\int_x^{2x}\frac{e^{-t}-e^{-3t}}{t^2}\mathrm{d}t$. Montrer : $\lim\limits_{x\to0}f(x)=2\ln(2)$, et : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

Exercice 32. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $b>a$. On pose : $\forall x\in]0,+\infty[,\ f(x)=\int_x^{3x}\frac{e^{bt}-e^{at}}{t^2}\mathrm{d}t$. Montrer : $\lim\limits_{x\to0}f(x)=(b-a)\ln(3)$, et : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

Exercice 33. Pour tout $x\in]0,+\infty[$, on pose : $f(x)=\int_x^{x^2}\frac{e^t}{e^t-1}\mathrm{d}t$.

1. Montrer : $\forall x\in]0,1]$, $e^x\int_x^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{e^t-1}\leqslant f(x)\leqslant e^{x^2}\int_x^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{e^t-1}$. *Cette inégalité est plus subtile qu'il n'y paraît : que peut-on dire de x^2 par rapport à x, quand $x\in]0,1]$?*
2. Majorer convenablement $\left|\int_x^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{e^t-1}-\int_x^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{t}\right|$, et en déduire : $\int_x^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{e^t-1}\underset{x\to0}{\sim}\ln(x)$, puis un équivalent quand $x\to0$ de $f(x)$.
3. Montrer qu'on a $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}x^2$, et en déduire : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

Exercice 34. On pose : $\forall x\in]0,1[,\ f(x)=\int_x^{x^2}\frac{e^{-t}}{\sin(t)(1-t)}\mathrm{d}t$.

1. Montrer : $\lim\limits_{x\to0}\left|\int_x^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{\sin(t)}-\int_x^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{t}\right|=0$, et en déduire : $\int_x^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{\sin(t)}\underset{x\to0}{\sim}\ln(x)$.
2. Montrer, après avoir majoré convenablement $\left|f(x)-\int_x^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{\sin(t)}\right|$, qu'on a : $f(x)\underset{x\to0}{\sim}\ln(x)$. En particulier : $\lim\limits_{x\to0}f(x)=-\infty$.
3. Montrer : $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=-\frac{e^{-1}\ln(2)}{\sin(1)}$.

8 Exercices de la section précédente : indications

Indication 17. Montrer la convergence simple avec un développement limité. Pour la convergence uniforme, c'est la formule de Taylor avec reste intégral qui va remplacer l'usage de ce développement limité (majoration d'une différence entre une fonction et la partie régulière de son développement limité).

Indication 18. Encadrer d'abord $4+x+y+xy$. Factoriser un peu permet d'affiner les encadrements.

Indication 19. Factoriser par le terme prépondérant. Regarder d'abord ce que vous parvenez à faire comme minorations en ne prenant pas de valeur de a explicite. L'ajuster ensuite pour obtenir le minorant demandé. Ne pas hésiter à faire des majorations grossières des termes négligeables, *quand c'est possible* : on a par exemple $2x^2+1\geqslant0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. Le minorant n'est pas choisi au hasard : $27\cdot10^6=(3\cdot10^2)^3$.

Indication 20. Par définition, on a : $\forall x\in\mathbb{R}$, $x-1<\lfloor x\rfloor\leqslant x$ (c'est l'unique entier à vérifier cet encadrement). Cela suffit à démontrer tout ce qui est demandé. Attention au fait que multiplier par une quantité négative renverse les inégalités. Que vaut $\lfloor x\rfloor$ pour $x\in]-1,0[$?

Indication 21. Par définition, on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x-1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$. Cela permet d'encadrer f facilement.

Indication 22. Par définition, on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x-1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$. Ne pas oublier le passage à l'inverse (pour $\frac{1}{x^2}$), et le signe moins devant la partie entière : ils renversent des inégalités.

Indication 23. À bien y regarder, après modification de l'expression à majorer, elle revient à majorer la différence entre une fonction et la partie régulière de son développement limité : voir les conseils de la section 5.

Indication 24. Utiliser la formule de Taylor avec reste intégral : on compare en effet une fonction et la partie régulière de son développement limité à l'ordre 1 en 0.

Indication 25. Il semble que $\sqrt{n^2+n}$ soit proche de $\sqrt{n^2}=n$, ce qui permet de conjecturer que la partie entière demandée est n. Le vérifier en donnant un encadrement (justifié) de $\sqrt{n^2+n}$ par $\sqrt{n^2}$ et $\sqrt{(n+1)^2}$. Noter que pour montrer rigoureusement que $\sqrt{n^2+n}$ et $\sqrt{n^2}$ sont proches, on peut *aussi* utiliser l'inégalité des accroissements finis avec $\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2}$, ou utiliser la méthode de multiplication par la quantité conjuguée.

Indication 26. Il faut se demander quel encadrement est le meilleur entre $|\sin(u)| \leqslant |u|$ et $|\sin(u)| \leqslant 1$. On en parle longuement dans la section 5. Ne pas oublier que $\frac{1}{x} \to \infty$ quand $x \to 0$.

Indication 27.

1. Identifier ce qui fait, dans l'intégrande, que l'intégrale tend vers 0. Le garder, et encadrer le reste par les valeurs aux extrémités de l'intervalle.
2. Noter que $x^n \approx 0$ sauf pour x près de 1. Ainsi remplacer $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ par sa valeur en 1 ne devrait pas changer la donne : seule la contribution de l'intégrande près de 1 importe vraiment dans la valeur de l'intégrale. D'où la conjecture. Pour la démontrer : regrouper les deux intégrales, et mettre au même dénominateur. Noter qu'il apparaît une différence de racines carrées : vous savez la gérer par des méthodes différentes (multiplication par le conjugué ou inégalité des accroissements finis). Vous en déduirez une majoration de $\left|u_n - \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{2}}\mathrm{d}x\right|$ par une quantité proportionnelle à $\dfrac{1}{n^2}$, donc négligeable devant $\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{2}}$.

Indication 28. Quand t parcourt $[x,2x]$, t^4 est entre x^4 et $(2x)^4$: deux quantités qui tendent vers $+\infty$, et bien plus vite que x (la longueur du segment d'intégration) ne tend vers $+\infty$. Ainsi, en vue de ce qu'on veut démontrer, il ne devrait pas changer grand'chose de remplacer t^4 par x^4 ou $(2x)^4$ dans un encadrement (dans quel sens ? nous vous laissons juger). L'avantage est que les intégrales ainsi obtenues sont aisément calculables, et leurs limites aussi.

Indication 29. On a envie d'écrire : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan(t^n)}{t^n}\mathrm{d}t \approx \int_0^1 \frac{t^n}{t^n}\mathrm{d}t \approx \int_0^1 \mathrm{d}t = 1$. On montre rigoureusement que l'écart entre $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan(t^n)}{t^n}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}t$ est faible en étudiant leur différence. Cela vous amènera à considérer $\arctan(u)-u$: il s'agit de la différence entre une fonction et la partie régulière de son développement limité (on est près de 0 en plus, vu que $t^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$). On la majore avec la formule de Taylor avec reste intégral.

Indication 30. Au voisinage de 0 : on a envie d'écrire : $f(x) \approx \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1-t-(1-3t)}{t}\mathrm{d}t \approx \int_x^{2x} 2\mathrm{d}t \approx 2x$, ce qui fournit à la fois la limite et un équivalent quand $x \to 0$. On démontre cette conjecture en étudiant la différence de $f(x)$ et de $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{(1-t)-(1-3t)}{t}\mathrm{d}t$. On est ainsi amené à considérer $e^u-(1+u)$ (différence entre une fonction et la partie régulière de son développement limité, près de 0). On la majore avec la formule de Taylor avec reste intégral.

Au voisinage de $+\infty$: il semble que l'exponentielle dicte la limite. La garder, et se contenter d'encadrer $\frac{1}{t}$ sur l'intervalle d'intégration $[x,2x]$. Intégrer ce qui reste.

Indication 31. Au voisinage de 0 : on a envie d'écrire : $f(x) \approx \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1-t-(1-3t)}{t^2}\mathrm{d}t \approx \int_x^{2x} \frac{2}{t}\mathrm{d}t = 2\left[\ln(t)\right]_x^{2x} = 2\ln(2)$, d'où la limite conjecturée. On démontre cette conjecture en étudiant la différence de $f(x)$ et de $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{(1-t)-(1-3t)}{t^2}\mathrm{d}t$. On est ainsi amené à considérer $e^u-(1+u)$ (différence entre une fonction et la partie régulière de son développement limité, près de 0). On la majore avec la formule de Taylor.

Au voisinage de $+\infty$: il semble que l'exponentielle dicte la limite. La garder, et se contenter d'encadrer $\frac{1}{t^2}$ sur l'intervalle d'intégration $[x,2x]$. Intégrer ce qui reste.

Indication 32. Même approche que dans les deux exercices précédents.

Indication 33. Même approche que dans les trois exercices précédents. Pour la conjecture, on note que $e^t - 1 \approx t$.

Indication 34. Même approche que les quatre exercices précédents. Vous aurez à majorer $|\sin(t) - t|$ avec la formule de Taylor avec reste intégral (différence entre une fonction et la partie régulière de son développement limité, près de 0). Au voisinage de 1, noter que c'est $\dfrac{1}{1-t}$ qui est prépondérant sur le reste (vu que cette quantité tend vers l'infini), il faut donc le garder ; encadrer $f(x) - \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{e^{-1}}{\sin(1)(1-t)}\mathrm{d}t$.

Table des matières