Exercices du chapitre VII (Suites et séries de fonctions)

✓ : exercice d'application des méthodes, ★ : exercice classique, ☢ : exercice difficile.

Suites de fonctions

Exercice 1. Montrer que la suite de fonctions $\left(f_n : \begin{cases} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \left(1+\frac{z}{n}\right)^n \end{cases}\right)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$ vers la fonction exponentielle.

☢ **Exercice 2.** Soit $(f_n : I \to \mathbb{C})_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions dérivables sur un intervalle I. On suppose qu'il existe $x_0 \in I$ tel que la suite $(f_n(x_0))_{n\geqslant 0}$ converge, et que la suite de fonctions $(f_n')_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur I vers une fonction g. Montrer que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I, et que sa limite f vérifie : $f' = g$.

1884-1943

Exercice 3. (Théorème de Helly) Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si une application $g : I \to \mathbb{R}$ est croissante sur I, l'ensemble de ses points de discontinuité est au plus dénombrable.
2. ☢ Soit $(f_n : I \to \mathbb{R})_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions croissantes. On suppose que pour tout $x \in I$, la suite $(f_n(x))_{n\geqslant 0}$ est bornée. Démontrer qu'il existe une sous-suite $\left(f_{\varphi(n)}\right)_{n\geqslant 0}$ et une fonction croissante $f : I \to \mathbb{R}$ telles que $\left(f_{\varphi(n)}\right)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur I vers f.
   On utilisera la dénombrabilité de $\mathbb{Q}$ et on s'inspirera de la démonstration qu'un produit fini de compacts est compact.

Exercice 4. On définit une suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ sur $\mathbb{R}_+$ par récurrence, en posant : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_0(x) = 0$, et : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_{n+1}(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{t^2 + (f_n(t))^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et calculer f_1.
2. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers une fonction continue f. *On majorera $f_n(x) - f_{n-1}(x)$ par le terme général d'une série convergente.*
3. Montrer que f vérifie l'équation différentielle : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f'(x) = \sqrt{x^2 + (f(x))^2}$.

Exercice 5. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et $(F, \|\cdot\|_F)$ un espace de Banach. On suppose que $f : E \to F$ est une fonction continue telle que : $\exists M > 0,\ \forall(\vec{x}, \vec{y}) \in E^2,\ \|f(\vec{x}+\vec{y}) - f(\vec{x}) - f(\vec{y})\|_F \leqslant M$.

1. On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \vec{x} \in E,\ f_n(\vec{x}) = \dfrac{1}{2^n} f(2^n \vec{x})$. Montrer que la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur E vers une application linéaire continue.
2. Montrer qu'il existe un unique couple $(g, \varphi) \in (F^E)^2$ tel que : $f = g + \varphi$, avec g une application linéaire continue et φ une fonction bornée.

Modes de convergence

✓ **Exercice 6.** Étudier la convergence simple, uniforme et normale de :

$$\text{(a)}\ \sum_{n\geqslant 1}\left(f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{n^2+x^2} \end{cases}\right), \qquad \text{(b)}\ \sum_{n\geqslant 1}\left(f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{(-1)^n}{n+x^2} \end{cases}\right),$$

$$\text{(c)}\ \sum_{n\geqslant 1}\left(f_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{\sqrt{n}(1+nx^2)} \end{cases}\right) \qquad \text{(d)}\ \sum_{n\geqslant 1}\left(f_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{n^2+x^2} \end{cases}\right).$$

Exercice 7. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{e^{-(x-n)^2}}{n} \end{cases}\right)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ mais pas normalement.

Exercice 8. Pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $f_n(x) = (-1)^n \sin^n(x)$, où la notation $\sin^n$ désigne la composition du sinus avec lui-même n fois. Étudier la convergence uniforme et normale de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$.

☢ **Exercice 9. (Convergence uniforme des séries de Dirichlet)** Soient $(a_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $(\lambda_n)_{n\geqslant 0}$ une suite strictement croissante de réels tendant vers $+\infty$. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Montrer que si la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n e^{-\lambda_n z_0}$ converge, alors pour tout $\theta_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ la série $\sum_{n\geqslant 0} \left(z \mapsto a_n e^{-\lambda_n z}\right)$ converge uniformément sur l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid \arg(z - z_0) \leqslant \theta_0\}$.

Étude de sommes de séries de fonctions (régularité, limites, équivalents, etc.)

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une application continue et convexe sur $\mathbb{R}_+$, telle que : $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

1. Soit $h \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n f(nh)$ converge. On note $S(h)$ sa somme.
2. Montrer : $\lim\limits_{h\to 0^+} S(h) = \dfrac{f(0)}{2}$.

✓ **Exercice 11.** Soit f la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$.

1. Étudier la continuité et la monotonie de f sur son domaine de définition.
2. Calculer la limite de f aux extrémités de l'intervalle de définition et donner un équivalent asymptotique simple.

✓ **Exercice 12.** Soit S la fonction $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n + n^2 x}$.

1. Donner le domaine de définition et de continuité de S.
2. Donner un équivalent en $+\infty$ de S. On admet : $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$ (*résultat établi dans l'exercice 16 de la feuille d'exercices du chapitre* II).

✓ **Exercice 13.** Soit f la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1 + e^{-nx})$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner sa limite en $+\infty$.
2. Déterminer $a > 0$ tel que : $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{a}{x}$. On admet : $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$ (*résultat établi dans l'exercice 16 de la feuille d'exercices du chapitre* II).

☢ **Exercice 14.**

1. Donner le domaine de définition, de continuité et de dérivabilité de $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{1 - x^n}$.
2. Donner un équivalent en 1^- de f.

Exercice 15.

1. Montrer que $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \prod_{k=0}^{n} \dfrac{1}{x + k}$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Donner une relation entre $f(x)$ et $f(x + 1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
3. Donner un équivalent asymptotique simple de f en 0 et en $+\infty$.

✓ **Exercice 16.**

1. Montrer que l'application $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n + x}\right)$ est définie et continue sur $]-1, +\infty[$.
2. Étudier la monotonie de f.
3. Pour tout $x \in]-1, +\infty[$, simplifier $f(x + 1) - f(x)$, et en déduire un équivalent de f en -1.
4. Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand $x \to +\infty$.

★ **Exercice 17.**

1. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ de terme général $f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (-1)^n \ln\left(1+\dfrac{x^2}{n(1+x^2)}\right) \end{cases}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. La convergence est-elle normale ?
2. Soit f la somme de cette série. Calculer sa limite en $+\infty$.

★ **Exercice 18.** Pour tout $x>0$, on pose : $S(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

1. Justifier que S est définie et de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$.
2. Pour tout $x>0$, simplifier l'expression $xS(x)-S(x+1)$.
3. Montrer : $S(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x}$.
4. Déterminer les réels a, b et c tels que : $S(x)=a+\dfrac{b}{x}+\dfrac{c}{x^2}+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.
5. Montrer : $\forall x>0,\ S(x)=\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$.

☢ **Exercice 19.** Montrer : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{nx}{(n^2+x)^2}=\frac{1}{2}$.

★ **Exercice 20. (Un développement eulérien)** Pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$, on pose : $f(x)=\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(x-n\pi)^2}$.

1. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$.
2. Montrer que f est π-périodique et exprimer $f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x+\pi}{2}\right)$ en fonction de $f(x)$.
3. Montrer que $g : x\mapsto \dfrac{1}{(\sin(x))^2}$ vérifie ces mêmes propriétés.
4. Montrer que $f-g$ peut être prolongée en une fonction continue sur $\mathbb{R}$, et en déduire la valeur de f.

Exercice 21. (Une bizarrerie) Soit f l'application $x\mapsto\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\lfloor nx\rfloor}{n^3}$. Montrer que f est définie sur [0,1], continue en tout irrationnel, continue à droite en tout point et strictement croissante.

Exercice 22. (Fonction dérivée discontinue sur une partie dense) Vous aurez besoin de l'exercice 2.

1. Montrer que l'application $\varphi : [-1{,}1]\to\mathbb{R}$ définie par : $\forall x\in[-1{,}0[\cup]0{,}1]$, $\varphi(x)=x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, et : $\varphi(0)=0$, est dérivable sur $[-1{,}1]$ et que φ' est discontinue uniquement en 0.
2. On note $n\mapsto r_n$ une bijection de $\mathbb{N}\setminus\{0\}$ dans $\mathbb{Q}\cap[0{,}1]$ (pourquoi en existe-t-il ?). Montrer que l'application $f : x\mapsto\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\varphi(x-r_n)}{n^2}$ est dérivable sur [0,1], et que f' est continue en tout point irrationnel, discontinue en tout point rationnel.

Exercice 23. Soit $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une application 1-périodique définie sur $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ par : $\forall t\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$, $\varphi(t)=t(1-4t^2)$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $t\in\mathbb{R}$, on pose : $\varphi_n(t)=\dfrac{\varphi(n!t)}{(n!)^2}$.

1. Montrer la convergence normale sur $\mathbb{R}$ de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\varphi_n$, et que sa somme f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer : $f(\mathbb{Q})\subseteq\mathbb{Q}$, et : $f'(\mathbb{Q})\subseteq\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

☢ **Exercice 24. (Un monstre)**

1. Montrer que la fonction $f : x\mapsto\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(6^n x)}{2^n}$ est continue sur $\mathbb{R}$, paire et 2π-périodique.
2. Montrer que f n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$. *Fixer $x\in\mathbb{R}$, et pour tout k considérer $p_k=\left\lfloor\frac{6^k x}{\pi}\right\rfloor$ et le taux d'accroissement* $\dfrac{f\left(\frac{\pi p_k}{6^k}\right)-f\left(\frac{\pi(p_k+1)}{6^k}\right)}{\pi/6^k}$.

Exercice 25. (Séries de Dirichlet) Soient $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ deux suites complexes. On suppose qu'il existe $\sigma \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n^s}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{b_n}{n^s}$ convergent absolument pour tout $s > \sigma$. Montrer que si : $\forall s > \sigma$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n^s}$, alors : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $a_n = b_n$.

Intégration et dérivation terme à terme

Exercice 26. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et $f_0 : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue. On définit une suite de fonctions par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [a,b]$, $f_{n+1}(x) = \displaystyle\int_a^x f_n(t)\mathrm{d}t$. Étudier et évaluer la fonction $g = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.

✓ **Exercice 27.** Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\ln(1-t)\mathrm{d}t$. On admet : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (*résultat établi dans l'exercice 16 de la feuille d'exercices du chapitre* II).

✓ **Exercice 28.** Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{sh}(t)}\mathrm{d}t$.

✓ **Exercice 29.** Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Montrer : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-ax}}{1-e^{-bx}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a+bn)^2}$.

★ **Exercice 30.** Montrer : $\displaystyle\int_0^1 x^x \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$.

Exercice 31. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels strictement positifs, croissante, qui tend vers $+\infty$. Montrer : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-a_n x}\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a_n}$.

Exercice 32. (Le théorème des résidus pour les enfants)

1. Soit $(r,z) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{C}$. On suppose : $|z| \neq r$. Calculer : $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{re^{i\theta}}{re^{i\theta}-z}\mathrm{d}\theta$.
2. Soit $R \in \mathbb{C}(X)$ une fraction rationnelle non constante, dont on note $z_1,\dots,z_k$ les racines et $\omega_1,\dots,\omega_\ell$ les pôles. Pour tout $i \in [\![1,k]\!]$ (resp. pour tout $j \in [\![1,\ell]\!]$), notons m_i (resp. n_j) l'ordre de multiplicité de z_i comme racine de R (resp. de ω_j comme pôle de R). Soit r un réel strictement positif différent de $|z_i|$ et $|\omega_j|$ pour tout $(i,j) \in [\![1,k]\!] \times [\![1,\ell]\!]$. Montrer :
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} re^{i\theta}\frac{R'(re^{i\theta})}{R(re^{i\theta})}\mathrm{d}\theta = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant k\\ |z_i|<r}} m_i - \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant \ell\\ |\omega_j|<r}} n_j.$$

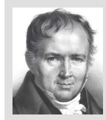
★ **Exercice 33. (Le logarithme complexe)** Soit $z \in \mathbb{C}$. On suppose : $|z| < 1$.

1. Justifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}z^n}{n}$ converge. On pose alors : $L(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}z^n}{n}$.
2. Montrer que la fonction $\Phi : t \mapsto (1+tz)e^{-L(tz)}$ est constante sur $[0,1]$, et en déduire : $\exp(L(z)) = 1+z$.
3. En déduire : $\mathrm{Re}\,(L(z)) = \ln(|1+z|)$, et : $\mathrm{Im}\,(L(z)) = \arctan\left(\dfrac{\mathrm{Im}(z)}{1+\mathrm{Re}(z)}\right)$.
4. Soient $x \in [0,1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Simplifier $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n\cos(n\theta)}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n\sin(n\theta)}{n}$.

★ **Exercice 34. (Le logarithme complexe : étude sur le bord de** $\mathrm{B}_f(0,1)$**)**

☢ 1. Soit $\theta \in]0,2\pi[$. Montrer que l'application $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n e^{in\theta}}{n}$ est continue en 1.

2. En déduire, pour tout $\theta \in]0,2\pi[$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} = -\ln\left(2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$, et : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} = \frac{\pi-\theta}{2}$.



1781-1840

★ **Exercice 35. (Intégrales de Poisson et d'Euler-Dirichlet)** Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Grâce à l'exercice 33 ou 34, montrer que si : $|x| < 1$, alors : $\displaystyle\int_0^{2\pi} \ln\left(x^2 - 2x\cos(\theta) + 1\right) \mathrm{d}\theta = 0$.
2. En déduire que si : $|x| > 1$, alors : $\displaystyle\int_0^{2\pi} \ln\left(x^2 - 2x\cos(\theta) + 1\right) \mathrm{d}\theta = 4\pi\ln(|x|)$.

Exercice 36. (Une autre démonstration du théorème de Cayley-Hamilton) Soient $p \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et $A \in \mathrm{M}_p(\mathbb{C})$. On pose : $r_A = p\|A\|_\infty$.

1. Montrer : $\forall r > 0$, $\forall P \in \mathbb{C}[X]$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} re^{i\theta}P(re^{i\theta})\mathrm{d}\theta = 0$.
2. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(z \mapsto z^{-(n+1)}A^n\right)$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}\backslash\mathrm{B}_f(0, r_A)$ et que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| > r_A$, on a : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^{-(n+1)}A^n = (z\mathrm{I}_p - A)^{-1}$ (en particulier : $z\mathrm{I}_p - A \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{C})$).
3. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout réel $r \geqslant r_A^{-1}$:
$$A^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(re^{i\theta}\right)^{n+1}\left(re^{i\theta}\mathrm{I}_p - A\right)^{-1}\mathrm{d}\theta.$$
4. En déduire : $\forall r \geqslant r_A^{-1}$, $\chi_A(A) = \displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} re^{i\theta}\mathrm{Com}\left(re^{i\theta}\mathrm{I}_p - A\right)^\top \mathrm{d}\theta$, et conclure : $\chi_A(A) = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})}$.

Exercice 37. (La fonction Digamma en les nombres rationnels) On reprend la fonction Digamma définie par : $\psi = \dfrac{\Gamma'}{\Gamma}$, et étudiée dans l'exercice 45 du chapitre I. On souhaite calculer sa valeur en tout nombre rationnel. On admet le résultat final de l'exercice 34.

1. Pour tout $x > 0$, que vaut $\psi(x+1) - \psi(x)$? En déduire que, pour expliciter $\psi(r)$ pour tout $r \in \mathbb{Q}_+^*$, il suffit de calculer $\psi(r)$ pour tout $r \in]0,1] \cap \mathbb{Q}$.

Soit $r \in]0,1] \cap \mathbb{Q}$. Il existe $(p, q) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^2$ tel que : $p < q$, et : $r = \frac{p}{q}$. On pose : $\omega = e^{\frac{2i\pi}{q}}$.

2. Montrer que l'application $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{1+k} - \frac{q}{p+qk}\right)x^{p+qk}$ est définie et continue sur $[0,1]$.
3. En déduire : $\psi(r) = -\gamma + \displaystyle\lim_{x\to 1^-} S(x)$. *Vous aurez besoin d'un résultat de l'exercice 45 du chapitre II.*
4. Montrer : $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} S(x) = -\ln(q) - \sum_{\ell=1}^{q-1}\omega^{-\ell p}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\omega^{\ell n}}{n}\right)$.
5. Conclure : $\psi(r) = -\gamma - \ln(q) - \dfrac{\pi}{2\tan(\pi r)} + \displaystyle\sum_{\ell=1}^{q-1}\cos(2\pi\ell r)\ln\left(2\sin\left(\frac{\pi\ell}{q}\right)\right)$.

Exercice 38. (Application de l'exercice 37) Montrer : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\left(n+\frac{1}{3}\right)\left(n+\frac{1}{4}\right)} = 2\left(18\ln(2) - 9\ln(3) + (3-\sqrt{3})\pi\right)$.