Exercices du chapitre VI (Topologie des espaces vectoriels normés)

✓ : exercice d'application des méthodes, ★ : exercice classique, ☢ : exercice difficile.

Sauf mention explicite du contraire, dans toute cette feuille d'exercices K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, tandis que $(E, \|\cdot\|)$ et $(F, \|\cdot\|)$ désignent des K-espaces vectoriels normés non triviaux. Les deux normes seront respectivement notées $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$ s'il est nécessaire de les distinguer.

Lorsqu'on introduit $\mathrm{M}_n(K)$, l'entier n est toujours strictement positif.

Lorsque l'exercice met en jeu un espace vectoriel de dimension finie sans préciser la norme, il vous revient l'initiative d'en introduire une (en attendant de montrer l'équivalence des normes en dimension finie).

Topologie dans $\mathbb{R}$: compléments et approfondissements

Exercice 1. Déterminer les morphismes de groupes continus de $(\mathbb{R},+)$ dans $(\mathbb{R},+)$, puis ceux de $(\mathbb{R},+)$ dans $(\mathbb{R}_+^*,\times)$.

★ **Exercice 2. (Sous-groupes de $\mathbb{R}$)**

1. Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$. Montrer que soit G est dense dans $\mathbb{R}$, soit il existe $a \geqslant 0$ tel que : $G = a\mathbb{Z}$.
2. Retrouver le fait que $\mathbb{Q}$ soit dense dans $\mathbb{R}$.

Ce résultat est utilisé dans les exercices suivants.

Exercice 3. Soit f une application continue sur $\mathbb{R}$. On note : $\mathrm{Per}(f) = \{T \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)\}$.

1. Montrer que $\mathrm{Per}(f)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$.
2. On suppose : $\mathrm{Per}(f) \neq \{0\}$. Montrer que soit f est constante sur $\mathbb{R}$, soit il existe un plus petit réel $T_0 > 0$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+T_0) = f(x)$. Ce plus petit réel est appelé *période* de f.

Exercice 4.

1. Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}^*)^2$. Montrer que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si : $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$.
2. Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Montrer que $a\mathbb{N} - b\mathbb{N}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si : $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$.
3. Montrer que $\{\sin(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1,1]$.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue sur $\mathbb{R}$, telle que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}$. Montrer que f est une fonction convexe.

☢ **Exercice 6.** Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle bornée telle que : $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est un intervalle.

Exercice 7. (Ouverts de $\mathbb{R}$) Montrer que toute partie ouverte non vide de $\mathbb{R}$ est une réunion au plus dénombrable d'intervalles ouverts non vides et deux à deux disjoints.

Exercice 8. Montrer que tout sous-groupe de $\mathbb{U}$ est soit cyclique, soit dense dans $\mathbb{U}$.

Étude de normes

✓ **Exercice 9. (Norme sur $K[X]$)**

1. Montrer que $\mathrm{N} : P \mapsto \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{|P(k)|}{k!}$ est bien définie et est une norme sur $K[X]$.
2. Montrer que $\mathrm{N} : P \mapsto \sum\limits_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(k)|$ est une norme sur $K[X]$.

Exercice 10. Pour tout intervalle I non vide de $\mathbb{R}$, on pose : $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $\mathrm{N}_I(P) = \sup\limits_{x\in I} |P(x)|$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur I pour que N_I soit une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = 0\}$. Montrer que F est fermé dans $(\mathbb{R}[X], \mathrm{N}_{[0,1]})$ mais pas dans $(\mathbb{R}[X], \mathrm{N}_{[1,2]})$.

✓ **Exercice 11. (Norme sur $\mathrm{C}^1([0,1],\mathbb{R})$)** On pose : $E = \mathrm{C}^1([0,1],\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\mathrm{N} : f \mapsto |f(0)| + \displaystyle\int_0^1 |f'|$ est une norme sur E.
2. Montrer que les normes N et $\|\cdot\|_1$ ne sont pas équivalentes.

✓ **Exercice 12.** Soit $E = \mathrm{C}^0(\mathbb{R}, K) \cap \mathrm{L}^1(\mathbb{R}, K) \cap \mathrm{L}^2(\mathbb{R}, K)$. Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ définissent par restriction des normes sur E. Existe-t-il $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\|\cdot\|_1 \leqslant \alpha\|\cdot\|_2$? Et tel que : $\|\cdot\|_2 \leqslant \alpha\|\cdot\|_1$?

✓ **Exercice 13.** Soit $E = \{f \in \mathrm{C}^1([0,1], K) \mid f(0) = 0\}$. On admet que E est un espace vectoriel et que $\|\cdot\|_\infty$ induit par restriction une norme sur E. On pose aussi : $\forall f \in E$, $\mathrm{N}(f) = \|f'\|_\infty$. Démontrer que N est une norme sur E, puis étudier si $\|\cdot\|_\infty$ et N sont équivalentes.

★ **Exercice 14. (Inégalité de Hölder et $\|\cdot\|_p$)** On pose : $\forall p \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall \vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n$, $\|\vec{x}\|_p = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

1. Soit $p \in]0,1[$. Montrer que $\|\cdot\|_p$ n'est pas une norme sur K^n.

On suppose désormais : $p > 1$. Soit $q = \frac{p}{p-1}$. On remarque que l'on a : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

2. Montrer : $\forall \vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n$, $\forall \vec{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in K^n$, $\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leqslant \|\vec{x}\|_p \|\vec{y}\|_q$ (*inégalité de Hölder*).

   On aura besoin de l'inégalité : $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.
3. Montrer que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur K^n.

✓ **Exercice 15.** On reprend les notations de l'exercice 14. Montrer : $\forall \vec{x} \in K^n$, $\lim\limits_{p \to +\infty} \|\vec{x}\|_p = \|\vec{x}\|_\infty$.

Exercice 16. (Inégalité de Hölder et $\|\cdot\|_p$ pour les fonctions) Soit $E = \mathrm{C}^0([0,1], K)$. On pose : $\forall p \in]1, +\infty[$, $\forall f \in E$, $\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.


1859-1937

1. Soient $p \in]1, +\infty[$ et $q = \frac{p}{p-1}$. Montrer : $\forall (f, g) \in E^2$, $\int_0^1 |fg| \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$.
2. Montrer que l'application $\|\cdot\|_p$ définit une norme sur E.

☢ **Exercice 17. (Jauge)** Supposons E de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Soit K une partie de E compacte, convexe, symétrique par rapport $\vec{0}$ et dont $\vec{0}$ est un point intérieur. Montrer qu'il existe une norme N sur E dont la boule unité fermée est K.

Exercice 18. (Équivalence des normes et dimension infinie)

1. Montrer que si toutes les normes sur E sont équivalentes, alors toute forme linéaire sur E est continue.
2. ☢ Montrer que si E de dimension infinie, alors il existe une forme linéaire sur E non continue. Qu'a-t-on démontré ?

Études topologiques abstraites

✓ **Exercice 19.** Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E, alors l'adhérence de F est aussi un sous-espace vectoriel de E.

✓ **Exercice 20.** Soient A et B deux parties non vides de E. On pose : $A + B = \{a + b \mid (a, b) \in A \times B\}$.

1. Montrer que si A est ouvert, alors $A + B$ l'est aussi.
2. Montrer que si A est compact et B fermé, alors $A + B$ est fermé.

★ **Exercice 21. (Adhérence d'un hyperplan)** Soit φ une forme linéaire non nulle sur E.

1. Montrer que φ est continue si et seulement si $\ker(\varphi)$ est fermé dans E.
2. On suppose que φ n'est pas continue. Montrer que $\ker(\varphi)$ est dense dans E.

Exercice 22. (Norme triple d'une forme linéaire continue) Soit φ une forme linéaire continue et non nulle sur E. On pose : $H = \ker(\varphi)$. Pour tout $\vec{a} \in E \setminus H$, montrer : $|||\varphi||| = \dfrac{|\varphi(a)|}{\mathrm{d}(\vec{a}, H)}$.

✓ **Exercice 23.** Soit $f : E \to F$ une application continue. Montrer que le graphe de f, c'est-à-dire : $\{(\vec{x}, f(\vec{x})) \mid \vec{x} \in E\}$ est une partie fermée de $E \times F$ muni de la topologie produit.

✓ **Exercice 24.** Soient A une partie dense de E et $f : E \to F$ une application continue. Montrer que $f(A)$ est dense dans $f(F)$.

Exercice 25. Supposons que F est un espace complet. Soient A une partie dense de E et $f : A \to F$ une application uniformément continue. Montrer qu'il existe une unique application uniformément continue $g : E \to F$ telle que : $g_{|A} = f$. *Le même exercice est pertinent en supposant que f est lipschitzienne – et on montre alors que g l'est aussi –.*

Exercice 26. Soient U et V deux parties ouvertes et denses de E. Montrer que $U \cap V$ est un ouvert dense de E.

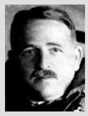
★ **Exercice 27.** Supposons E de dimension finie $n \geqslant 2$. Montrer que la sphère unité de E est connexe par arcs.

Exercice 28. Supposons E de dimension finie n.

1. Montrer que si H est un hyperplan de E, alors $E \setminus H$ n'est pas connexe par arcs.
2. Soit F un sous-espace vectoriel de E tel que : $\dim(F) \leqslant n-2$. Montrer que $E \setminus F$ est connexe par arcs.

Exercice 29. (Stabilité par adhérence et intérieur ?) Soit A une partie de E.

1. On suppose que A est convexe. Étudier si $\mathring{A}$ et $\overline{A}$ sont convexes.
2. On suppose que A est connexe par arcs. Étudier si $\mathring{A}$ et $\overline{A}$ sont connexes par arcs.


1880-1956

☢ **Exercice 30. (Théorème de Riesz)** Supposons E de dimension infinie. Montrer que sa boule unité fermée n'est pas compacte.

Exercice 31. Supposons que K est un sous-corps de $\mathbb{C}$. Montrer qu'un morphisme de corps $f : K \to \mathbb{C}$ continu est la restriction à K de l'identité ou de la conjugaison complexe.

Exercice 32. (Ensembles discrets) Soit X une partie de E. On dit que X est *discret* si tout point de X est isolé, c'est-à-dire : pour tout $\vec{x} \in X$, il existe $r > 0$ tel que : $\mathrm{B}(\vec{x}, r) \cap X = \{\vec{x}\}$.

1. On suppose $E = \mathbb{R}$ dans cette question. Montrer que si X est une partie discrète de $\mathbb{R}$, alors elle est aussi plus dénombrable.
2. Montrer que si X est compact et discret, alors c'est un ensemble fini.

Exercice 33. Supposons E de dimension finie et soit f une application linéaire telle que : $|||f||| \leqslant 1$, où $|||\cdot|||$ est la norme sur $\mathrm{L}(E)$ subordonnée à $\|\cdot\|$.

1. Montrer : $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{im}(f - \mathrm{Id}_E)$.
2. Étudier la convergence de la suite $(f_n)_{n \geqslant 0}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n = \frac{1}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} f^k$.

★ **Exercice 34. (Applications propres)** *Vous aurez besoin de l'exercice 62 pour la première question.*

1. Soit $f : E \to F$ une application continue. On suppose que l'image réciproque par f de tout compact de F est un compact de E. Montrer que l'image directe par f de tout fermé de E est un fermé de F.
2. Application. Montrer que l'ensemble des polynômes réels, unitaires de degré n et scindés sur $\mathbb{R}$, est un fermé de $\mathbb{R}_n[X]$.

★ **Exercice 35. (Théorème du point fixe de Banach-Picard)** Supposons que E est un espace complet. Soit $f : E \to E$ une application contractante (c'est-à-dire : il existe $k \in]0,1[$ tel que : $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2,\ \|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\| \leqslant k \|\vec{x} - \vec{y}\|$). Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 36. (Autre théorème du point fixe) Soient K une partie compacte de E et $f : K \to K$ une application telle que : $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in K^2,\ \vec{x} \neq \vec{y} \implies \|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\| < \|\vec{x} - \vec{y}\|$. Montrer que f admet un unique point fixe.

Études topologiques dans les espaces de fonctions et de suites

Exercice 37. Soit ℓ^∞ l'espace vectoriel des suites bornées, qu'on munit de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Montrer que ℓ^∞ est un espace complet.

✓ **Exercice 38.** Soient $E = \mathrm{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et $A = \{f \in E \mid f \geqslant 0\}$. Déterminer l'intérieur de A lorsque E est muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, puis de la norme $\|\cdot\|_1$.

Exercice 39. Montrer que pour toute norme N sur $E = \mathrm{C}^\infty([0,1], \mathbb{R})$, l'application $f \mapsto f'$ n'est pas une fonction continue de (E, N) dans lui-même.

Exercice 40. Soient $E = \mathrm{C}^0([-1,1], \mathbb{R})$ et Φ la forme linéaire définie sur E par $f \mapsto \displaystyle\int_0^1 f - \int_{-1}^0 f$. Montrer que Φ est continue et calculer sa norme triple (subordonnée à $\|\cdot\|_\infty$ et $|\cdot|$).


1877-1947

Exercice 41. (Inégalité de Hardy) On munit $E = \mathrm{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_2$. Soit $f \in E$. On pose : $g(0) = f(0)$, et : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $g(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

1. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$ et que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^x g^2 = 2\int_0^x fg - x(g(x))^2$.
2. En déduire : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt{\displaystyle\int_0^x g^2} \leqslant 2\sqrt{\displaystyle\int_0^{+\infty} f^2}$. En déduire que g appartient à E et que : $\|g\|_2 \leqslant 2\|f\|_2$.
3. Montrer que l'application linéaire de $(E, \|\cdot\|_2)$ dans lui-même définie par $f \mapsto g$ est continue et calculer sa norme triple.

Études topologiques dans K^n, $K[X]$ et $\mathrm{M}_n(K)$

✓ **Exercice 42.** Montrer qu'il n'existe pas de bijection continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 43.

1. Supposons E de dimension finie n. Montrer que l'ensemble $\{(\vec{x}_1, \dots \vec{x}_n) \in E^n \mid (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \text{ libre}\}$ est ouvert dans E^n.
2. ☢ On ne suppose plus E de dimension finie. Montrer que $\left\{(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \in E^2 \mid (\vec{x}_1, \vec{x}_2) \text{ libre}\right\}$ est un ouvert de E^2.

✓ **Exercice 44.** Étudier l'adhérence et l'intérieur de $\mathrm{SL}_n(K) = \ker(\det)$.

✓ **Exercice 45.** Déterminer la norme triple de la trace pour les trois normes usuelles de $\mathrm{M}_n(K)$.

✓ **Exercice 46.** Soit $A = ((a_{i,j}))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathrm{M}_n(K)$. Notons $|||\cdot|||_1$ et $|||\cdot|||_\infty$ les normes subordonnées respectivement à $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$. Montrer : $|||A|||_1 = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n}\left(\sum\limits_{i=1}^n |a_{i,j}|\right)$, et : $|||A|||_\infty = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n}\left(\sum\limits_{j=1}^n |a_{i,j}|\right)$.

✓ **Exercice 47.** Soient I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $p : I \to \mathrm{M}_n(K)$ une application continue. On suppose que pour tout $t \in \mathbb{R}$, la matrice $p(t)$ est un projecteur. Montrer que le rang de $p(t)$ est le même pour tout $t \in I$.

✓ **Exercice 48. (Convergence uniforme et convergence simple)** Soit $(A_p)_{p \geqslant 0}$ une suite à valeurs dans $\mathrm{M}_n(K)$. Montrer que $(A_p)_{p \geqslant 0}$ converge dans $\mathrm{M}_n(K)$ si et seulement si, pour tout $X \in \mathrm{M}_{n,1}(K)$, la suite $(A_pX)_{p \geqslant 0}$ converge dans $\mathrm{M}_{n,1}(K)$.

★ **Exercice 49.** Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice dont toutes les valeurs propres sont de module strictement inférieur à 1.

1. Montrer : $\lim\limits_{p \to +\infty} A^p = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}$.
2. On suppose de plus : $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$, et que A est diagonalisable. Montrer : $A = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}$.

★ **Exercice 50. (Rayon spectral)** Pour tout $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, on pose : $\rho(A) = \max\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} |\lambda|$. Pour toute norme N sur $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, on note $|||\cdot|||_{\mathrm{N}}$ la norme de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ subordonnée à N.

1. Montrer : $\forall A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, $\rho(A) = \inf |||A|||_{\mathrm{N}}$, où N parcourt l'ensemble des normes de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.
   Considérer $(\rho(A) + \varepsilon)^{-1} A$.
2. Soit N une norme quelconque. Montrer : $\forall A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, $\rho(A) = \lim\limits_{p \to +\infty} \left(|||A^p|||_{\mathrm{N}}\right)^{\frac{1}{p}}$.

Exercice 51. Soit G un sous-groupe borné de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que toutes les matrices de G sont diagonalisables et que leurs valeurs propres sont de module 1.

Exercice 52. (Matrices trigonalisables dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$)

1. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ unitaire. Montrer que P est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si : $\forall z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| \geqslant |\mathrm{Im}(z)|^n$.
2. Montrer que l'ensemble des matrices trigonalisables dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est un fermé.

★ **Exercice 53. (Densité des matrices diagonalisables)** Soit $\mathrm{D}_n(K)$ l'ensemble des matrices de $\mathrm{M}_n(K)$ diagonalisables.

1. Montrer que $\mathrm{D}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Que dire de l'adhérence de $\mathrm{D}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$?
2. Déduire de la question précédente une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton dans le cas $K = \mathbb{C}$.

Exercice 54. (Divers raisonnements par densité) Soit $(A, B) \in (\mathrm{M}_n(K))^2$. On suppose : $n \geqslant 2$.

★ 1. Montrer : $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
2. Montrer : $\mathrm{Com}(AB) = \mathrm{Com}(A)\mathrm{Com}(B)$.
3. Montrer que l'application $M \mapsto \pi_M$ n'est pas continue sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. L'ensemble d'arrivée est $\mathbb{C}_n[X]$.
4. Montrer que l'application $\mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ qui, à une matrice M, associe la partie D diagonalisable de sa décomposition de Dunford, n'est pas continue.

★ **Exercice 55. (Résultant de deux polynômes)** Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Soient $P \in K[X]$ et $Q \in K[X]$ non constants. Montrer que P et Q ne sont pas premiers entre eux si et seulement s'il existe $(A, B) \in (K[X])^2$ tel que : $AP = BQ$, avec : $0 \leqslant \deg(A) < \deg(Q)$, et : $0 \leqslant \deg(B) < \deg(P)$.
2. En déduire que l'ensemble des polynômes à racines simples est un ouvert de $K_n[X]$. *Interpréter la question précédente en termes de non injectivité d'une certaine application linéaire, puis considérer son déterminant.*
3. Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathrm{M}_n(K)$ ayant n valeurs propres distinctes est un ouvert.

☢ **Exercice 56.** Pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, on pose : $R_p = \{A \in \mathrm{M}_n(K) \mid \mathrm{rg}(A) = p\}$, et : $R_p^+ = \{A \in \mathrm{M}_n(K) \mid \mathrm{rg}(A) \geqslant p\}$. Étudier l'intérieur et l'adhérence de R_p et R_p^+.

Exercice 57. Déterminer les composantes connexes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

✓ **Exercice 58. (Propriétés de base de l'exponentielle matricielle)** Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer : $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{tr}(A))$.
2. Montrer que $\exp(A)$ est un polynôme en A.

Exercice 59. (Propriétés topologiques d'une classe de similitude) Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Pour tout $\varepsilon > 0$, soit $D_\varepsilon \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les ε^j pour $j \in [\![0, n-1]\!]$, dans cet ordre. On pose : $\mathcal{S}_M = \left\{PMP^{-1} \mid P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\right\}$.

1. Expliciter l'intérieur de $\mathcal{S}_M$.
2. Calculer $D_\varepsilon M D_\varepsilon^{-1}$ pour tout $\varepsilon > 0$. En déduire la valeur de : $\lim\limits_{n\to+\infty} D_{\frac{1}{n}} M D_{\frac{1}{n}}^{-1}$, lorsque M est une matrice triangulaire supérieure.
3. Montrer que $\mathcal{S}_M$ est fermé dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ si et seulement si M est diagonalisable.
4. Montrer que $\mathcal{S}_M$ est borné dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ si et seulement si M est une matrice d'homothétie.
5. Montrer que la matrice nulle est dans l'adhérence de $\mathcal{S}_M$ si et seulement si M est nilpotente.

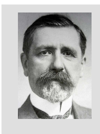
☢ **Exercice 60. (Continuité des racines)** On munit $\mathbb{C}[X]$ de la norme $\|\cdot\|_1$ définie par : $\forall P = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, $\|P\|_1 = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} |a_k|$.

1. Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ unitaire et $\lambda \in \mathbb{C}$ une racine de P. Montrer : $|\lambda| \leqslant \|P\|_1$.

Soit $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Soit $(P_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de polynômes unitaires de degré d, qui converge vers un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré d. On le factorise ainsi : $P = \prod\limits_{i=1}^{d} (X - \lambda_i)$, avec : $(\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in \mathbb{C}^d$.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une racine de P. Montrer l'existence d'une suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists m \in \mathbb{N}$, $P_m(\alpha_n) = 0$, et : $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \lambda$.
3. Montrer qu'on peut définir, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $i \in [\![1, d]\!]$, une famille $(\lambda_{n,1}, \dots, \lambda_{n,d}) \in \mathbb{C}^d$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n = \prod\limits_{i=1}^{d} (X - \lambda_{n,i})$, et : $\forall i \in [\![1, d]\!]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_{n,i} = \lambda_i$.

Théorème de Borel-Lebesgue et applications


1871-1956

Tous les exercices qui suivent sont des compléments pour les élèves préparant le concours X-ENS.

☢ **Exercice 61. (Théorème de Borel-Lebesgue)** Soit X une partie de E. Montrer que X est compact si et seulement si, pour toute famille $(\mathrm{B}(\vec{a}_i, r_i))_{i\in I}$ de boules ouvertes de E telle que : $X \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} \mathrm{B}(\vec{a}_i, r_i)$, il existe un ensemble *fini* J inclus dans I tel que : $X \subseteq \bigcup\limits_{i\in J} \mathrm{B}(\vec{a}_i, r_i)$.

Les exercices suivants sont des applications de la propriété de Borel-Lebesgue.

Exercice 62. Soit $(\vec{u}_n)_{n\geqslant 0}$ une suite à valeurs dans E et convergente. Notons $\vec{\ell}$ sa limite. Montrer que l'ensemble $\{\vec{u}_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \left\{\vec{\ell}\right\}$ est compact.

Exercice 63. (Un compact est séparable) Soit X une partie compacte de E. Montrer qu'il existe une partie dénombrable et dense dans X.

Exercice 64. (Idéaux maximaux de $\mathrm{C}^0([0,1],\mathbb{R})$**)** Soit $E = \mathrm{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. On pose : $I_x = \{f \in E \mid f(x) = 0\}$, pour tout $x \in [0,1]$.

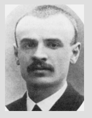
1. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, l'ensemble I_x est un idéal de l'anneau E et qu'il est maximal (c'est-à-dire : si I est un idéal tel que : $I_x \subseteq I$, alors : $I \in \{I_x, E\}$).

On veut montrer la réciproque : tout idéal maximal de E est de cette forme. Soit I un idéal de E. On suppose que pour tout $x \in [0,1]$, on a $I \not\subseteq I_x$.

2. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, il existe une fonction $f_x \in I$ qui ne s'annule pas sur un voisinage $\mathcal{O}_x$ de x.
3. En déduire que I contient un élément inversible dans l'anneau E. Conclure.

Exercice 65. (Théorème des fermés emboîtés : cas compact) Soient X une partie compacte non vide de E et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fermés relatifs dans X, tous non vides. Montrer : $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

Lemme de Baire et conséquences


1874-1932

Tous les exercices qui suivent sont des compléments pour les élèves préparant le concours X-ENS.

Exercice 66. (Lemme de Baire) Supposons que E est complet. Nous allons montrer le résultat suivant : si $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de fermés inclus dans E tels que $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} F_k$ soit d'intérieur NON vide, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que F_k soit d'intérieur non vide.

1. Montrer que cela revient à montrer qu'une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide.
2. Montrer que cela revient à montrer que toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense.

C'est cette version du lemme de Baire que nous allons démontrer. Soit, pour tout $k \in \mathbb{N}$, U_k un ouvert dense de E. On veut montrer que $\bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} U_k$ est un ouvert dense de E. Cela revient à montrer :

$$\forall \vec{x} \in E,\ \forall r > 0,\ \mathrm{B}(x,r) \cap \bigcap_{k\in\mathbb{N}} U_k \neq \emptyset.$$

Soient $\vec{x} \in E$ et $r > 0$.

3. Montrer qu'il existe $\vec{x}_1 \in E$ et $r_1 > 0$ tels que : $\mathrm{B}_f(\vec{x}_1, r_1) \subseteq \mathrm{B}(\vec{x}, r) \cap U_0$, et : $r_1 \leqslant 1$.
4. Plus généralement, construire par récurrence une suite $(\vec{x}_n)_{n\geqslant 0}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \exists (\vec{x}_{n+1}, r_{n+1}) \in E \times \left]0, \frac{1}{2^n}\right],\quad \mathrm{B}_f(\vec{x}_{n+1}, r_{n+1}) \subseteq \mathrm{B}(\vec{x}_n, r_n) \cap U_n.$$

5. Montrer que la suite $(\vec{x}_n)_{n\geqslant 0}$ converge et que sa limite $\vec{\ell}$ vérifie : $\vec{\ell} \in \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} U_k$. Conclure.

Exercice 67. (Une conséquence utile du lemme de Baire) Supposons que E est complet. Soit $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille de sous-espaces vectoriels fermés de E tels que : $E = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} F_k$. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que : $E = F_k$. Réinterpréter ce résultat en termes « d'inversion de quantificateurs ».

Exercice 68. (En dimension finie, une application linéaire localement nilpotente est nilpotente)

1. Supposons E de dimension finie, et soit f un endomorphisme de E localement nilpotent, c'est-à-dire : $\forall \vec{x} \in E$, $\exists k \in \mathbb{N}$, $f^k(\vec{x}) = \vec{0}$. Montrer que f est nilpotent.
2. Donner un contre-exemple en dimension infinie.

Exercice 69. (Complétude et non dénombrabilité)

1. Montrer qu'un sous-ensemble de $\mathbb{C}$ dénombrable et sans singleton d'intérieur non vide n'est pas complet. Ainsi $\mathbb{Q}$ n'est pas complet (et on en déduit une nouvelle démonstration que $\mathbb{R}$ est indénombrable).
2. Montrer qu'un espace vectoriel normé de dimension infinie, et qui admet une partie génératrice dénombrable $(\vec{e}_n)_{n\geqslant 0}$, n'est jamais complet. Ainsi $\mathbb{R}[X]$ n'est pas complet peu importe la norme.

Exercice 70. (Points de continuité des fonctions limites pour la convergence simple) Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions continues sur [0,1] et à valeurs dans F. On suppose qu'elle converge simplement sur [0,1] vers une fonction f. Nous allons montrer que l'ensemble des points de continuité de f est dense dans [0,1].

Pour tout $(k,n) \in (\mathbb{N}\setminus\{0\})\times\mathbb{N}$, soit : $F_{k,n} = \bigcap_{p,q\geqslant n} \left\{x \in [0,1] \mid \|f_p(x) - f_q(x)\| \leqslant \frac{1}{k}\right\}$.

1. Montrer que $F_{k,n}$ est une partie fermée de [0,1] pour tout $(k,n) \in (\mathbb{N}\setminus\{0\})\times\mathbb{N}$.
2. Montrer : $[0,1] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_{k,n}$.
3. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, l'ensemble $\Omega_k = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathring{F}_{k,n}$ est un ouvert dense de [0,1].

   Indication : appliquer le lemme de Baire avec $G_n = F_{k,n} \cap ([0,1]\setminus\Omega_k)$, en vérifiant que chaque G_n est un fermé d'intérieur vide, pour montrer que $[0,1]\setminus\Omega_k$ est d'intérieur vide.
4. Soit $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ Montrer que pour tout $x \in \Omega_k$, il existe $n \in \mathbb{N}$ et un voisinage V de x tel que, pour tout $y \in V$, on ait : $\|f_n(y) - f(y)\| \leqslant \frac{1}{k}$.
5. En déduire : $\forall x \in \Omega_k, \forall y \in V, \|f(x) - f(y)\| \leqslant \frac{2}{k} + \|f_n(x) - f_n(y)\|$.
6. En déduire que pour tout $x \in \Omega_k$, il existe un voisinage V de x tel que : $\forall y \in V$, $\|f(x) - f(y)\| \leqslant \frac{3}{k}$.
7. Soit $\Omega = \bigcap_{k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \Omega_k$. Justifier que f est continue sur Ω, et conclure.
8. Montrer que si f est une application dérivable, alors sa dérivée f' est continue sur une partie dense.

Exercice 71. (Densité des fonctions continues mais dérivables nulle part) On munit $E = \mathrm{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ de la norme infinie. On sait que cela en fait un espace complet. L'objectif est de montrer que les fonctions nulle part dérivables sur [0,1] forment une partie dense de E.

On pose : $\forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, U_{\varepsilon,n} = \left\{ f \in E \mid \forall x \in [0,1],\ \exists y \in [0,1],\ 0 < |y-x| < \varepsilon \text{ et } \left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| > n \right\}$

1. Montrer que si : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $f \in U_{\frac{1}{n},n}$, alors f est une fonction nulle part dérivable sur [0,1].
2. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{\varepsilon,n}$ est une partie ouverte de E.
3. On fixe $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ dans cette question. Soient $f \in E$ et $r > 0$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que l'application $g : x \mapsto f(x) + r\sin(Nx)$ soit dans $U_{\varepsilon,n}$ et vérifie : $\|f - g\|_\infty \leqslant r$. Conclure que $U_{\varepsilon,n}$ est dense dans E.
4. Montrer que $U = \bigcap_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} U_{\frac{1}{n},n}$ est un ouvert dense dans E. Conclure.