Exercices du chapitre VII (Suites et séries de fonctions) – Indications

L'icône « (🗎) » indique que les documents *Méthodes* donnent des conseils plus généraux.
La lettre « C » indique que la *Banque des Cent* contient ou contiendra des exercices analogues.

Suites de fonctions

Exercice 1. Majorer $\left|e^z - \left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right|$ indépendamment de z (appartenant à un compact donc majoré en module par une constante R). Utiliser la formule du binôme de Newton. Montrer que $\frac{1}{k!} \geqslant \frac{\binom{n}{k}}{n^k}$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, afin de simplifier la valeur absolue de la différence qui devrait apparaître dans vos calculs. Il devrait alors apparaître $e^R - \left(1+\frac{R}{n}\right)^n$ dont vous connaissez la limite.

Commentaires.

Exercice 2. Si J est un segment : montrer d'abord que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur J grâce au critère de Cauchy uniforme. Cependant on a la convergence uniquement de $(f_n(x_0))_{n\geqslant 0}$ dans les hypothèses : ramener $|f_p(x) - f_q(x)|$ à $|f_p(x_0) - f_q(x_0)|$ par un bon usage de l'inégalité triangulaire. Majorer « l'autre » terme obtenu avec l'inégalité des accroissements finis (c'est ici qu'intervient l'hypothèse que $(f'_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément : cela assure en particulier que $\|f'_p - f'_q\|$ est « petit »). Ainsi $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément, d'où le résultat.

Commentaires.


1884-1943

Exercice 3. (Théorème de Helly)

1. Noter que si x est un point de discontinuité de g, alors l'intervalle $\left]\lim\limits_{x^-} g, \lim\limits_{x^+} g\right[$ contient un nombre rationnel.
2. Soit $(r_n)_{n\geqslant 0}$ une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}\cap I$. En s'inspirant de la démonstration qu'un produit fini de compacts est compact, construire une extractrice φ telle que $(f_{\varphi(n)}(r_p))_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour tout $p \in \mathbb{N}$. Soit $f : \mathbb{Q}\cap I \to \mathbb{R}$ la fonction définie en $x = r_p$ comme la limite de la suite précédente. Par un passage à la limite, montrer que f est croissante sur $\mathbb{Q}\cap I$. Comment, alors, prolonger naturellement f sur I ? On peut penser à utiliser la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, mais il est préférable (pour montrer la croissance et ne pas avoir de problème de bonne définition) de définir $f(x)$, pour $x \notin \mathbb{Q}\cap I$, à l'aide d'une bonne borne supérieure.

   Il reste à montrer la convergence simple vers f. Pour la convergence ponctuelle en $x \in \mathbb{Q}\cap I$, c'est évident par construction de f. Dans le cas contraire, il y a une distinction de cas à faire selon que ce soit un point de continuité ou non de f : la continuité en un x assure qu'il existe des rationnels a et b proches de x, et tels que $f(a)$ et $f(b)$ soient proches de $f(x)$. Comme $f(a)$ et $f(b)$ sont limites de $(f_{\varphi(n)}(a))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f_{\varphi(n)}(b))_{n\in\mathbb{N}}$, et que la croissance de $f_{\varphi(n)}$ permet de se ramener à $f_{\varphi(n)}(x)$, on conclut que $f(x)$ est limite de $f_{\varphi(n)}(x)$ (bien quantifier tout cela).

   Si x est un point de discontinuité, utiliser le fait que l'ensemble des points de discontinuité soit au plus dénombrable pour imiter ce qui a été fait ci-dessus sur $\mathbb{Q}\cap I$, et en déduire l'existence d'une extractrice ψ telle que $(f_{\varphi\circ\psi(n)}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en tout point de discontinuité x. Cependant la limite en question n'est pas forcément $f(x)$: pas grave, il suffit de modifier la fonction f grâce à ces limites, et on conclut.

Commentaires.

Exercice 4.

1. Raisonner par récurrence et utiliser le théorème fondamental de l'analyse. Attention, la racine carrée n'est pas de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$ mais $\mathbb{R}_+^*$: il faut en tenir compte lors de la composition.
2. Le calcul explicite des premiers termes permet de conjecturer : $0 \leqslant f_{n+1}(x) - f_n(x) \leqslant \frac{x^{n+2}}{(n+2)!}$. Le montrer par récurrence. Vous aurez besoin de simplifier une différence de deux racines carrées : comment faire ? Utiliser ensuite le lien suite-série pour en déduire la convergence simple de $(f_n)_{n\geqslant 0}$.
3. Noter qu'il suffit de justifier qu'on peut passer à la limite dans l'égalité de l'énoncé. Fixer x. Utiliser le théorème de convergence dominée (par exemple). Obtenir l'hypothèse de domination grâce à la question précédente et au lien suite-série, qui permet de majorer $f - f_n$.

Commentaires.

Exercice 5.

1. Utiliser l'hypothèse de l'énoncé pour majorer $\|f_{n+1}(\vec{x}) - f_n(\vec{x})\|$ indépendamment de $\vec{x}$ par le terme général d'une série géométrique, et utiliser le lien suite-série. L'additivité de la fonction limite g découle facilement de l'hypothèse de l'énoncé avec de bons choix de $\vec{x}$ et $\vec{y}$. Il reste à montrer $g(\lambda\vec{x}) = \lambda g(\vec{x})$ pour tout $\vec{x}$ et tout λ. Un raisonnement classique permet de montrer que c'est vrai pour $\lambda \in \mathbb{Q}$. Conclure par densité.
2. Noter que $f = f_0$. Utiliser le lien suite-série pour donner une relation entre f et la limite de la question précédente. Montrer qu'il existe un unique couple $(g, \varphi) \in (F^E)^2$ tel que : $f = g + \varphi$, avec g une application linéaire continue et φ une fonction bornée.

Commentaires.

Modes de convergence

✓ **Exercice 6.** (🗎) Les items (a) et (b) sont sans mystère. Pour les (c) et (d) : l'étude de la convergence normale ne pose pas de difficulté parce qu'on sait calculer explicitement le maximum des fonctions f_n. Utiliser une comparaison série-intégrale pour estimer le reste. Lire si besoin *Méthodes*.

Commentaires.

Exercice 7. La convergence normale est facile à étudier. Pour la convergence uniforme : dans l'expression du reste, noter que pour tout $x \in \mathbb{R}$, seule une exponentielle (ou éventuellement deux) de la somme est « grande » (celle qui correspond à l'entier n le plus proche de x). La somme des autres exponentielles peut être majorée par un terme tendant vers 0 fois une sommes géométrique (ne pas hésiter à faire des majorations grossières). On en déduit une majoration du reste par une quantité convergeant vers 0 uniformément.

Commentaires.

Exercice 8. Pour la convergence normale : utiliser la monotonie du sinus et la stabilité de l'intervalle $[-1,1]$ pour montrer : $\|f_n\|_\infty = |f_{n-1}(1)|$ (pour $n \geqslant 2$). Obtenir un équivalent quand $n \to +\infty$ de $|f_n(1)|$ est standard : voir le cours du chapitre II où nous avions déjà traité cet exemple spécifique. En déduire qu'il n'y a pas convergence normale.

Utiliser la stabilité de $[-1,0]$ et $[0,1]$ par le sinus pour montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} f_n(x)$ est alternée. Montrer qu'elle vérifie le théorème spécial des séries alternées, et en déduire la convergence uniforme.

Commentaires.

☢ **Exercice 9. (Convergence uniforme des séries de Dirichlet)** S'inspirer de la démonstration du théorème d'Abel radial (chapitre VIII). La seule différence avec cette démonstration de cours est qu'il faut ici savoir majorer $\left|e^{-\lambda_n z} - e^{-\lambda_{n+1} z}\right|$ avec z complexe : y parvenir en écrivant $e^{-\lambda_n z} - e^{-\lambda_{n+1} z} = \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} z e^{-tz}\mathrm{d}t$ et en utilisant l'inégalité triangulaire. Au terme de vos calculs, vous devriez avoir une majoration du reste de la série de l'énoncé par $\left(2 + \frac{1}{\cos(\theta_0)}\right)$ fois un terme qui tend vers 0 indépendamment de z. Si ce n'est pas le cas, vous avez sans doute majoré l'intégrale ci-avant trop tôt.

Commentaires.

Étude de sommes de séries de fonctions (régularité, limites, équivalents, etc.)

Exercice 10.

1. Montrer que le théorème spécial des séries alternées est vérifié. Seule la décroissance de $\big(f(nh)\big)_{n\geqslant 0}$ nécessite un examen approfondi. Il est très visuel qu'une fonction convexe ne peut tendre vers 0 en l'infini lorsqu'il existe $a < b$ tels que $f(a) < f(b)$, parce que la courbe au-delà de b est « au-dessus » de $f(b)$. Formaliser cette idée géométrique grâce à un énoncé sur les fonctions convexes qui compare l'accroissement de f entre a, b et un troisième point (supérieur à b).
2. Remarquer que le théorème de la double limite ne s'applique pas. Se ramener à une série uniformément convergente en exprimant $f(0)$ comme une somme de la forme : $f(0) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \bigstar$ (comment fait-on pour écrire à peu près toute quantité naturellement comme une somme de série ?), de sorte que $S(h) - \frac{f(0)}{2}$ soit une somme d'une série alternée vérifiant le théorème spécial (la décroissance du terme général nécessite la convexité de f). En déduire une majoration du reste par une quantité convergeant vers 0 indépendamment de h.

On peut aussi se dispenser d'utiliser le théorème de la double limite, et majorer directement la somme donnant $S(h) - \frac{f(0)}{2}$ par son premier terme, et prendre la limite quand $h \to 0^+$.

Commentaires.

✓ **Exercice 11.** (🗎)

1. Étude sans mystère, le terme général de la somme étant clairement décroissant et donc majoré par sa valeur en début de l'intervalle (où vous faites l'étude de la convergence normale). Remarquer que si l'on est sur $\mathbb{R}_+^*$, la convergence normale n'est pas vérifiée du tout. Se placer sur des intervalles adaptés.
2. Utiliser une comparaison série-intégrale.

Commentaires.

✓ **Exercice 12.** (🗎)

1. C'est très classique. Voir *Méthodes* si besoin. C'est défini et continu sur $\mathbb{R}^*$.
2. Utiliser le théorème de la double limite pour montrer : $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = \frac{\pi^2}{6}$.

Commentaires.

✓ **Exercice 13.** (🗎)

1. C'est très classique. Voir *Méthodes* si besoin.
2. Effectuer une comparaison série-intégrale, puis calculer l'intégrale ainsi obtenue en développant en série le logarithme et en intégrant terme à terme (éventuellement faire un changement de variable avant l'intégration terme à terme pour faire apparaître le $\frac{1}{x}$).

Commentaires.

☢ **Exercice 14.**

1. Il est facile de montrer la convergence normale sur tout segment $[-a, a]$, avec a adéquat, de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left(x \mapsto \frac{x^n}{1-x^n}\right)$, puisque la monotonie de $(x^n)_{n\geqslant 0}$ est connue pour tout x. Se tourner vers *L'art de la majoration* si besoin.
2. Utiliser une comparaison série-intégrale. Pour en déduire un équivalent, vous aurez besoin de simplifier les intégrales en présence avec un changement de variable « éliminant » les x^t. Vous aurez alors des intégrales que vous savez calculer. Le reste de l'exercice n'est plus qu'un bête exercice de développement limité en 1 en recourant aux fonctions usuelles.

Commentaires.

Exercice 15.

1. Montrer la convergence normale sur des intervalles adaptés (s'éloigner de 0 à cause des facteurs $\frac{1}{x}$ de la somme qui sont non bornés, ou bien le mettre en facteur de la somme et montrer la convergence normale sur $\mathbb{R}_+$ de la somme ainsi mise en évidence). Majorer naïvement chaque terme du produit $\prod\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{x+k}$ par son maximum suffit. Vous pouvez alors conclure par comparaison à une série de référence.
2. Partir de $f(x+1)$ et faire un changement d'indice de sorte que le terme général du produit soit le même dans $f(x+1)$ et $f(x)$. Il y a cependant un terme « manquant » et un terme en trop pour reconnaître $f(x)$. Pas grave : à partir de là, une simple multiplication-division, et un changement d'indice de sommation, font apparaître $f(x)$.
3. La continuité et le théorème de la double limite permettent d'avoir la limite de $f(x+1)$ en 0 et $+\infty$ (reconnaître une somme usuelle dans le premier cas). En déduire la limite de $xf(x)$ quand $x \to 0$ et $x \to +\infty$ par la question 2.

Commentaires.

✓ **Exercice 16.** (🗎)

1. Pour quiconque ayant lu *L'art de la majoration*, le calcul de la norme infinie de $x \mapsto \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$ se fait de tête. On observe alors qu'il ne permet pas d'avoir la convergence normale sur $]-1,+\infty[$: comment y remédier ? Conclure alors que f est continue en tant limite uniforme de fonctions continues.
2. Immédiat en inspectant la monotonie du terme général. Il est inutile de dériver.
3. Faire apparaître un télescopage. L'équivalent de f en -1 est immédiat si le calcul précédent a été réussi, en utilisant la continuité de $x \mapsto f(x+1)$ en -1.
4. Effectuer une comparaison série-intégrale.

Commentaires.

★ Exercice 17. (🗎)

1. Utiliser le théorème spécial des séries alternées pour montrer la convergence uniforme du reste vers la fonction nulle. La convergence normale se contredit aisément en constatant qu'il n'y a pas convergence absolue de $\sum_{n\geqslant 0} f_n(x)$ en presque tout x.
2. D'abord justifier que le théorème de la double limite s'applique. Pour simplifier la somme qui en résulte : le document *Méthodes* du chapitre II, section *Calculer la somme d'une série convergente*, donne quelques pistes au paragraphe *Autres sommes*. Dans les grandes lignes, séparer les termes pairs et impairs (raisonner sur les sommes partielles dans un premier temps pour ne pas faire apparaître de termes divergents), reconnaître des produits d'entiers pairs ou d'entiers impairs. On sait simplifier, c'est classique (cf. l'exercice du chapitre I sur les intégrales de Wallis, ou *Méthodes* sur les suites numériques). Tout exprimer à l'aide de factorielles puis utiliser la formule de Stirling pour conclure.

Commentaires.

★ Exercice 18.

1. Utiliser le théorème de dérivation terme à terme, version classe C^k. Vous aurez un problème pour majorer indépendamment de x le premier terme de la somme (pour $n = 0$). On peut régler ce problème de deux manières : 1° en l'isolant et en appliquant le théorème de dérivation terme à terme sur $\mathbb{R}_+$ à la série commençant à $n = 1$; 2° en vérifiant les hypothèses sur des intervalles fermés adéquats.
2. Faire un changement d'indice dans la somme $S(x+1)$ de sorte à avoir $x+n$ au dénominateur des deux sommes en présence. Les regrouper et simplifier. Autre piste : partir de $xS(x)$ et ajouter-soustraire à x ce qu'il manque pour avoir une simplification avec le $x+n$ au dénominateur.
3. Immédiat si la question précédente a été réussie, étant donné que $S(x+1)$ a une limite finie en 0 par continuité. Vous devez savoir simplifier $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!}$: reconnaître une somme usuelle, quitte à faire un léger changement d'indice (que connaissez-vous comme somme de série avec une factorielle au dénominateur ?).
4. Isoler $S(x)$ dans l'identité trouvée à la seconde question. Réutiliser cette même identité avec $S(x+1)$, etc., jusqu'à avoir tous les termes demandés.
5. Développer en série l'exponentielle et intégrer terme à terme. Seul un des deux théorèmes d'intégration terme à terme est utilisable. Le calcul des intégrales en présence et la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \int_0^1 |\bigstar|$ ne posent pas d'obstacle majeur.

Commentaires.

☢ Exercice 19. Effectuer une comparaison série-intégrale. La subtilité est ici que l'application avec laquelle effectuer la comparaison série-intégrale n'est pas monotone sur $[1,+\infty[$ (faire son étude de variations). Vous devez donc scinder en deux la somme à étudier, pour chacun des intervalles où la fonction est monotone. Montrer que l'intégrale sur $[N+1,+\infty[$ tend vers 0 quand $x \to +\infty$ (utiliser le théorème des gendarmes ; avec votre étude de variation, majorer l'intégrande ne devrait pas poser problème). La limite quand $N \to +\infty$ de l'intégrale sur $[0,N]$ (ou $[0,N+1]$) est immédiat après un changement de variable convenable et donne le $\frac{1}{2}$ attendu.

Commentaires.

★ Exercice 20. (Un développement eulérien)

1. Montrer la sommabilité de la famille $\left(\frac{1}{(x-n\pi)^2}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ en vérifiant celle de $\left(\frac{1}{(x-n\pi)^2}\right)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ et $\left(\frac{1}{(x-n\pi)^2}\right)_{n\in(-\mathbb{N})}$ et en utilisant le théorème de sommation par paquets.

2. La π-périodicité découle d'un changement d'indice élémentaire. Pour le calcul de $f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x+\pi}{2}\right)$: remarquer que cela revient essentiellement à séparer les indices pairs et impairs dans l'expression de $f(x)$. Utiliser le théorème de sommation par paquets.
3. C'est de la trigonométrie élémentaire (noter que le calcul de $g\left(\frac{x}{2}\right)+g\left(\frac{x+\pi}{2}\right)$ vous permet de savoir ce que devait donner la question précédente, si vous ne l'aviez pas réussie).
4. Par périodicité, il suffit de vérifier le prolongement par continuité sur $[0,\pi[$. La continuité de g sur $]0,\pi[$ est évidente, celle de f s'obtient par convergence normale sur tout segment dans $]0,\pi[$ (noter que seuls les termes pour $n=0$ et $n=1$ posent problème en 0 et π : en les isolant, on peut même montrer la convergence normale sur $[0,\pi]$ directement). Seule la continuité en 0 pose *a priori* un problème : faire un développement asymptotique de g à la précision $\underset{x\to 0}{o}(1)$ (qu'importe tant que ce terme tend vers 0 en 0) et isoler le terme problématique dans f. Conclure qu'en calculant $f-g$ au voisinage de 0, le terme problématique s'élimine et a une limite finie en 0.
   Pour en déduire la valeur de f : il s'avère que $f=g$. On le montre en remarquant, grâce aux questions précédentes, que $F=f-g$ vérifie les mêmes équations fonctionnelles (utiliser un argument de continuité en les points de $\pi\mathbb{Z}$). Utiliser la relation entre $F(x)$ et $F\left(\frac{x}{2}\right)+F\left(\frac{x+\pi}{2}\right)$ en un point $x=c$ où $|F|$ atteint son maximum (pourquoi existe-t-il ?), pour en déduire : $F(c)=0$. Conclure.

> **Commentaires.**

Exercice 21. (Une bizarrerie) Montrer que f est définie sur [0,1] est immédiat en majorant $\lfloor nx\rfloor$ trivialement grâce à sa définition. On a même convergence normale sur [0,1], ce qui servira plus loin. La croissance est immédiate aussi, mais on veut la stricte croissance : noter que si $x<y$, alors $ny-nx\geqslant 1$ pour tout n suffisamment grand, ce qui assure que $\lfloor nx\rfloor<\lfloor ny\rfloor$ pour tout n suffisamment grand.

Pour la continuité à droite de tout point x : utiliser le théorème de la double limite sur des intervalles de la forme $[x,x+\varepsilon]$. Noter que la fonction partie entière est continue à droite de tout point.

La continuité en tout irrationnel est le dernier point épineux. Montrer que $x\mapsto\lfloor nx\rfloor$ est continue en tout irrationnel et pour tout n.

> **Commentaires.** On peut montrer au contraire qu'il y a discontinuité en tout rationnel, et minorer la taille du « saut » en chaque rationnel.
> On remarque dans cet exercice et le n° 22 que la continuité est sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ et la discontinuité sur $\mathbb{Q}$. Est-ce que le contraire est possible ? En fait il n'y a pas symétrie entre les rôles de ces deux parties denses, puisque $\mathbb{Q}$ est dénombrable au contraire de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. C'est ainsi que pour une fonction croissante, l'ensemble des points de discontinuité est au plus dénombrable (voir l'exercice 3). Un théorème dû à Froda généralise ce résultat : toute fonction de la variable réelle admet un nombre au plus dénombrable de points de discontinuité de *première espèce* (c'est-à-dire avec des limites finies à gauche et à droite).
> Plus généralement, l'ensemble des points de continuité d'une fonction de la variable réelle doit être une intersection dénombrable d'ouverts, ce qu'on appelle un ensemble G_δ, tandis que par passage au complémentaire l'ensemble des points de discontinuité doit être une réunion dénombrable de fermés, ce qu'on appelle un F_σ (classification de Borel). Or on peut montrer aisément que $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ est un G_δ, puisque : $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}=\bigcap\limits_{r\in\mathbb{Q}}(\mathbb{R}\setminus\{r\})$, tandis que $\mathbb{Q}$ ne l'est pas (en revanche c'est un F_σ : il suffit de l'écrire comme réunion de ses singletons). En effet, si : $\mathbb{Q}=\bigcap\limits_{n=0}^{+\infty}U_n$, où les U_n sont des ouverts, alors les U_n doivent être denses dans $\mathbb{R}$ puisqu'ils contiennent $\mathbb{Q}$. Ainsi $\mathbb{Q}$ serait une intersection dénombrable d'ouverts denses, et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ l'est aussi par ce qui précède, et donc $\emptyset=\mathbb{Q}\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ serait une intersection dénombrable d'ouverts denses. Par le lemme de Baire (exercice 66 du chapitre VI), $\emptyset$ serait dense dans $\mathbb{R}$: absurde.
> Ceci explique la nature des exemples rencontrés : il est impossible d'être continu sur $\mathbb{Q}$ et discontinu sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

Exercice 22. (Fonction dérivée discontinue sur une partie dense)

1. Calculer le taux d'accroissement en zéro avec le théorème des gendarmes. Pour la continuité de φ' en 0 : s'inspirer de la démonstration que le cosinus n'a pas de limite en l'infini.
2. L'existence de $n\mapsto r_n$ vient de la dénombrabilité de $\mathbb{Q}$. Montrer la convergence normale de $\sum\limits_{n\geqslant 1}f_n'$ (où f_n est l'application $x\mapsto\frac{\varphi(x-r_n)}{n^2}$) et utiliser l'exercice 2 pour en déduire que f est dérivable sur [0,1], de dérivée $x\mapsto\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\varphi'(x-r_n)}{n^2}$ (l'énoncé originel de l'exercice 2 ne démontre pas ce point : le faire). Utiliser ensuite le fait que $x\mapsto\varphi'(x-r_n)$ soit discontinue uniquement en r_n pour montrer que f' est continue en tout irrationnel (rappelons la convergence normale). En un élément de $\mathbb{Q}\cap[0,1]$: le noter r_N, et écrire f' comme combinaison linéaire de $x\mapsto\varphi'(x-r_N)$ et d'une fonction continue en r_N.

Commentaires. On remarque dans cet exercice et le nº 21 que la continuité est sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et la discontinuité sur $\mathbb{Q}$. Est-ce que le contraire est possible ? En fait il n'y a pas symétrie entre les rôles de ces deux parties denses, puisque $\mathbb{Q}$ est dénombrable au contraire de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. C'est ainsi que pour une fonction croissante, l'ensemble des points de discontinuité est au plus dénombrable (voir l'exercice 3). Un théorème dû à Froda généralise ce résultat : toute fonction de la variable réelle admet un nombre au plus dénombrable de points de discontinuité de *première espèce* (c'est-à-dire avec des limites finies à gauche et à droite).
Plus généralement, l'ensemble des points de continuité d'une fonction de la variable réelle doit être une intersection dénombrable d'ouverts, ce qu'on appelle un ensemble G_δ, tandis que par passage au complémentaire l'ensemble des points de discontinuité doit être une réunion dénombrable de fermés, ce qu'on appelle un F_σ (classification de Borel). Or on peut montrer aisément que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est un G_δ, puisque : $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcap\limits_{r \in \mathbb{Q}} (\mathbb{R} \setminus \{r\})$, tandis que $\mathbb{Q}$ ne l'est pas (en revanche c'est un F_σ : il suffit de l'écrire comme réunion de ses singletons). En effet, si : $\mathbb{Q} = \bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} U_n$, où les U_n sont des ouverts, alors les U_n doivent être denses dans $\mathbb{R}$ puisqu'ils contiennent $\mathbb{Q}$. Ainsi $\mathbb{Q}$ serait une intersection dénombrable d'ouverts denses, et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ l'est aussi par ce qui précède, et donc $\emptyset = \mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ serait une intersection dénombrable d'ouverts denses. Par le lemme de Baire (exercice 66 du chapitre VI), $\emptyset$ serait dense dans $\mathbb{R}$: absurde.
Ceci explique la nature des exemples rencontrés : il est impossible d'être continu sur $\mathbb{Q}$ et discontinu sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. On voit aussi que la dénombrabilité de $\mathbb{Q}$ est cruciale dans le raisonnement ci-dessus : c'est pourquoi toutes les constructions explicites de fonctions discontinues sur $\mathbb{Q}$ font apparaître plus ou moins explicitement la dénombrabilité de $\mathbb{Q}$ (souvent en considérant une fonction de la forme $x \mapsto \sum\limits_{r \in \mathbb{Q}} f_n(x-r)$ où f_n est « bien choisie »), comme c'est le cas ici.

Exercice 23.

1. Les fonctions φ et φ' étant clairement bornées sur $\mathbb{R}$ par périodicité, il n'est pas difficile de majorer φ_n et φ'_n uniformément par des termes généraux de séries convergentes. Le théorème de dérivation terme à terme s'applique alors. La seule subtilité est la classe C^1 de φ sur $\mathbb{R}$ (pas seulement sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$) : étudier la limite à gauche et à droite de φ' en $\frac{1}{2}$ grâce à sa périodicité, et utiliser le théorème de la limite de la dérivée.
2. Déterminer les zéros de φ. En déduire que si x est rationnel, alors $\varphi_n(x) = 0$ pour tout n suffisamment grand, de sorte que $f(x)$ soit une somme *à support fini* de rationnels. Raisonnement analogue pour $f'(x)$, en notant que $\varphi'(n!x) = 1$ pour tout n suffisamment grand. Vous aurez besoin du fait que : 1° la somme d'un rationnel et d'un irrationnel soit un irrationnel, 2° le nombre e soit irrationnel (cf. l'exercice 35 du chapitre II).

Commentaires.

☢ **Exercice 24. (Un monstre)**

1. Vérifications sans mystère, la convergence normale sur $\mathbb{R}$ étant immédiate en majorant le cosinus par 1.
2. Montrer que le taux d'accroissement de f en x_0 n'a pas de limite en x_0, en suivant l'indication de l'énoncé : si f est dérivable en x_0, alors $\frac{f\left(\frac{\pi p_k}{6^k}\right) - f\left(\frac{\pi(p_k+1)}{6^k}\right)}{\pi/6^k}$ doit tendre vers 0 quand $k \to +\infty$ (pourquoi ?). Montrer que ce n'est pas le cas en écrivant $f\left(\frac{\pi p_k}{6^k}\right) - f\left(\frac{\pi(p_k+1)}{6^k}\right)$ sous forme de somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \bigstar$, puis en isolant les indices n qui donnent un cosinus dont l'argument est un multiple de 2π (noter que p_k est un entier). Pour les indices n restants : minorer la différence de cosinus (c'est une « différence petite » au sens de *L'art de la majoration* : comment estimer une telle quantité ?). Conclure que $\frac{f\left(\frac{\pi p_k}{6^k}\right) - f\left(\frac{\pi(p_k+1)}{6^k}\right)}{\pi/6^k}$ est supérieur à une quantité qui tend vers $+\infty$ quand $k \to +\infty$.

Commentaires.

Exercice 25. (Séries de Dirichlet) Supposer qu'il existe des entiers n tels que $a_n \neq b_n$, et considérer le plus petit entier n_0 d'entre eux. On a donc : $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s} = \sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} \frac{b_n}{n^s}$. Utiliser le théorème de la double limite convenablement pour « éliminer » tous les termes de chaque membre de l'égalité, sauf celui correspondant à $n = n_0$. Conclure.

Commentaires.

Intégration et dérivation terme à terme

Exercice 26. Notons que si $g = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ existe et est dérivable terme à terme, par construction de la suite $(f_n)_{n \geqslant 0}$ on a une relation extrêmement simple entre g' et g, ce qui permettrait d'expliciter g.

Encore faut-il que la dérivation terme à terme soit licite : montrer la convergence uniforme de $\sum\limits_{n \geqslant 1} f'_n$ sur $[a, b]$. Cela nécessite de savoir majorer $|f'_n(x)|$ pour tout x (ou $|f_n(x)|$, cela revient au même au vu de la construction de la suite). Introduire $M = \|f_0\|_\infty$, et majorer $|f_1(x)|$, $|f_2(x)|$ et $|f_3(x)|$ en fonction de M, x et a. Vous devriez pouvoir formuler une conjecturer raisonnable (notez bien que je vous fais aller jusqu'à f_3 : la majoration de f_2 risque en effet de vous faire conjecturer des bêtises), à démontrer par récurrence. Vous en déduisez alors aisément un majorant de $\|f_n'\|_\infty$ et le reste s'ensuit.

Commentaires.

✓ **Exercice 27. (C)** Développer en série un des deux logarithmes (peu importe) lequel et intégrer terme à terme. Seul un des deux théorèmes d'intégration terme à terme s'applique avec succès. Il ne reste plus qu'à simplifier $\int_0^1 t^n \ln(t)\mathrm{d}t$ (ou une autre intégrale qui y ressemble) : c'est très classique.

Commentaires.

✓ **Exercice 28. (C)** Éliminer le quotient en faisant apparaître $\frac{1}{1-u}$ avec $|u| < 1$, et en développant en série. Intégrer terme à terme (il n'y a aucune ambiguïté sur le théorème à utiliser). Vous savez calculer des intégrales dont l'intégrande est de la forme « polynôme en t fois exponentielle », ce qui conclut. Voir *Méthodes* si besoin.

Commentaires.

✓ **Exercice 29. (C)** Même indication que pour l'exercice 28.

Commentaires.

★ **Exercice 30. (C)** Écrire $x^x = \exp(x\ln(x))$, et développer en série l'exponentielle. Intégrer terme à terme. L'intégrabilité des f_n découlera de la continuité sur $]0,1]$ (et même sur $[0,1]$ pour $n \geqslant 1$) et de la méthode « $x^\alpha f(x)$ » en 0. On est dans une situation très classique : revoir le cours, les exercices et le document *Méthodes* du chapitre I si vous n'avez plus les idées claires à ce sujet.

Vous aurez besoin de calculer une intégrale de la forme « fonction puissance fois puissance de logarithme ». On y parvient après plusieurs intégrations par parties. Il est éventuellement plus sage de « décorréler » les deux exposants (qui sont égaux dans l'intégrale à calculer), afin de mieux poser la récurrence que vous souhaitez démontrer.

La convergence de la série apparaissant dans la vérification de vos hypothèses se fait aisément, par exemple, avec la règle de D'Alembert, ou par comparaison à la série de Riemann d'exposant 2.

Commentaires.

Exercice 31. L'intégrale existe grâce à la majoration de l'intégrande par son premier terme (pourquoi est-ce vrai ?).

C'est évidemment un exercice d'intégration terme à terme. Remarquer cependant que $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} e^{-a_n x}\mathrm{d}x$ peut diverger (pourquoi ?), et que les sommes partielles ne se simplifient pas commodément *a priori* pour permettre l'application du théorème de convergence dominée. Il reste à montrer l'interversion à la main. Pour cela, vérifier qu'il suffit de montrer : $\lim_{N\to+\infty} \int_0^{+\infty} \sum_{n=N+1}^{+\infty} (-1)^n e^{-a_n x}\mathrm{d}x = 0$. Cela tombe bien : on a le reste d'une série alternée. Montrer qu'elle vérifie les hypothèses du théorème spécial des séries alternées. En déduire une majoration du reste suffisante pour conclure.

Commentaires.

Exercice 32. (Le théorème des résidus pour les enfants)

1. Faire apparaître $\frac{1}{1-u}$ avec $|u| < 1$. La façon de le faire dépendra selon que $|z| < r$ ou $|z| > r$. Ensuite développer en série et intégrer terme à terme, la convergence normale (à démontrer !) assurant que c'est licite.
2. Noter que $\frac{R'}{R}$ est combinaison linéaire des $\frac{1}{X-z_i}$ et $\frac{1}{X-\omega_j}$. Utiliser la question précédente.

Commentaires. Le vrai théorème des résidus nous dit que si f est un quotient de deux fonctions développables en série entière (pour simplifier) et C un lacet dans $\mathbb{C}$ (on parle de lacet pour un chemin dont les deux extrémités sont égales), alors : $\frac{1}{2i\pi}\int_C f(z)\mathrm{d}z = \sum_{\omega} \mathrm{Res}_\omega(f)$.

Expliquons le sens de chaque quantité dans cette égalité : pour intégrer une fonction f sur C, on introduit un chemin $\gamma : [a,b] \to C$ bijectif « tournant dans le sens trigonométrique » et de classe C^1 (s'il n'est pas de classe C^1 on donne un sens à l'intégrale *via* approximation). On a alors : $\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t$. C'est comme si l'on avait fait un changement de variable. Si l'on prend $C = \mathrm{S}(0,r)$ et $\gamma : [0,2\pi] \to C$ défini par $\theta \mapsto e^{i\theta}$, alors on obtient l'intégrale de l'énoncé.

Expliquons à présent l'indexation de la somme et le sens de $\mathrm{Res}_\omega(f)$. La somme est indexée par les « pôles » de f inclus dans l'intérieur de la surface délimitée par C ; dans le cadre de l'exercice, ce sont donc les pôles appartenant au disque ouvert de centre l'origine et de rayon r.

Pour définir un pôle de f et son ordre de multiplicité : on dit que ω est un pôle d'ordre de multiplicité k si l'on peut écrire $f(z) = (z-\omega)^{-k}g(z)$ avec g développable en série entière au voisinage de ω, et k maximal pour cette propriété. C'est un pôle simple si $k = 1$. Définissons alors $\mathrm{Res}_\omega(f)$, le *résidu* de f en ω, uniquement dans le cas des pôles simples pour simplifier : le résidu de f en un pôle simple ω est la limite quand $z \to \omega$ de $(z-\omega)f(z)$. Avec les notations ci-dessus, c'est donc $g(\omega)$.

D'après ce théorème, appliqué à une fraction rationnelle de la forme $\frac{P'}{P}$ avec P polynôme, on sait que l'on a : $\frac{P'}{P} = \sum \frac{m_i}{X-z_i} - \sum \frac{n_j}{X-\omega_j}$ (j'utilise les notations de l'exercice). Il est facile de calculer la limite en z_i de $\frac{(X-z_i)P'}{P}$: on obtient m_i, ce qui donne la valeur du résidu en z_i. Raisonnement analogue en n_j. Par le théorème des résidus, on a donc : $\frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{P'(z)}{P(z)}\mathrm{d}z = \sum m_i - \sum n_j$. On retrouve le résultat de l'exercice.

Le théorème des résidus est un puissant outil de calcul des intégrales. À peu près toutes les intégrales croisées cette année dont le calcul nous valut de nombreux efforts (intégrale de Gauß $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$, intégrale de Dirichlet $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$) se calculent très rapidement *via* ce théorème. L'idée est à chaque fois d'appliquer le théorème des résidus avec les fonctions ci-dessus, sur un contour adapté dont un bord tend vers l'intégrale désirée (cette phrase présuppose le choix d'un paramètre : en effet, on n'intègre pas sur un lacet « non borné », cela ne voudrait rien dire ; on intègre d'abord sur un rectangle, ou un demi-cercle, etc., de longueur r, puis on prend $r \to +\infty$), et les autres bords tendent soit vers 0, soit vers une quantité qui contribue à la valeur qu'on cherche à obtenir.

★ Exercice 33. (Le logarithme complexe)

1. Utiliser la règle de D'Alembert.
2. Calculer Φ'. Il est avisé de d'abord justifier que $t \mapsto L(tz)$ est dérivable (et de calculer sa dérivée). On y parvient avec le théorème de dérivation terme à terme, l'hypothèse de convergence uniforme découlant de la convergence normale de la série géométrique sur les segments de $]-1,1[$.

   On trouve alors la valeur de Φ par évaluation en un point où $t \mapsto L(tz)$ est trivial à calculer. Conclure en exprimant $\exp(L(z))$ en fonction de Φ.
3. Il y a unicité de la forme exponentielle de tout nombre complexe non nul (c'est-à-dire de son module et de son argument modulo 2π). L'utiliser avec l'égalité de la question précédente, et utiliser le fait que pour tout $\omega \in \mathbb{C}$, la forme exponentielle de e^ω s'exprime à l'aide des parties réelle et imaginaire de ω.
4. Immédiat avec la question précédente, en faisant un bon choix de z.

Commentaires.

★ Exercice 34. (Le logarithme complexe : étude sur le bord de $\mathrm{B}_f(0,1)$)

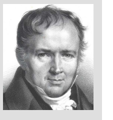
1. Montrer la convergence uniforme sur $[0,1]$. Le problème est bien entendu près de 1, où il n'y a pas convergence absolue de la série : on ne peut donc pas montrer la convergence normale et il faut donc montrer que la suite des restes converge uniformément vers la fonction nulle. Or la série n'est pas alternée et une comparaison série-intégrale est impossible. Or nous avons introduit une technique au chapitre II pour les convergences de séries capricieuses, et nous l'avions utilisée justement pour montrer la convergence d'une série très proche : l'adapter à la situation.

   Si vous procédez exactement comme dans l'exemple indiqué du chapitre II, *mutatis mutandis* : l'approche marchera à condition de savoir minorer efficacement $|z-1|$ pour $z = xe^{i\theta}$, quand x parcourt $[0,1]$. Un peu de sens géométrique vous indique pour quelle valeur de x cette distance est minimale.

   Le plus efficace n'est cependant pas de copier-coller l'approche intégralement : employer cette technique préférablement de sorte à pouvoir écrire le reste de la série sous la forme $(z-1) \times \bigstar$: comme $|z-1|$ est « petit » quand on se rapproche de 1, cela joue en votre faveur.

   Si vous séchez : anticiper en recourant au théorème d'Abel radial (chapitre VIII).
2. Utiliser les expressions des sommes calculées à la fin de l'exercice 33, et passer à la limite quand $x \to 1$. Simplifier les quantités obtenues avec de la trigonométrie élémentaire.

Commentaires.


1781-1840

★ Exercice 35. (Intégrale de Poisson)

1. Justifier : $\ln\left(x^2-2x\cos(\theta)+1\right)=\ln\left(\left|1-xe^{i\theta}\right|\right)=-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n\cos(n\theta)}{n}$, grâce à l'exercice 33 (ou bien le démontrer directement en dérivant cette somme par rapport à la variable de votre choix, l'une d'elles étant plus avisée pour avoir la convergence normale), et intégrer terme à terme. La convergence normale sur $[0,2\pi]$ se vérifie aisément.
2. Se ramener au cas précédent en notant que si $|x|>1$, alors $\left|\frac{1}{x}\right|<1$.

> **Commentaires.** Cet exercice montre l'intérêt d'avoir une conscience claire de l'existence d'un logarithme complexe (dont on sait borner l'usage, surtout en classes préparatoires !) : reconnaître l'intégrande comme le module (ou la partie réelle) d'un logarithme complexe rend triviale l'étude. On y illustre aussi l'efficacité de la stratégie d'intégration terme à terme : comme vous la découvrez tardivement dans votre scolarité, vous pouvez la sous-estimer alors que nos glorieux Anciens en usaient et abusaient, même avec des fonctions usuelles. C'est le point de vue le plus naturel en bien des situations.
> En montrant la continuité en 1 de l'intégrale à paramètre de l'exercice (un peu technique à cause de la monotonie de $x\mapsto|\ln(x)|$), on parvient à déterminer la valeur de l'intégrale d'Euler-Dirichlet : $\int_0^{2\pi}\ln\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\mathrm{d}\theta=-2\pi\ln(2)$. On peut toutefois l'obtenir de manière plus directe avec un peu de trigonométrie basique : voir l'exercice 13 du chapitre I.
> En revanche cette intégrale à paramètre est clairement non dérivable en 1, ce qui fournit un contre-exemple à la dérivation sous le signe intégrale lorsque l'hypothèse de domination n'est pas vérifiée.

Exercice 36. (Une autre démonstration du théorème de Cayley-Hamilton)

1. Le vérifier sur les polynômes de la base canonique et conclure par linéarité.
2. C'est classique (voir les exemples à la fin du cours de topologie). Se ramener à l'étude d'une série géométrique. La tâche est facilitée si l'on observe que $p\|\cdot\|_\infty$ est une norme d'algèbre (se démontre par une majoration explicite des coefficients de $\|MN\|_\infty$ pour toutes matrices M et N : il n'y a pas d'idée à avoir). Le calcul de la somme se fait exactement comme dans le cas des séries géométriques complexes.
3. Développer en série l'intégrande grâce à la question précédente et intégrer terme à terme, chose permise par la convergence normale démontrée à la question précédente.
4. L'égalité de la question précédente implique une relation intégrale entre $P(A)$ et $P(re^{i\theta})$ pour tout P. L'appliquer à $P=\chi_A$, et utiliser la relation entre la comatrice et l'inverse d'une matrice pour obtenir l'égalité de l'énoncé. Conclure avec la première question.

> **Commentaires.**

Exercice 37. (La fonction Digamma en les nombres rationnels)

1. Remarquer : $\psi=(\ln\circ\Gamma)'$. Or vous connaissez une relation entre $\Gamma(x+1)$ et $\Gamma(x)$. Utiliser ces deux observations pour en déduire une relation entre $\psi(x+1)$ et $\psi(x)$. Vous pouvez aussi utiliser la première question de l'exercice 45 (si vous l'avez traitée) : faire apparaître un télescopage.
   Cette relation entre $\psi(x+1)$ et $\psi(x)$ permet plus généralement d'exprimer $\psi(r)$ en fonction de $\psi(r-\lfloor r\rfloor)$.
2. Montrer la convergence normale sur $[0,1]$.
3. Utiliser la première question de l'exercice 45 du chapitre II avec $x=\frac{p}{q}$. Faire un changement d'indice. C'est la continuité de S en 1 qui permet de reconnaître $\lim\limits_{x\to1}S(x)$ dans la somme qui y figure.
4. D'abord considérer $\sum\limits_{k=0}^{N}\left(\frac{1}{1+k}-\frac{q}{p+qk}\right)$ (somme partielle de la somme donnant $S(1)$). Séparer la somme en deux.
   On sait faire un développement asymptotique du premier terme grâce au logarithme et à la constante d'Euler. Pour le second terme : la réécrire comme une somme indexée par $\ell\equiv p \bmod k$, et utiliser une formule d'orthogonalité (vue dans l'exercice 12 du chapitre II mais aussi largement commentée dans *Méthodes* du même chapitre, *Sommes indexées par une classe de congruence*) pour se ramener aux sommes partielles de la série $\sum\limits_{n\geqslant1}\frac{\omega^{\ell n}}{n}$.
   Isoler le terme correspondant à $\ell=0$ pour le simplifier par la même méthode que la première somme ci-avant. Conclure en prenant $N\to+\infty$.
5. Utiliser l'exercice 34 pour simplifier les sommes de la question précédente. Noter que le résultat doit donner un nombre réel, ce qui évite d'avoir à considérer les parties réelle et imaginaire et tous les termes en présence.

> **Commentaires.**

Exercice 38. (Application de l'exercice 37) C'est une application directe des dernières questions de l'exercice 45 et de l'exercice 37.

> **Commentaires.**