Exercices du chapitre VI (Topologie des espaces vectoriels normés)

✓ : exercice d'application des méthodes, ★ : exercice classique, ☢ : exercice difficile.

L'icône « (🗎) » indique que les documents *Méthodes* donnent des conseils plus généraux.

Topologie dans $\mathbb{R}$: compléments et approfondissements

Exercice 1. Si f est un endomorphisme du groupe additif $\mathbb{R}$, on connaît son expression sur $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$ à l'aide de son expression en 1. Passer de $\mathbb{Z}$ à $\mathbb{Q}$ par un usage adéquat de l'égalité $f(nx) = nf(x)$ valable pour tout x réel et tout n entier (pourquoi ?), et passer de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$ par densité.

Raisonnement analogue pour les morphismes de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}_+^*, \times)$. On peut aussi se ramener au cas précédent avec un isomorphisme adéquat.

Commentaires.

★ **Exercice 2. (Sous-groupes de $\mathbb{R}$)**

1. Noter que si a engendre G, alors ce doit être le plus petit réel strictement positif à appartenir à G. Cela incite à considérer $a = \inf(G \cap \mathbb{R}_+^*) \geqslant 0$ (pourquoi cette borne inférieure existe-t-elle ?).

   Si $a = 0$, alors cela signifie que 0 peut être approché d'aussi près que souhaité par des éléments de $G \cap \mathbb{R}_+^*$ (formellement, $G \cap V \neq \emptyset$ pour tout voisinage de 0 dans $\mathbb{R}_+^*$). En déduire, par translation, que *tout* intervalle $]x, y[$ de $\mathbb{R}$ est d'intersection non triviale avec G (on se ramène à un intervalle d'extrémité 0 et de même longueur, qui doit contenir un élément de G par ce qui précède : l'un de ses multiples appartient à $]x, y[$).

   Si $a > 0$, montrer d'abord que a appartient à G, en notant que si c'était le cas, la propriété de borne inférieure permettrait malgré tout d'approcher a d'arbitrairement près par des éléments de G : considérer la différence de deux d'entre eux pour contredire la minimalité de a. Montrer ensuite que a engendre G. Si $g \in G$, alors à quel multiple *explicite* de a cet élément est-il susceptible d'être égal ? Montrer que ce multiple convient effectivement en regardant l'encadrement qu'il doit vérifier, et en utilisant la propriété de minimalité de a.
2. Montrer que $\mathbb{Q}$ n'est pas monogène par l'absurde, ou montrer : $\inf(\mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+^*) = 0$, en produisant une suite de rationnels convergeant vers 0.

Commentaires.

Exercice 3.

1. Vérifications faciles.
2. Utiliser la question précédente : l'alternative de l'exercice 2 sur la nature topologique et algébrique de $\mathrm{Per}(f)$ implique l'alternative proposée dans cette question.

Commentaires.

Exercice 4.

1. Plutôt montrer l'équivalence entre les négations des deux prédicats. La structure des sous-groupes de $\mathbb{Z}$ peut aider à montrer que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est monogène si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Réciproquement, regarder ce qu'enseignerait l'égalité $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$ sur a et b.
2. Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Montrer que $a\mathbb{N} - b\mathbb{N}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si : $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$. **(Indications à venir)**
3. Utiliser la question précédente avec des a et b convenables, puis remarquer que l'image d'une partie dense par une application continue donne une partie dense de son image.

Commentaires.

Exercice 5. Utiliser l'inégalité de l'énoncé pour en déduire, par dichotomie, que l'inégalité $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y)$ est vraie pour tout λ de la forme $\frac{a}{2^n}$ avec n entier et $a \in [\![0, 2^n]\!]$. Remarquer que ces éléments forment un sous-groupe dense de $(\mathbb{R}, +)$ (utiliser l'exercice 2), et conclure.

Commentaires.

☢ **Exercice 6.** D'abord remarquer qu'un théorème de 1re année assure l'existence d'au moins une valeur d'adhérence. S'il y en a exactement une, il n'y a rien à raconter. S'il y en a au moins deux : montrer que pour toutes valeurs d'adhérence α et β, tous les éléments de l'intervalle $]\alpha, \beta[$ sont des valeurs d'adhérence. Pour cela : noter qu'il existe des éléments $u_{\varphi(n)}$ arbitrairement proches de α et des éléments $u_{\psi(n)}$ arbitrairement proches de β, avec $\psi(n) > \varphi(n)$. Utiliser l'hypothèse de l'énoncé pour montrer que pour « passer » de $u_{\varphi(n)}$ à $u_{\psi(n)}$, la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ fait des sauts de valeur suffisamment petits, de sorte à nécessairement approcher n'importe quel $\ell \in]\alpha,\beta[$ d'aussi près que voulu (quantifier tout ce qui précède proprement).

Commentaires.

Exercice 7. (Ouverts de $\mathbb{R}$) Si U est un ouvert de $\mathbb{R}$, l'écrire comme réunion de ses composantes connexes par arcs. Montrer que chacune de ces composantes est un ouvert : noter que pour tout x dans une composante connexe par arcs C, il existe $\mathrm{B}(x,r)$ inclus dans U ; utiliser la connexité par arcs des boules pour conclure que C contient $\mathrm{B}(x,r)$.

Conclure en utilisant votre connaissance des composantes connexes par arcs de $\mathbb{R}$. La dénombrabilité de l'indexation de cette réunion découle de celle de $\mathbb{Q}$: se demander pourquoi.

Commentaires.

Exercice 8. Imiter la résolution de l'exercice 2 (à ceci près qu'au lieu de s'intéresser à la borne inférieure de $G\cap\mathbb{R}_+^*$, on regarde la borne inférieure des *représentants des arguments dans* $]0,2\pi[$ des éléments de G : pourquoi ?), ou utiliser un morphisme convenable pour ramener une étude dans $\mathbb{U}$ à une étude dans $\mathbb{R}$: que connaissez-vous comme morphisme surjectif de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U}$?

Commentaires.

Étude de normes

✓ **Exercice 9. (Norme sur $\mathbb{R}[X]$)**

1. Montrer que N est à valeurs dans $\mathbb{R}$ en justifiant la finitude de la somme. Chose aisée avec la règle de D'Alembert par exemple. La plupart des propriétés sont évidentes. Pour la propriété de séparation, un argument sur les racines est attendu.
2. Seule la propriété de séparation n'est pas évidente. Si $\mathrm{N}(P) = 0$, montrer que P est nul en raisonnant par l'absurde et en considérant $P^{(k)}(k)$ pour k égal au degré de P.

Commentaires.

Exercice 10.

1. Seule la propriété de séparation nécessite une discussion : noter que I doit contenir plus d'éléments que de racines de P, pour montrer : $\mathrm{N}(P) = 0 \Rightarrow P = 0$. Comment être certain que cette condition soit remplie ?
2. Noter que $P \mapsto P(0)$ est continue pour $\mathrm{N}_{[0,1]}$ (ou encore : que la convergence uniforme implique la convergence simple). Pour $\mathrm{N}_{[0,2]}$: l'exercice 21 permet éventuellement de comprendre comment construire une suite $(P_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $P_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, mais dont la limite P (pour la norme $\mathrm{N}_{[1,2]}$) vérifie pourtant $P(0) \neq 0$.

Commentaires.

✓ **Exercice 11. (Norme sur $\mathrm{C}^1([0,1],\mathbb{R})$)**

1. Seule la propriété de séparation nécessite une discussion : montrer que $\mathrm{N}(f) = 0$ implique que f est constante et vérifie $f(0) = 0$.
2. Il suffit de trouver une suite qui soit bornée pour une norme et pas pour l'autre (ou qui converge vers 0 pour une norme et pas pour l'autre). Des exemples naïfs de fonctions font l'affaire.

Commentaires.

✓ **Exercice 12.** Les deux inégalités peuvent être contredites. Trouver une suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ intégrables et de carré intégrable sur $[1,+\infty[$ telles que $\frac{\|f_n\|_1}{\|f_n\|_2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (chercher parmi les fonctions usuellement intégrables : fonctions de Riemann, exponentielles), et en déduire par parité des fonctions qui vérifient la même chose sur $[-\infty,-1]$. Les compléter plus ou moins arbitrairement sur $[-1,1]$ pour en faire des fonctions de E. Cela démontre qu'on ne peut minorer $\frac{\|\cdot\|_1}{\|\cdot\|_2}$ par une constante strictement positive. Pour contredire l'autre inégalité : noter que si vous ne choisissez que des fonctions f_n telles que $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $|f_n|^2 \leqslant |f_n|$ au voisinage de l'infini, ce qui complique la construction d'une fonction f_n telle que $\|f_n\|_2$ soit « grand » tandis que f_n soit « petit ». Privilégier des fonctions f_n intégrables et de carré intégrable mais qui peuvent devenir arbitrairement grandes : on a construit un tel exemple dans le cours.

Commentaires.

✓ **Exercice 13.** Seule la propriété de séparation nécessite une justification : si $\mathrm{N}(f') = 0$, montrer que f est constante et utiliser la définition de E pour conclure que f est nulle. Pour étudier si $\|\cdot\|_\infty$ et N sont équivalentes : une théorème de 1$^{\text{re}}$ année vous permet de contrôler la taille de f en fonction de la taille de f', ce qui permet d'avoir une inégalité entre $\|\cdot\|_\infty$ et N. En revanche, vous savez aussi qu'il y a des fonctions prenant de petites valeurs mais ayant des variations très abruptes (considérer des oscillations à haute fréquente). S'en servir pour montrer que les deux normes ne sont pas équivalentes.

Commentaires.

★ **Exercice 14. (Inégalité de Hölder et $\|\cdot\|_p$)**

1. Montrer que la « boule unité » de $\|\cdot\|_p$ n'est pas convexe, en considérant le milieu de deux éléments bien choisis. Si la convexité n'a pas encore été vue : contredire l'inégalité triangulaire *via* deux choix très simples de vecteurs (cela revient au même que le premier argument).
2. Pour démontrer l'inégalité de l'indication : remarquer qu'il s'agit d'une inégalité de convexité (le fait que $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$ doit mettre la puce à l'oreille). Évaluer cette inégalité en des bons choix de a et b et sommer pour en déduire une majoration de $\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$. Le choix le plus naïf ne vous donnera pas l'inégalité de Hölder : l'affiner de sorte que votre majoration fasse apparaître $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, qui se simplifie (c'est le fait que l'inégalité à démontrer ne fasse pas apparaître $\frac{1}{p}$ ni $\frac{1}{q}$ qui incite à penser qu'ils doivent se simplifier).
3. Seule l'inégalité triangulaire n'est pas triviale. Majorer $(\|\vec{x} + \vec{y}\|_p)^p$ en faisant apparaître $|x_k + y_k|^p |x_k|$ et $|x_k + y_k|^p |y_k|$, que l'on majore grâce à l'inégalité de Hölder. En déduire une majoration de $(\|\vec{x} + \vec{y}\|_p)^p$ en fonction de $(\|\vec{x} + \vec{y}\|_p)^{p-1}$, $\|\vec{x}\|_p$ et $\|\vec{y}\|_p$, et conclure.

Commentaires.

✓ **Exercice 15.** On a montré l'équivalence des normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ dans le cours. S'en inspirer pour obtenir un encadrement de $\|\cdot\|_p$ en fonction de $\|\cdot\|_\infty$. Utiliser le théorème des gendarmes.

Commentaires.

Exercice 16. (Inégalité de Hölder et $\|\cdot\|_p$ pour les fonctions) Mêmes raisonnements que dans l'exercice 14.

Commentaires.

☢ **Exercice 17. (Jauge)** Supposons E de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Soit K une partie de E compacte, convexe, symétrique par rapport $\vec{0}$ et dont $\vec{0}$ est un point intérieur. Montrer qu'il existe une norme N sur E dont la boule unité fermée est K. **(Indications à venir)**

Commentaires.

Exercice 18. (Équivalence des normes et dimension infinie)

1. Fixer une norme N. Montrer que si f est une forme linéaire, alors $\vec{x} \mapsto |f(\vec{x})|$ est une pseudo-norme. Lui ajouter quelque chose que cela devienne une norme. Utiliser l'équivalence des normes pour en déduire une majoration de $|f(\vec{x})|$ par $\mathrm{N}(\vec{x})$ (à une constante multiplicative près).
2. ☢ Introduire une base (nécessairement infinie) $(\vec{e}_i)_{i \in I}$ de E, une partie dénombrable J de I, et définir convenablement une forme linéaire sur J et $I \setminus J$ de sorte que l'inégalité $|f(\vec{x})| \leqslant K\|\vec{x}\|$ soit impossible pour tout $\vec{x} \in E$.

Commentaires.

Études topologiques abstraites

✓ **Exercice 19.** Il suffit de montrer que si $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont limites de suites à valeurs dans F, alors $\lambda\vec{x} + \vec{y}$ l'est aussi pour tout $\lambda \in K$.

Commentaires.

✓ **Exercice 20.**

1. Montrer que $A+\{b\}$ est un ouvert en reconnaissant l'image réciproque d'un ouvert par une application continue. Conclure en écrivant $A+B$ comme une réunion d'ouverts.
2. Montrer que $A+B$ est stable par passage à la limite. Pour cela, si $\left(\vec{a}_n+\vec{b}_n\right)_{n\geqslant 0}$ est une suite à valeurs dans $A+B$ et convergente, montrer qu'il existe une extractrice telle que $\left(\vec{a}_{\varphi(n)}\right)_{n\geqslant 0}$ et $\left(\vec{b}_{\varphi(n)}\right)_{n\geqslant 0}$ convergent dans A et B respectivement, grâce aux hypothèses de l'énoncé. Conclure par unicité de la limite.

Commentaires.

★ **Exercice 21. (Adhérence d'un hyperplan)** Noter d'abord que par le raisonnement de l'exercice 19, l'adhérence de $\ker(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de E. Utiliser le fait que $\ker(\varphi)$ soit le noyau d'une forme linéaire pour en déduire qu'on a $\overline{\ker(\varphi)}=\ker(\varphi)$ ou $\overline{\ker(\varphi)}=E$ sans hypothèse sur φ.

1. Sens direct immédiat par le cours. Sens réciproque : par contraposée. Si ce n'est pas continu, on veut montrer l'existence de $\vec{y}\notin\ker(\varphi)$ qui soit limite d'une suite à valeurs dans $\ker(\varphi)$. Or on sait aisément construire des éléments de $\ker(\varphi)$, pour φ forme linéaire, à partir d'un élément fixé $\vec{y}$ qui n'est pas dans ledit noyau. Comment ? (Voir le cours de 1re année si besoin.) Une fois que vous avez construit un tel élément (qui doit dépendre d'un certain vecteur que vous devez introduire), se demander comment cela permet de construire une suite convergeant vers $\vec{y}$. Ne pas oublier que si φ n'est pas continue, alors il existe $(\vec{x}_n)_{n\geqslant 0}$ à valeurs dans $\mathrm{B}_f(\vec{0},1)$ telle que $|\varphi(\vec{x}_n)|\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$.
2. Immédiat par ce qui précède.

Commentaires.

Exercice 22. (Norme triple d'une forme linéaire continue) Noter que sous les hypothèses de l'exercice, la distance $\mathrm{d}(\vec{a},H)$ doit être atteinte et strictement positive (pourquoi ? voir l'exercice 21 si besoin). Si $\vec{h}\in H$ vérifie : $\mathrm{d}(\vec{a},H)=\|\vec{h}-\vec{a}\|$, utiliser le fait que $\varphi(\vec{a})=\varphi(\vec{a}-\vec{h})$ pour obtenir une première inégalité entre $|||\varphi|||$, $\varphi(a)$ et $\mathrm{d}(\vec{a},H)$. La seconde inégalité découle de la décomposition explicite de toute vecteur dans la somme directe $\ker(\varphi)\oplus\mathrm{Vect}(\vec{a})=E$.

Commentaires.

✓ **Exercice 23.** Si $((\vec{x}_n,f(\vec{x}_n)))_{n\geqslant 0}$ converge vers $(\vec{x},\vec{y})$, utiliser la convergence composante par composante et la continuité de f pour montrer que $\vec{y}=f(\vec{x})$. Conclure.

Commentaires.

✓ **Exercice 24.** Si $\vec{y}\in f(F)$, introduire un antécédent par f de $\vec{y}$ et approcher cet antécédent par densité.

Commentaires.

Exercice 25. Unicité : Si g et h sont deux fonctions qui conviennent, montrer qu'elles sont égales sur tout élément de A, et en déduire par densité qu'elles sont égales partout. Existence : pour définir $g(\vec{x})$ avec $\vec{x}\notin A$, approcher $\vec{x}$ par une suite $(\vec{x}_n)_{n\geqslant 0}\in A^{\mathbb{N}}$ et poser : $g(\vec{x})=\lim\limits_{n\to+\infty}f(\vec{x}_n)$. On justifie que cette limite existe en montrant que $(f(\vec{x}_n))_{n\geqslant 0}$ est de Cauchy : pour cela, démontrer que $|x_m-x_n|\leqslant\eta$ pour n et m assez grand, et utiliser l'uniforme continuité.

Pour que g soit bien définie et que les autres vérifications (uniforme continuité et $g_{|A}=f$) soient facilitées, il vaut mieux montrer que la limite de $(f(\vec{x}_n))_{n\geqslant 0}$ ne dépend pas du choix de la suite $(\vec{x}_n)_{n\geqslant 0}$ qui converge vers $\vec{x}$. Là encore : si $(\vec{y}_n)_{n\geqslant 0}\in A^{\mathbb{N}}$ est une autre suite convergeant vers $\vec{x}$, vérifier que $|x_n-y_n|\leqslant\eta$ pour n assez grand et conclure grâce à l'uniforme continuité.

Pour $g_{|A}=f$: prendre une suite constante à valeurs dans A. Pour l'uniforme continuité de g : majorer $|g(x)-g(y)|$ en approchant x et y par des suites $(x_n)_{n\geqslant 0}$ et $(y_n)_{n\geqslant 0}$ à valeurs dans A, afin de se ramener (*via* l'inégalité triangulaire) à des évaluations de f en des éléments de A. Utiliser l'uniforme continuité de f d'une part, et le fait que $g(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}g(x_n)$ (idem pour $g(y)$) d'autre part.

Commentaires.

Exercice 26. Soit $\vec{x} \in E$. On doit montrer : $\forall r > 0$, $\mathrm{B}(\vec{x}, r) \cap (U \cap V) \neq \emptyset$. Utiliser la densité de U pour montrer que $\mathrm{B}(\vec{x}, r) \cap U$ est toujours non vide ; comme c'est une intersection d'ouverts : montrer qu'on peut y inclure une boule, et que cette boule doit rencontrer V. Conclure.

Commentaires.

★ **Exercice 27.** Le chemin « naturel » à tester entre deux éléments $\vec{x}$ et $\vec{y}$ est toujours $t \mapsto t\vec{x} + (1-t)\vec{y}$. Ici, le raccommoder pour qu'il soit bien à valeurs dans la sphère unité (comment rendre un vecteur unitaire ?). La solution que vous avez trouvée pour cela risque cependant de poser problème si $\vec{x} = -\vec{y}$. Introduire dans ce cas un vecteur $\vec{z}$ qui n'est pas colinéaire à $\vec{x}$ et $\vec{y}$. Relier $\vec{x}$ et $\vec{z}$ *via* l'idée ci-dessus ainsi que $\vec{z}$ et $\vec{y}$. Conclure.

Commentaires.

Exercice 28.

1. Si φ est une forme linéaire de noyau H : considérer $\varphi(E \setminus H)$.
2. Il est conseillé de faire un dessin en dimension 3 pour comprendre ce qu'il se passe. Compléter une base de F en une base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ de E. En raisonnant sur la décomposition d'un vecteur dans cette base, montrer que tout vecteur de E peut être lié soit à $\vec{e}_n$, soit à $-\vec{e}_n$. Montrer ensuite qu'on peut relier $\vec{e}_n$ et $-\vec{e}_n$ dans $E \setminus F$ continûment (c'est ici que l'hypothèse $\dim(F) \leqslant n-2$ intervient). Conclure par transitivité.

Commentaires.

Exercice 29. (Stabilité par adhérence et intérieur ?)

1. Pour l'intérieur : si $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont intérieurs à A, introduire des boules ouvertes centrées en $\vec{x}$ et $\vec{y}$ et incluses dans A (de même rayon r pour se simplifier la tâche : pourquoi est-ce possible ?). Montrer alors que pour tout $t \in [0,1]$ et tout $\vec{z} \in \mathrm{B}(t\vec{x} + (1-t)\vec{y}, r)$, on a : $\vec{z} \in A$ (vous aurez besoin d'écrire $\vec{z} - (t\vec{x} + (1-t)\vec{y})$ sous la forme $t\spadesuit + (1-t)\clubsuit$ avec $\spadesuit$ et $\clubsuit$ dans les boules ouvertes introduites précédemment). À mon avis, l'appui d'un dessin permet de voir assez clairement ce que doivent être $\spadesuit$ et $\clubsuit$, et doit inciter à introduire un vecteur $\vec{h}$ convenable (dépendant de $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ et t).

   Pour l'adhérence : écrire deux points $\vec{x}$ et $\vec{y}$ de l'adhérence de A comme limites de suites à valeurs dans A. Utiliser la convexité de A pour en déduire l'existence d'une suite de $A^{\mathbb{N}}$ convergeant vers $t\vec{x} + (1-t)\vec{y}$.
2. On obtient aisément un contre-exemple à la connexité par arcs de $\mathring{A}$ avec des intervalles de $\mathbb{R}$ bien choisis. Pour l'adhérence : raisonner comme dans la question précédente.

Commentaires.

☢ **Exercice 30. (Théorème de Riesz)** Construire une suite à valeurs dans $\mathrm{B}_f(\vec{0},1)$ qui n'admet pas de valeur d'adhérence. Pour cela : choisir un vecteur unitaire arbitraire $\vec{n}$ et construire $\vec{u}_1$ *unitaire* tel que : $\|\vec{u}_1 - \vec{n}\| \geqslant \frac{1}{2}$ (montrer que la distance de tout vecteur $\vec{x} \in E \setminus \mathrm{Vect}(\vec{n})$ à $\mathrm{Vect}(\vec{n})$ est atteinte en un vecteur $\lambda\vec{n}$, et fabriquer $\vec{u}_1$ à l'aide de $\vec{x}$ et $\lambda\vec{n}$: il est chaudement recommandé de faire un dessin). Recommencer le procédé en produisant un vecteur $\vec{u}_2$ tel que la distance de $\vec{u}_2$ au plan engendré par $\vec{n}$ et $\vec{u}_1$ soit supérieure à $\frac{1}{2}$; recommencer le procédé indéfiniment, et montrer que la suite $(\vec{u}_n)_{n\geqslant 0}$ est à valeurs dans la boule unité fermée et qu'elle ne peut pas avoir de valeur d'adhérence (que peut-on dire de $\|\vec{u}_n - \vec{u}_m\|$ pour tous m et n distincts, par construction ? conclure).

Autre piste (qui est, au fond, une reformulation) utilisant l'exercice 61 : montrer que $\mathrm{B}_f(\vec{0},1)$ ne peut pas être incluse dans une réunion finie de boules ouvertes de rayon 1 (ce qui démontre que ce n'est pas compact par la propriété de Borel-Lebesgue). Pour cela : raisonner par l'absurde. Si $\mathrm{B}_f(\vec{0},1)$ est recouvert par des boules ouvertes $\mathrm{B}(\vec{x}_i,1)$ avec $i \in [\![1, n]\!]$: considérer le sous-espace vectoriel F de E engendré par les $\vec{x}_i$ et montrer que si $\vec{x} \in E \setminus F$, alors la distance de $\vec{x}$ à F est atteinte en un vecteur $\vec{y} \in F$ (la dimension de F joue un rôle essentiel ici). Utiliser $\vec{x}$ et $\vec{y}$ pour produire un vecteur $\vec{x}_0$ à distance 1 de F (ce n'est pas difficile : faire un dessin éventuellement pour conjecturer un vecteur qui convient), et aboutir à une contradiction en montrant que $\vec{x}_0$ appartient à l'une des boules $\mathrm{B}(\vec{x}_i,1)$.

Commentaires.

Exercice 31. Rappel : un tel morphisme de corps doit fixer $\mathbb{Q}$. Ensuite, une piste possible : noter que l'adhérence de K est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et utiliser la continuité de f en 0 pour montrer qu'elle est uniformément continue (voire lipschitzienne). En déduire, en raisonnant comme dans l'exercice 25, que f se prolonge soit en un morphisme de corps de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$

fixant $\mathbb{Q}$, soit en un morphisme de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ fixant $\mathbb{Q}$ (utiliser alors la continuité pour en déduire que f fixe $\mathbb{R}$ dans les deux cas). On est alors ramené à un exercice classique : voir le chapitre III, exercice 53.

Commentaires.

Exercice 32. (Ensembles discrets)

1. Construire une injection de X dans un ensemble de boules ouvertes, et utiliser le fait que chaque boule ouverte contienne un rationnel. Conclure avec la dénombrabilité de $\mathbb{Q}$.
2. Le théorème de Borel-Lebesgue expédierait l'affaire en une poignée de secondes (exercice 61). Sans ce gros théorème, une piste possible : raisonner par l'absurde. S'il y a une infinité de points, cela permet de définir une suite $(\vec{x}_n)_{n\geqslant 0}$ dont tous les termes sont distincts. Or la compacité entraîne la convergence d'une suite extraite, et cette suite extraite doit stationner suivant un argument classique (comment montre-t-on qu'une suite convergente à valeurs dans $\mathbb{Z}$ ou un ensemble fini stationne ?), ce qui contredit l'injectivité de $(\vec{x}_n)_{n\geqslant 0}$.

Commentaires.

Exercice 33.

1. Si $\vec{y} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{im}(f - \mathrm{Id}_E)$, montrer que $f^n(\vec{y}) = \vec{y}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et combiner cette information avec l'existence de $\vec{x}$ tel que $\vec{y} = f(\vec{x}) - \vec{x}$. En déduire que $\vec{y}$ est de la forme $\frac{1}{n}$ fois un vecteur dont la norme est bornée grâce à l'hypothèse sur f. Conclure que la somme est directe, puis que les sous-espaces sont supplémentaires grâce à la somme des dimensions.
2. En s'inspirant du raisonnement de l'exercice 48 : il suffit d'étudier $(f_n(\vec{x}))_{n\geqslant 0}$ pour tout $\vec{x} \in E$. La question précédente permet même de se borner à l'étude de $\vec{x} \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\vec{x} \in \mathrm{im}(f - \mathrm{Id}_E)$. Dans le premier cas, montrer que $(f_n(\vec{x}))_{n\geqslant 0}$ est une suite constante. Dans le second cas : faire apparaître une somme télescopique et raisonner comme dans la première question pour en déduire que $(f_n(\vec{x}))_{n\geqslant 0}$ converge vers $\vec{0}$. En déduire la limite de $(f_n(\vec{x}))_{n\geqslant 0}$ pour tout $\vec{x} \in E$, et reconnaître un projecteur.

Commentaires.

★ **Exercice 34. (Applications propres)**

1. Si A est un fermé de E, montrer que $f(A)$ est stable par passage à la limite. Pour cela, si $(\vec{y}_n)_{n\geqslant 0} = (f(\vec{x}_n))_{n\geqslant 0}$ est à valeurs dans $f(A)$ et converge vers $\vec{y} \in F$, utiliser l'exercice 62 et l'hypothèse de l'énoncé pour montrer qu'il existe une sous-suite $\left(\vec{x}_{\varphi(n)}\right)_{n\geqslant 0}$ convergente. Utiliser la fermeture de A et la continuité de f pour conclure.
2. Appliquer la question précédente à l'application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_n[X]$ définie par $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$. Pour montrer que l'image réciproque par f de tout compact K est compacte, montrer que $f^{-1}(K)$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^n$. Seul l'aspect borné est à vérifier (pourquoi ?). Pour cela, utiliser une borne sur les éléments de K pour en déduire une borne sur les éléments de $f^{-1}(K)$ (introduire une norme sur $\mathbb{R}_n[X]$ qui vous arrange), *via* un raisonnement déjà apparu en plusieurs lieux : exercice 40 du chapitre V ou exercice 60 de ce chapitre.

Commentaires.

★ **Exercice 35. (Théorème du point fixe de Banach-Picard)** Introduire une suite vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$, et montrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de Cauchy en majorant $\|u_{n+p} - u_n\|$ en fonction de $\|u_1 - u_0\|$ et k^n grâce à l'hypothèse sur f (il est aussi possible d'utiliser le lien suite-série : dans ce cas, où intervient l'hypothèse de complétude ?).

Commentaires.

Exercice 36. (Autre théorème du point fixe) L'unicité est facile (supposer qu'il existe deux points fixes distincts et utiliser l'hypothèse). L'existence : montrer que $\vec{x} \mapsto \|f(\vec{x}) - \vec{x}\|$ atteint un minimum global en un vecteur $\vec{x}_0$ de K, et qu'il doit être un point fixe de f (par l'absurde : si ce n'est pas le cas, appliquer l'hypothèse de l'énoncé en deux vecteurs convenables permet de contredire la minimalité de $\|f(\vec{x}_0) - \vec{x}_0\|$).

Commentaires.

Études topologiques dans les espaces de fonctions et de suites

Exercice 37. S'inspirer de la démonstration vue dans le chapitre préliminaire que toute suite de fonctions vérifiant le critère de Cauchy uniforme converge uniformément. On ne fait que remplacer la variable réelle par une variable discrète ici.

Commentaires.

✓ **Exercice 38.** Pour la norme infinie : montrer que $B = \{f \in E \mid \forall x \in [0,1], f(x) > 0\}$ est un ouvert inclus dans A (pour construire, pour tout $f \in B$, un rayon r tel que $\mathrm{B}(f,r) \subseteq B$, il vaut mieux s'aider d'une interprétation graphique : r dépend du minimum de f sur $[0,1]$, dont on justifiera qu'il est atteint), et conclure que $B \subseteq \mathring{A}$. Pour l'inclusion réciproque : noter que s'il existe $f \in \mathring{A} \setminus B$, alors f doit s'annuler sur $[0,1]$. Montrer alors que toute fonction de la forme $f - \varepsilon$ n'appartient pas à A et obtenir une contradiction.

Pour la norme 1 : construire une fonction g_ε qui n'appartienne pas à A et telle que : $\|g_\varepsilon\| \leqslant \varepsilon$. En déduire, par translation et dilatation, l'existence pour tout $f \in A$ d'une fonction $f + \lambda g_\varepsilon$ n'appartenant pas à A et telle que : $\|f + \lambda g_\varepsilon\| \leqslant \varepsilon$, et ce pour tout $\varepsilon > 0$. Qu'est-ce que cela enseigne sur l'intérieur de A ?

Commentaires.

Exercice 39. Comparer $\mathrm{N}(f_n')$ et $\mathrm{N}(f_n)$ pour des choix de f_n dont vous savez que la dérivée fait apparaître un terme tendant vers l'infini quand $n \to +\infty$.

Commentaires.

Exercice 40. Majorer brutalement $|\Phi(f)|$, avec l'inégalité triangulaire, en fonction de $\int_0^1 |f|$ et $\int_{-1}^0 |f|$. En déduire une majoration de $|||\Phi|||$ par 2. Pour avoir le cas d'égalité : idéalement, les majorations précédentes seraient des égalités si l'on prenait f égale à 1 sur $[0,1]$ et à -1 sur $[-1,0]$ (par exemple). Cependant une telle fonction n'est pas continue sur $[-1,1]$: y remédier en remplaçant par des fonctions f_n qui sont *presque* égales à cette fonction f candidate mais qui sont continues, et telles que $|\Phi(f_n)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$. En déduire une minoration de $|||\Phi|||$ et conclure.

Commentaires.

Exercice 41. (Inégalité de Hardy)

1. Seule la continuité de g en 0 mérite une discussion : reconnaître en $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ la limite d'un taux d'accroissement. Calculer la dérivée de $x \mapsto \int_0^x g^2 + x(g(x))^2$ pour obtenir aisément le résultat voulu après intégration.
2. Majorer trivialement $-x(g(x))^2$ et songer à une inégalité qui permet de relier $\int_0^x fg$ et $\int_0^x g^2$. La présence des racines carrées doit être un indice supplémentaire. Prendre la limite quand $x \to +\infty$ pour en déduire la comparaison entre normes voulue (pourquoi $\|g\|_2$ existe bien ?).
3. La continuité découle de la question précédente. Pour obtenir $|||g|||$: essayer d'obtenir le cas d'égalité dans les majorations de la question précédente. Se souvenir que le cas d'égalité dans l'inégalité utilisée dans la question précédente est connu. Chercher une fonction (usuelle !) permettant ce cas d'égalité, et constater néanmoins qu'elle n'est pas intégrable au voisinage de l'origine. Pas grave : modifier son expression sur un petit intervalle centré en 0 de sorte à assurer son intégrabilité sur $\mathbb{R}$. Passer ensuite à la limite convenablement pour avoir une minoration de la norme triple cherchée par 2.

Études topologiques dans K^n, $K[X]$ et $\mathrm{M}_n(K)$

✓ **Exercice 42.** Raisonner par l'absurde. S'il existe une telle bijection $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, alors $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{x\} \to \mathbb{R} \setminus \{f(x)\}$ reste une bijection continue. Quelle propriété topologique, préservée par l'image directe des fonctions continues, serait ainsi contredite, car vérifiée par $\mathbb{R}^2 \setminus \{x\}$ et non par $\mathbb{R} \setminus \{f(x)\}$?

Commentaires.

Exercice 43.

1. Utiliser le déterminant.
2. ☢ On ne suppose plus E de dimension finie. Montrer que $\{(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \in E^n \mid (\vec{x}_1, \vec{x}_2) \text{ libre}\}$ est un ouvert de E^2. **(Indications à venir)**

Commentaires.

✓ **Exercice 44.** Écrire $\mathrm{SL}_n(K)$ sous la forme $\det^{-1}(\bigstar)$ pour en déduire qu'il est fermé ou ouvert (je vous laisse en juger), ce qui rend triviale une partie de la question. Ensuite : si $M \in \mathrm{SL}_n(K)$, noter qu'en modifiant très légèrement un coefficient de M (ou en ajoutant à M une matrice simple convenable), son déterminant ne vaut plus 1. Qu'est-ce que cela permet de conclure ?

Commentaires.

✓ **Exercice 45.** Il suffit de majorer $|\mathrm{tr}(M)|$ par $\bigstar \cdot \|M\|$ pour toute matrice carrée M (où $\|\cdot\|$ est l'une des trois normes usuelles), ce que des majorations très naïves permettent. Cela permet de majorer la norme triple. Noter qu'à chaque fois, certains choix particuliers de matrices ne donnent pas des majorations dans notre raisonnement, mais des égalités. Réaliser le cas d'égalité permet de minorer la norme triple et de conclure.

Commentaires.

✓ **Exercice 46.** Introduire $X \in \mathrm{M}_{n,1}(K)$ de coefficients $x_1, \ldots, x_n$ et calculer les coefficients de AX. Se demander comment majorer $\|AX\|_1$ et $\|AX\|_\infty$ en fonction de $\|X\|_1$ et $\|X\|_\infty$ respectivement : cela ressemble aux manipulations faites dans le cours pour montrer que toute application linéaire sur un espace de dimension finie est continue (par exemple, pour majorer $\|AX\|_1$: majorer les termes en facteur des x_j par leur maximum afin de pouvoir les mettre en facteur de $\sum_{j=1}^{n} |x_j|$). Cela permet d'avoir des majorations de $|||A|||_1$ et $|||A|||_\infty$.

Se demander ensuite comment on aurait pu choisir X de sorte à avoir une égalité à chaque majoration effectuée ci-dessus. En faisant de tels choix de X, vous obtiendrez des minorations de $|||A|||_1$ et $|||A|||_\infty$ et pourrez en déduire leurs valeurs exactes.

Commentaires.

✓ **Exercice 47.** Noter que le rang de $p(t)$ est un entier naturel, et que pour un projecteur il s'agit de plus d'une application continue (pourquoi ? comment peut-on écrire alternativement le rang d'un projecteur ?). Ainsi $t \mapsto \mathrm{rg}(p(t))$ est continue et à valeurs dans $\mathbb{N}$: il est classique d'en déduire que c'est une fonction constante.

Commentaires.

✓ **Exercice 48. (Convergence uniforme et convergence simple)** Sens direct : utiliser la continuité du produit matriciel. Sens réciproque : avec de bons choix de X, montrer que pour tout j, la suite des j^{es} colonnes des A_p converge vers un vecteur colonne. En déduire que la suite $(A_p)_{p\geqslant 0}$ converge composante par composante.

Commentaires.

★ **Exercice 49.**

1. Trianguler A avec une matrice diagonale par blocs convenable. En déduire que A est somme d'une matrice diagonalisable et d'une matrice nilpotente qui commutent. Utiliser la formule du binôme de Newton et remarquer que la somme est à support constant lorsqu'on prend une puissance de A arbitrairement grande. Vous aurez alors à étudier la limite de $\binom{p}{k}\lambda^{p-k}$ pour tout λ valeur propre de A : trouver un équivalent très simple de $\binom{p}{k}$ quand $p \to +\infty$ et utiliser le théorème des croissances comparées. Conclure par continuité du produit matriciel.
2. Utiliser la question précédente et le fait que les coefficients de A^p forment des suites d'entiers convergeant vers 0.

Commentaires.

★ **Exercice 50. (Rayon spectral)**

1. D'abord montrer que $\rho(A) \leqslant |||A|||_{\mathrm{N}}$ est vrai pour toute norme, en comparant $\mathrm{N}(AX)$ et $\mathrm{N}(X)$ pour tout vecteur propre X.

   L'inégalité en sens contraire est subtile à avoir : d'abord montrer que si $\rho(A) < 1$, alors $A^p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}$ et en déduire que si N_0 est une norme *quelconque* sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, alors $\mathrm{N}_0(A^p) < 1$ pour un p suffisamment grand. Partant de cette norme et des puissances de A jusqu'à p, construire une nouvelle norme N sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{N}(AX) < \mathrm{N}(X)$. Conclure que $|||A||| < 1$ dans ce cas. Si $\rho(A)$ est quelconque, on se ramène au cas précédent en remplaçant A par $(\rho(A)+\varepsilon)^{-1} A$ (pourquoi ?), et l'inégalité $|||\,(\rho(A)+\varepsilon)^{-1} A||| < 1$ permet de conclure.

2. Trianguler A et imiter le raisonnement de la première question pour en déduire $\rho(A) \leqslant |||A^n|||^{\frac{1}{n}}$. Obtenir une minoration en considérant à nouveau $(\rho(A)+\varepsilon)^{-1} A$ et en montrant qu'on a $|||\,(\rho(A)+\varepsilon)^{-n} A^n||| < 1$ pour tout n suffisamment grand. Conclure.

Commentaires.

Exercice 51. Utiliser le fait que pour tout $M \in G$, la famille $\left(M^k\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ soit bornée, pour en déduire que pour tout $M \in G$ et tout vecteur X la famille $\left(M^k X\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ l'est aussi (un bon choix de norme sur $\mathrm{M}_n(K)$ facilite cette étape). En déduire que $\left(\lambda^k\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ est borné pour toute valeur propre λ d'un élément de G. Cela donne une partie de ce qui est demandé. Pour montrer que tout $M \in G$ est diagonalisable : écrire $M = D + N$ avec D diagonalisable et N nilpotente qui commutent. Cette idée ne vient pas de nulle part : le calcul de M^k pour $k \in \mathbb{N}$ faire apparaître des $\binom{p}{k}$ qui, multipliés par des valeurs propres de module 1, donnent des coefficients tendant vers l'infini... Sauf si N est la matrice nulle (puisque dans ce cas $M^p = D^p$ ne fait pas intervenir de terme $\binom{p}{k}$ tendant vers l'infini). Formaliser cette idée. On peut se simplifier la vie en se ramenant à une somme très petite si, au lieu de considérer $M^p = (D+N)^p$, on considère $M^p X = (D+N)^p X$ avec X bien choisi.

Commentaires.

Exercice 52. (Matrices trigonalisables dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$)

1. Sens réciproque : évaluer l'inégalité en une racine complexe de P. Sens direct : écrire $P = \prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et minorer $|z-\alpha_i|$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout i à l'aide des parties réelle et imaginaire de $z-\alpha_i$.
2. Remarquer que l'ensemble des $P \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant l'inégalité de la question précédente, à *z fixé*, est un fermé (dans l'idée : c'est décrit par une inégalité large ; plus rigoureusement : introduire une application continue ψ_z définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ – ou $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ si vous anticipez déjà sur la suite de cette indication – telle que l'ensemble décrit ci-avant soit de la forme $\psi_z(\bigstar)$ avec $\bigstar$ une partie fermée très simple de $\mathbb{R}$). Utiliser le critère de trigonalisation et ce qui précède pour caractériser l'ensemble des matrices trigonalisables comme étant une intersection indexée par $z \in \mathbb{C}$ de parties fermées.

Commentaires.

★ **Exercice 53. (Densité des matrices diagonalisables)**

1. Si $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, on peut trianguler M. Écrire $M = PTP^{-1}$, et trouver une suite de matrices triangulaires supérieures $(T_p)_{p\geqslant 0}$ convergeant vers T, *dont tous les coefficients diagonaux sont distincts pour p suffisamment grand* (pourquoi faire ?). Pour ce faire, vous ne pouvez pas vous contenter de considérer $T - \frac{1}{p}\mathrm{I}_n$ ou une variante : ajouter aux coefficients diagonaux de T des quantités différentes pour chaque terme diagonal, divisées par p pour assurer la convergence vers T. Utiliser la continuité du produit matriciel pour en déduire que M est limite de matrices diagonalisables.

   Adapter la démonstration pour montrer qu'une matrice trigonalisable dans $\mathbb{R}$ est limite de matrices diagonalisables. Pour montrer que cela donne exactement l'adhérence de $\mathrm{D}_n(\mathbb{R})$: noter que si $(M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite de matrices diagonalisables convergeant vers une matrice M, alors la suite $(\chi_{M_p})_{p\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}_n[X]$ vers χ_M. Or l'ensemble des polynômes scindés sur $\mathbb{R}$ est un fermé (exercice 52) : conclure.
2. Montrer que $A \mapsto \chi_A(A)$ est nulle en les matrices diagonales, puis en les matrices diagonalisables (si A est semblable à D, comment écrire $\chi_A(A)$ en fonction de $\chi_A(D)$?), puis en toute matrice par densité. La continuité de cette application est à justifier : se souvenir que χ_A est un déterminant (ne pas aller trop vite cependant : ce n'est même exactement la même justification que la continuité de det).

Commentaires.

Exercice 54. (Divers raisonnements par densité)

★ 1. Montrer l'identité pour A inversible. Cela permet d'effectuer des factorisations convenables dans $\chi_{AB} = \det(X\mathrm{I}_n - AB)$: comment « faire apparaître » BA ? Ne pas oublier que le déterminant est à valeurs dans un corps, qui est commutatif, ce qui permet de « faire changer de place une matrice dans un déterminant » après avoir factorisé par ladite matrice. Conclure ensuite par densité. On ne pas manquer de justifier la continuité de $M \mapsto \chi_{MB}$ et $M \mapsto \chi_{BM}$ grâce à celle du déterminant.

2. Traiter le cas inversible : les propriétés de l'inverse et de la transposition rendent cette égalité facile à obtenir. Conclure par densité. On obtient la continuité de $A \mapsto \mathrm{Com}(A)$ en inspectant ses composantes.

3. Raisonner par l'absurde. En s'inspirant de la résolution d'un des exercices précédents, montrer que l'égalité $\pi_M = \chi_M$ est vraie pour toute matrice M dans une partie dense de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Or $M \mapsto \chi_M$ est continue (pourquoi ?), donc cette égalité doit être vraie sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ par densité. Conclure à une contradiction en trouvant une matrice qui ne réalise pas cette égalité.
4. Raisonner par l'absurde. Montrer alors que sous cette hypothèse absurde, toute matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable.

Commentaires.

★ **Exercice 55. (Résultant de deux polynômes)**

1. Sens direct : Définir A et B à l'aide des quotients de P et Q par leur pgcd. Sens réciproque : par l'absurde. Utiliser le théorème de Gauß.
2. Déduire de la question précédente que P et Q ne sont pas premiers entre eux si et seulement si l'application linéaire $(A, B) \mapsto AP - BQ$ (dont vous spécifierez les espaces de départ et d'arrivée) n'est pas inversible. Écrire sa matrice dans une base convenable et traduire sa non inversibilité à l'aide d'une fonction continue bien fameuse. Vous en déduirez ainsi une application continue $(P, Q) \mapsto R(P, Q)$ qui s'annule si et seulement si P et Q ne sont pas premiers entre eux. Pour faire le lien avec l'ensemble des polynômes à racines simples : comment caractériser le fait que $P \in K[X]$ soit à racines simples en termes de polynômes premiers entre eux ? En déduire que cet ensemble est l'image réciproque de $\{0\}$ par une application continue construite à l'aide de R.
3. Noter que cet ensemble est l'image réciproque de l'ensemble de la question précédente par une application continue adéquate.

Commentaires.

☢ **Exercice 56.** Pour $p = n$ l'exercice est classique (cf. le cours). Pour $p < n$, noter qu'une matrice de rang p peut être approchée d'aussi près que voulu par des matrices de rang strictement plus grand (pourquoi ? je fais allusion à un résultat classique). En déduire l'intérieur de R_p. Pour l'adhérence : si une suite de matrices de rang p converge, que dire de la suite de leurs mineurs ? Conclure que la limite doit être de rang inférieur ou égal à p. Réciproquement, se rappeler que toute matrice de R_p est équivalente à $\begin{pmatrix} \mathrm{I}_p & 0_{n-p,p} \\ 0_{p,n-p} & 0_{n-p} \end{pmatrix}$. En modifiant cette matrice, montrer que toute matrice de rang inférieur ou égal à p est limite de matrices de rang p.

Pour l'intérieur de R_p^+ : caractériser en termes de mineurs le fait d'appartenir à p. Utiliser la continuité du déterminant pour conclure que R_p^+ est ouvert. Pour l'adhérence : passer au complémentaire et utiliser ce que vous avez démontré tantôt.

Commentaires.

Exercice 57. Déterminer les composantes connexes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. **(Indications à venir)**

Commentaires.

✓ **Exercice 58. (Propriétés de base de l'exponentielle matricielle)**

1. Trianguler A. Si P et T vérifient : $A = PTP^{-1}$, utiliser la continuité du produit matriciel pour en déduire : $\exp(A) = P\exp(T)P^{-1}$. Utiliser le fait que le déterminant et la trace soient invariants par similitude, et que le déterminant d'une matrice triangulaire soit le produit de ses coefficients diagonaux, pour conclure.
2. On note que $\exp(A)$ est une limite d'éléments de $\mathbb{C}[A]$. Justifier que $\mathbb{C}[A]$ est fermé grâce à un résultat du cours.

Commentaires.

Exercice 59. (Propriétés topologiques d'une classe de similitude)

1. En utilisant un invariant de similitude bien connu, montrer que $\mathcal{S}_M$ est inclus dans un sous-espace affine de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Conclure grâce à un exemple du cours.
2. Le calcul matriciel ne nécessite aucune idée particulière, ni le calcul de limite. Éventuellement se souvenir que multiplier à gauche par une matrice diagonale revient à multiplier les lignes (par les coefficients diagonaux), tandis que la multiplication à droite affecte les colonnes.
3. Sens direct : comme M est à coefficients complexes, on sait qu'elle est semblable à une matrice T. Utiliser la question précédente et l'hypothèse de fermeture pour en déduire l'existence d'une matrice diagonale dans $\mathcal{S}_M$. Conclure. Sens réciproque : noter qu'un polynôme annulateur de M est aussi un polynôme annulateur de tout élément de $\mathcal{S}_M$. En choisissant convenablement un tel polynôme annulateur, montrer que toute matrice A qui est

limite d'une suite d'éléments de $\mathcal{S}_M$ est diagonalisable. Montrer que A et M ont les mêmes valeurs propres avec les mêmes ordres de multiplicité (en utilisant la continuité d'une certaine application et un passage à la limite : quelle application continue contiendrait ces informations sur A et M ?), et conclure qu'elles sont semblables.

Autre approche pour le sens réciproque, ne nécessitant pas la question précédente : remarquer que si M est diagonalisable, alors une matrice N est semblable à M si et seulement si elles ont mêmes polynômes caractéristique et minimal (pourquoi ?). En déduire que la classe de similitude de M est l'image réciproque d'un singleton par une application continue convenable (à valeurs dans un produit cartésien, pour tenir compte du fait qu'on considère deux polynômes).

4. Sens réciproque trivial. Sens direct : la question 2 permet de montrer que la classe de similitude n'est pas bornée si M n'est pas diagonale. Pour montrer que c'est une matrice d'homothétie, une piste possible : dans le cas contraire, prendre pour P une matrice de passage vers une base de la forme $(\vec{x}_1+\vec{x}_2, \alpha u(\vec{x}_1+\vec{x}_2), \dots)$ où $\vec{x}_1$ et $\vec{x}_2$ sont des vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes, et choisir convenablement α.

   Une autre démonstration très analytique, utilisant le théorème de Liouville, sera proposée dans les exercices du chapitre VIII.
5. Sens direct : utiliser le fait que $M \mapsto \chi_M$ soit continue pour en déduire que si : $\lim\limits_{p\to+\infty} M_p = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}$, alors 0 est l'unique valeur propre complexe de M_p pour tout p. Conclure grâce au fait que le spectre soit un invariant de similitude. Sens réciproque : trianguler M et utiliser la question 2. Que sait-on d'une matrice triangulaire semblable à une matrice nilpotente ?

Commentaires.

Exercice 60. (Continuité des racines)

1. Remarquer que le résultat est trivial si $|\lambda| \leqslant 1$. Dans le cas contraire : isoler λ dans l'égalité $\frac{P(\lambda)}{\lambda^{n-1}} = 0$ (pourquoi cette division par λ^{n-1} ?).

   Voir aussi l'exercice 40 du chapitre V, pour une démonstration avec les matrices compagnons (qui donne une majoration plus fine).
2. S'inspirer de la première question de l'exercice 52 pour montrer qu'il existe une racine α_n de P_n telle que : $|P_n(\lambda)| \geqslant |\lambda-\alpha_n|^d$. Passer à la limite pour conclure que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ convient (il faut savoir expliquer pourquoi $(P_n(\lambda))_{n\geqslant 0}$ converge vers $P(\lambda)$).
3. Raisonner par récurrence sur d. Pour l'hérédité : utiliser la question précédente pour écrire $P = (X-\alpha_n)Q_n$ avec $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ qui converge vers λ_d. Si $P = (X-\lambda_d)Q$, utiliser l'hypothèse de récurrence avec Q (pourquoi peut-on le faire ? vérifier que $(Q_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers Q). Conclure.

Commentaires.

Théorème de Borel-Lebesgue et applications

Exercice 61. (Théorème de Borel-Lebesgue) Soit X une partie de E. Montrer que X est compact si et seulement si, pour toute famille $(\mathrm{B}(\vec{a}_i, r_i))_{i\in I}$ de boules ouvertes de E telle que : $X \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} \mathrm{B}(\vec{a}_i, r_i)$, il existe un ensemble *fini* J inclus dans I tel que : $X \subseteq \bigcup\limits_{i\in J} \mathrm{B}(\vec{a}_i, r_i)$. **(Indications à venir)**

Commentaires.

Exercice 62. Si $A = \{\vec{u}_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \left\{\vec{\ell}\right\}$ alors, par l'exercice 61, il suffit de montrer que de tout recouvrement de A par des boules ouvertes, on peut extraire un recouvrement fini. Introduire des boules telles que $A \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} \mathrm{B}(\vec{a}_i, r_i)$, et noter que $\vec{\ell}$ doit appartenir à l'une des boules $\mathrm{B}(\vec{a}_j, r_j)$, et donc tous les termes de la suite au-delà d'un certain rang N (à cause de la convergence vers $\vec{\ell}$). Ainsi il suffit de retenir $\mathrm{B}(\vec{a}_j, r_j)$ et un nombre fini de boules (celles qui contiennent les $\vec{u}_n$ pour $n < N$) pour recouvrir A.

Commentaires.

Exercice 63. (Un compact est séparable) Pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, écrire $X \subseteq \bigcup\limits_{\vec{x}\in X} \mathrm{B}\left(\vec{x}, \frac{1}{n}\right)$ et utiliser le théorème de Borel-Lebesgue (exercice 61) pour inclure X dans un nombre fini de boules de rayon $\frac{1}{n}$. En appelant Y l'ensemble des centres de toutes les boules obtenues par ce procédé d'exhaustion, montrer que Y est dense dans X.

Commentaires.

Exercice 64. (Idéaux maximaux de $C^0([0,1],\mathbb{R})$)

1. Montrer que E/I_x est isomorphe à un corps grâce au théorème d'isomorphisme appliqué à un morphisme adéquat. Conclure en se souvenant que les idéaux d'un corps sont triviaux.

   Autre approche, nécessitant de traiter la question suivante en premier : noter que I_x est le noyau d'un morphisme d'anneaux. Ensuite, si I contient I_x sans être égal à E, montrer par l'absurde (comme dans la question suivante) qu'il existe un point y où toute fonction s'annule. En déduire $I_x \subseteq I \subseteq I_y$, et montrer que ce n'est possible que si $x = y$.
2. Utiliser le fait que I ne soit pas inclus dans I_x pour obtenir une fonction ne s'annulant pas en x, puis utiliser la continuité de ladite fonction. On peut prendre pour $\mathcal{O}_x$ une boule ouverte (ce qui permettra d'utiliser le théorème de Borel-Lebesgue tel qu'il est énoncé dans l'exercice 61).
3. Écrire $[0,1] \subseteq \bigcup\limits_{x\in[0,1]} \mathcal{O}_x$ et utiliser le théorème de Borel-Lebesgue (exercice 61). En déduire l'existence de $x_1, \ldots, x_n$ tels que $\sum\limits_{i=1}^{n} (f_{x_i})^2$ ne s'annule pas sur $[0,1]$. Conclure.

Commentaires.

Exercice 65. (Théorème des fermés emboîtés : cas compact) Interpréter de manière équivalente le résultat à démontrer, en passant au complémentaire, comme une condition sur une réunion d'ouverts. La démontrer en raisonnant par l'absurde, et en notant que par le théorème de Borel-Lebesgue (exercice 61), cela impliquerait l'existence de $N \in \mathbb{N}$ tel que : $X = X \setminus F_N$. Conclure.

Vous aurez besoin d'une version plus générale (et pourtant équivalente) du théorème de Borel-Lebesgue (reprendre l'énoncé de l'exercice 61 en remplaçant les boules ouvertes par des ouverts quelconques).

Commentaires.

Lemme de Baire et conséquences

☢ **Exercice 66. (Lemme de Baire)**

1. Raisonner par contraposée.
2. Passer au complémentaire.
3. Utiliser la densité pour l'existence de $\vec{x}_1$, puis le caractère ouvert pour l'existence d'une boule ouverte de centre $\vec{x}_1$ incluse dans l'intersection. Cette boule ouverte contient une boule fermée, quitte à abaisser le rayon.
4. Même principe.
5. Ce qui précède permet de majorer $\|\vec{x}_{n+1} - \vec{x}_n\|$ et d'en déduire que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} (\vec{x}_{n+1} - \vec{x}_n)$ converge absolument.

   En déduire que $(\vec{x}_n)_{n\geqslant 0}$ converge (c'est ici qu'intervient l'hypothèse de complétude). Il est aussi possible de montrer que $(\vec{x}_n)_{n\geqslant 0}$ est de Cauchy en majorant $\|\vec{x}_{n+p} - \vec{x}_n\|$ par une suite ne dépendant pas de p et convergeant vers 0 (aisé par construction de la suite). Pour montrer que sa limite est dans l'intersection requise : utiliser la construction de la suite pour montrer que $\vec{x}_{n+p}$ appartient à une boule fermée incluse dans U_n pour tous n et p, et prendre la limite quand $p \to +\infty$ (c'est ici que l'on voit l'intérêt des boules fermées).

Commentaires.

Exercice 67. (Une conséquence utile du lemme de Baire) Noter que E n'est pas d'intérieur vide. Utiliser le lemme de Baire pour en déduire que l'un des F_k n'est pas d'intérieur vide. Que dire d'un sous-espace vectoriel de E qui n'est d'intérieur vide ? Revoir le cours si besoin.

Commentaires.

Exercice 68. (En dimension finie, une application linéaire localement nilpotente est nilpotente)

1. Introduire : $F_k = \ker\left(f^k\right)$, et noter que l'hypothèse permet d'écrire : $E = \bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} \ker(f^k)$. Conclure avec le lemme de Baire (exercice 66).
2. Plus endomorphismes très simples de $K[X]$ sont localement nilpotents sans être nilpotents : penser à des opérations qui abaissent le degré.

Commentaires.

Exercice 69. (Complétude et non dénombrabilité)

1. Raisonner par l'absurde et utiliser le lemme de Baire (exercice 66) avec la réunion : $K = \bigcup_{x \in K} \{\vec{x}\}$.
2. Raisonner par l'absurde. Justifier : $E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n$, avec : $F_n = \mathrm{Vect}\left((\vec{e}_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}\right)$, et obtenir une contradiction en utilisant le lemme de Baire et le résultat de l'exercice 67.
   Autre piste n'utilisant pas le lemme de Baire : utiliser les $\vec{e}_n$ pour construire une série absolument convergente mais qui ne converge pas (rendre unitaires les $\vec{e}_n$ pour se simplifier la vie). Considérer pour cela une suite $(\lambda_n)_{n \geqslant 1}$ définie par récurrence par $\lambda_1 = \alpha$ (vous réfléchirez au choix pertinent de α à faire en fin de calcul) et $\lambda_{n+1} = \alpha \inf_{\vec{x} \in F_{n-1}} \|\lambda_n \vec{e}_n - \vec{x}\|$ pour tout n. Observer que pour un bon choix de α, la série $\sum_{n \geqslant 1} \lambda_n \vec{e}_n$ convient. Pour contredire la convergence, raisonner par l'absurde et noter que la limite S de cette série devrait appartenir à F_n pour une certaine valeur de n. En déduire que c'est le cas aussi du reste d'indice n de la série, et obtenir une contradiction en encadrant de deux façons différentes $\|\lambda_{n+1}\vec{e}_{n+1} - R_n\|$ où R_n est ce reste.

Commentaires.

☢ **Exercice 70. (Points de continuité des fonctions limites pour la convergence simple)**

1. Reconnaître des images réciproques de fermés par des fonctions continues.
2. Écrire le critère de Cauchy pour la suite $(f_n(x))_{n \geqslant 0}$.
3. Écrire une relation d'inclusion entre l'intérieur de G_n et $F_{k,n} \cap ([0,1] \setminus \Omega_k)^\circ$, et vérifier que ce dernier ensemble est nécessairement d'intérieur vide. Remarquer enfin que $[0,1] \setminus \Omega_k$ s'écrit à l'aide des ensembles G_n, et conclure avec le lemme de Baire.
4. Noter que si $x \in \Omega_k$ alors x appartient à l'un des $\mathring{F}_{k,n}$.
5. Utiliser l'inégalité triangulaire pour faire apparaître deux quantités que l'on sait majorer grâce à la question précédente.
6. Utiliser la continuité de f_n en x.
7. Conséquence immédiate de la question précédente, puisque prendre $x \in \Omega$ autorise à prendre $\frac{3}{k}$ aussi petit que l'on veut (et donc plus petit que n'importe quel ε). Utiliser le lemme de Baire et la question 3 pour conclure.
8. Écrire f' comme une limite simple d'une suite de fonctions continues. Pour trouver une telle suite de fonctions : se souvenir que f' est la limite d'un taux d'accroissement. Faire apparaître un paramètre entier n dans ce taux d'accroissement.

Commentaires.

☢ **Exercice 71. (Densité des fonctions continues mais dérivables nulle part)**

1. Si f appartient à tous les $U_{\frac{1}{n},n}$, montrer l'existence d'une suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$ convergeant vers x telle que $\left|\frac{f(x_n)-f(x)}{x_n - x}\right| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Conclure.
2. Montrer que le complémentaire est fermé par caractérisation séquentielle. Vous aurez besoin de deux choses : 1° la compacité de I pour extraire une sous-suite convergente, 2° le fait que si une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f, et si $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite numérique convergeant vers ℓ, alors $(f_n(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(\ell)$ (exercice 21 du chapitre préliminaire). Le reste ne soulève pas de difficulté.
3. Soit $x \in [0,1]$. Remarquer que pour $N > 2\pi$ (pour l'instant quelconque), on peut toujours trouver y tel que $0 \leqslant |Nx - Ny| \leqslant 2\pi$ et $|\sin(Nx) - \sin(Ny)| \geqslant 1$. En déduire une minoration de $\left|\frac{r\sin(Nx) - r\sin(Ny)}{x-y}\right|$ par une quantité dépendant de r et N. Choisir N de sorte que ce minorant soit notablement plus grand que n. C'est donc gagné si, pour ce même y, la quantité $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ reste « petite » (pour ne pas compenser la précédente). C'est possible pour x et y suffisamment proches : pourquoi ? Comment le quantifier ? Le fait d'avoir une fonction continue sur $[0,1]$ n'est pas anodin.
4. Utiliser le lemme de Baire et la question 1.

Commentaires.