**Exercices du chapitre II (Séries numériques)**

✓ : exercice d'application des méthodes, ★ : exercice classique, ☢ : exercice difficile.

## Étude pratique de la nature des séries

✓ **Exercice 1. (Révisions)** Déterminer la nature des séries suivantes :

(a) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{8^n}{(2n)!}$, (b) $\sum_{n\geqslant 2} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\ln(n)}$, (c) $\sum_{n\geqslant 2} \left(\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n}\right)$, (d) $\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$,

(e) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{2^n\cdot n!}{(2n)!}$, (f) $\sum_{n\geqslant 2} \left(n^{\frac{1}{n^2}}-1\right)$, (g) $\sum_{n\geqslant 1} \left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$, (h) $\sum_{n\geqslant 0} \sin(\pi\sqrt{n^2+3})$.

☢ **Exercice 2. (Méchantes séries)** Déterminer la nature des séries suivantes :

(a) $\sum_{n\geqslant 1} \sin\left(\frac{\sin(n)}{\sqrt[3]{n}}\right)$, (b) $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{n\cos(n)}{n\sqrt{n}+\sin(n)}$, (c) $\sum_{n\geqslant 0} \sin\left(2\pi e n!\right)$.

**Exercice 3.** Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in ]-\infty,1]$. Démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(n\theta)}{n}$ ne converge pas absolument.

★ **Exercice 4.** Déterminer la nature des séries $\sum_{n\geqslant 0} \sin(\pi(2-\sqrt{3})^n)$ et $\sum_{n\geqslant 0} \sin(\pi(2+\sqrt{3})^n)$.

✓ **Exercice 5.** Soit $(a,b,c) \in (\mathbb{N}\setminus\{0\})^3$. Donner la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(an)!}{(bn)!n^{cn}}$.

**Exercice 6.**

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation : $\ln(x) = \arctan(x) + n\pi$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$, admet une unique solution qu'on notera $x_n$.
2. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{x_n}$.

**Exercice 7. (Séries de nature combinatoire ou arithmétique)**

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $a_n$ le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de $n$. Déterminer la nature des séries $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{a_n!}$ et $\sum_{n\geqslant 0} \left(10-n^{\frac{1}{a_n}}\right)$.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, on pose $c_n = n^{-\alpha}$ si $n$ ne contient pas 9 dans son écriture décimale, et $c_n = 0$ sinon. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} c_n$.

☢ 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, soit $b_n$ le plus grand diviseur premier de $n$. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{nb_n}$ converge.

## Calculs de sommes

✓ **Exercice 8.** Calculer : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+3n+2}$, et : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$.

**Exercice 9.** Établir la convergence de la série : $\sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{1}{4n+1}-\frac{3}{4n+2}+\frac{1}{4n+3}+\frac{1}{4n+4}\right)$, et calculer sa somme.

★ **Exercice 10.**

1. Montrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} - \frac{(\ln(n))^2}{2}\right)_{n\geqslant 1}$ converge.
2. En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$ converge et calculer sa somme.

**Exercice 11.** Calculer la somme : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$, dont on aura soigneusement démontré l'existence.

**Exercice 12. (Orthogonalité des caractères de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, et application)** Soient $x \in \mathbb{C}$ et $(p,a) \in (\mathbb{N}\setminus\{0\}) \times \mathbb{N}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, simplifier : $\displaystyle\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} e^{\frac{2i\pi k}{p}(n-a)}$. Pourquoi parlé-je d'*orthogonalité* ?
2. Déduire de la question précédente une expression simplifiée de la somme : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{pn+a}}{(pn+a)!}$.
3. Calculer : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(3n)!}$, et : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(4n)!}$.

**Exercice 13.** Calculer la partie entière de : $\displaystyle\sum_{n=1}^{10^9}\frac{1}{n^{2/3}}$.

**Exercice 14.** Soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^\alpha$ pour tout $\alpha \in \{1,2,3\}$ grâce à une transformation d'Abel.

★ **Exercice 15.** Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{\alpha n+1}$ converge et que : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha n+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}$. Calculer cette somme pour $\alpha \in \{1,2,3\}$.

**Exercice 16. (Une identité trigonométrique, et calcul de $\zeta(2)$)** Soit $N$ au voisinage de $+\infty$.

1. Montrer que, pour tout réel $x \not\equiv 0 \bmod 2\pi$, on a : $\displaystyle N + 2\sum_{k=1}^{N-1} k\cos((N-k)x) = \left(\frac{\sin\left(\frac{Nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2$.
2. En déduire : $\displaystyle\int_0^\pi x\left(\frac{\sin\left(\frac{Nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{N\pi^2}{2} - 4N\sum_{\substack{m=1\\ m \text{ impair}}}^{N-1}\frac{1}{m^2} + 4\sum_{\substack{m=1\\ m \text{ impair}}}^{N-1}\frac{1}{m}$.
3. Déduire de la question précédente : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\sum_{\substack{m=1\\ m \text{ impair}}}^{N-1}\frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{8}$, puis : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

## Étude théorique de la nature des séries


1801-1859

★ **Exercice 17. (Règle de Raabe-Duhamel)** Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle strictement positive. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\displaystyle\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge si et seulement si : $\alpha > 1$. *On utilisera le lien suite-série avec une suite convenable pour en déduire un équivalent de $u_n$ en $+\infty$.*


1797-1872

**Exercice 18. (Règle de Raabe-Duhamel : on raffine)** Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle strictement positive. On suppose : $\displaystyle\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n\ln(n)}\right)$. Donner la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$.

★ **Exercice 19. (Généralisation de la comparaison série-intégrale)** Soit $f : ]0,+\infty[ \to \mathbb{C}$ une application de classe $\mathrm{C}^1$ telle que $f'$ soit intégrable sur $[1,+\infty[$.

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f(n)$ est de même nature que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t$.
2. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{e^{i\sqrt{n}}}{n^\alpha}$ converge pour tout $\alpha > \frac{1}{2}$.
3. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{e^{i\sqrt{n}}}{n^\alpha}$ diverge pour tout $\alpha \in \left]0,\frac{1}{2}\right]$.

*Vous pouvez traiter le cas $\alpha \leqslant 0$. L'approche est cependant différente et c'est pourquoi je ne l'ai pas inclus à l'exercice.*

★ **Exercice 20.** Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite décroissante et à termes positifs. Montrer que si la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge, alors : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$. Que dire de la réciproque ?

★ **Exercice 21.** Soient $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites complexes. On suppose que $\sum_{n\geqslant 0} u_n^2$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n^2$ convergent absolument. Montrer que $\sum_{n\geqslant 0} u_n v_n$ converge absolument.

★ **Exercice 22.** Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série à termes positifs, avec $u_0 > 0$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

1. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_n$. On suppose que $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{u_n}{S_n^\alpha}$.
2. On suppose que $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n$. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{u_n}{R_n^\alpha}$.

**Exercice 23.** Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{2n} + u_{2n+1}$. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.

★ **Exercice 24. (Critère d'Abel)** Soient $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites complexes. On suppose que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ décroît et converge vers 0, et qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|\sum_{k=0}^{n} v_k\right| \leqslant M$. Montrer que $\sum_{n\geqslant 0} u_n v_n$ converge.

**Exercice 25. (Élimination du signe alterné)** Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite décroissante et convergeant vers 0.

1. Justifier que les séries $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} (u_{2n+1} - u_{2n})$ convergent, et que : $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n = -\sum_{n=0}^{+\infty} (u_{2n+1} - u_{2n})$.
2. En déduire la valeur de la somme : $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+1}\right)$.

**Exercice 26. (Un autre théorème spécial des séries alternées)** Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série alternée. On suppose que $(|u_n|)_{n\geqslant 0}$ est croissante. Démontrer que, si l'on note $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$ la somme partielle d'indice $N \in \mathbb{N}$, alors :

— la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ n'a pas de limite, sauf si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est la suite nulle ;
— pour tout $N \in \mathbb{N}$, la somme partielle $S_N$ est du signe de son *dernier* terme ;
— pour tout $N \in \mathbb{N}$, la somme partielle $S_N$ est absolument majorée par son *dernier* terme : $\forall N \in \mathbb{N}$, $|S_N| \leqslant |u_N|$.

**Exercice 27. (Théorème de Mertens)** Soient $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ deux séries de nombres complexes. On suppose que $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge et que $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ converge absolument. Montrer que le produit de Cauchy de ces deux séries converge et a pour somme : $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$.

☢ **Exercice 28.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application qui préserve la convergence, c'est-à-dire : pour toute série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ réelle et convergente, la série $\sum_{n\geqslant 0} f(u_n)$ converge. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall x \in ]-\eta, \eta[$, $f(x) = ax$.

## Comportements asymptotiques

**Exercice 29.** Soit $\alpha \in ]0,1]$. Donner un équivalent asymptotique de $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(\ln(k))^\alpha}$ quand $n \to +\infty$.

**Exercice 30.** Soit $\alpha \in ]1,+\infty[$. Donner un développement asymptotique à deux termes de : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

**Exercice 31.**

1. Donner un équivalent asymptotique de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{e^k}{k}$ quand $n \to +\infty$.
2. Donner un développement asymptotique à deux termes de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}$.

**Exercice 32.** Donner un équivalent, puis un développement asymptotique à deux termes, de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt[4]{n + \sqrt[4]{(n-1) + \cdots + \sqrt[4]{2+\sqrt[4]{1}}}}$.

**Exercice 33.** Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$.

1. Donner un équivalent de $u_n$ quand $n \to +\infty$.
2. On prend $u_0 = 5$. Montrer : $u_{1000} \in [45,\ 45{,}1]$.

**Exercice 34.** Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une application de classe $\mathrm{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. On suppose : $\displaystyle\lim_{+\infty} \frac{f'}{f} = -\infty$.

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f(n)$ converge.
2. Donner un équivalent asymptotique simple du reste d'indice $n$ de cette série quand $n \to +\infty$.
3. Donner un équivalent asymptotique simple, quand $n \to +\infty$, de : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} e^{-k^2}$.

**Exercice 35. ($e^2$ est irrationnel)** Nous voulons démontrer que le nombre $e^2$ est irrationnel. Raisonnons par l'absurde, en supposant : $e^2 \in \mathbb{Q}$. Il existe donc des entiers $a$ et $b$, positifs et non nuls puisque $e^2 > 0$, tels que : $e^2 = \dfrac{a}{b}$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on pose : $S_{N,e} = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}$, et $S_{N,e^{-1}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n!}$.

1. Montrer : $\forall N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\dfrac{b}{2N+1} \leqslant (2N)!aS_{2N,e^{-1}} - (2N)!bS_{2N,e} \leqslant \dfrac{b}{2N} + \dfrac{a}{2N+1}$, et en déduire une contradiction pour des valeurs suffisamment grandes de $N$. Conclure.
2. Est-ce que $e$ est un nombre rationnel ? Justifier.

*Plusieurs démonstrations d'irrationalité procèdent ainsi : en raisonnant par l'absurde et en produisant une suite d'entiers naturels convergeant vers* 0.

## Rudiments de théorie analytique des nombres

Dans les exercices de cette section, on note $\zeta : s \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ la fonction dzêta de Riemann.

★ **Exercice 36. (Produits eulériens)** Soit $f : \mathbb{N}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$ une application vérifiant, pour tous entiers $m$ et $n$ premiers entre eux : $f(mn) = f(m)f(n)$ (on dit que $f$ est une *fonction arithmétique multiplicative*). Soit $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f(n)$ converge absolument si et seulement si la famille $\left(f\left(p^k\right)\right)_{(p,k)\in\mathbb{P}\times(\mathbb{N}\setminus\{0\})}$ est sommable, et que le cas échéant on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) = \lim_{T\to+\infty} \prod_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p\leqslant T}} \left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} f\left(p^k\right)\right)$. C'est un *produit eulérien.*
2. Montrer : $\forall s \in ]1,+\infty[$, $\zeta(s) = \displaystyle\lim_{T\to+\infty} \prod_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p\leqslant T}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}$. En déduire que la famille $\left(\dfrac{1}{p}\right)_{p\in\mathbb{P}}$ n'est pas sommable.

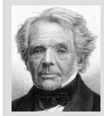
★ **Exercice 37. (Produit de séries de Dirichlet)** Soient $a = (a_n)_{n\geqslant 1}$ et $b = (b_n)_{n\geqslant 1}$ deux suites complexes. On définit le *produit de convolution* de $a$ par $b$, noté $a * b : \mathbb{N}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$, par : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $(a*b)(n) = \sum_{d|n} a_d b_{\frac{n}{d}}$.

Soit $\sigma \in \mathbb{R}$. On suppose que pour tout réel $s > \sigma$, les séries $\sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n^s}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{b_n}{n^s}$ sont absolument convergentes.

Montrer que pour tout $s > \sigma$, on a : $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s}\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n^s}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(a*b)(n)}{n^s}$.

**Exercice 38. (Séries génératrices de Dirichlet des fonctions arithmétiques classiques)** Soit $s > 1$ un réel.

1. Montrer : $(\zeta(s))^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d(n)}{n^s}$, où $d(n)$ est le nombre de diviseurs positifs de $n$ pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.
2. Montrer : $\zeta(s)\zeta(s-1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sigma(n)}{n^s}$, où $\sigma(n)$ est la somme des diviseurs positifs de $n$ pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.


1790-1868

★ **Exercice 39. (Fonction de Möbius et fonction dzêta)** On note $\mu : \mathbb{N}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie ainsi : si $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, alors $\mu(n) = 0$ si $n$ est divisible par un carré (dans le cas contraire, on dit que $n$ est *quadratfrei*), et $\mu(n) = (-1)^r$ si $n$ est *quadratfrei* et admet exactement $r$ diviseurs premiers.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, montrer : $\sum_{d|n} \mu(d) = \delta_{1,n}$.
2. Soit $s > 1$ un réel. Montrer : $\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$.

**Exercice 40. (Densité des entiers premiers entre eux)** On reprend la définition de la fonction de Möbius donnée dans l'exercice 39. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $c_n = \operatorname{card}\left(\{(p,q) \in [\![1,n]\!]^2 \mid \operatorname{pgcd}(p,q) = 1\}\right)$.

1. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $c_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(k) \left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor\right)^2$.
2. En déduire : $\lim_{n\to+\infty} \frac{q_n}{n^2} = \frac{6}{\pi^2}$. On aura besoin de l'exercice 39, et on admettra : $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ (*voir l'exercice 16 pour une démonstration*).

☢ **Exercice 41.** Pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}\times(\mathbb{N}\setminus\{0\})$, on note $r_{n,k} \in [\![0, k-1]\!]$ le reste de la division euclidienne de $n$ par $k$. Donner un équivalent asymptotique simple, quand $n \to +\infty$ de : $\operatorname{card}\left(\{k \in [\![1,n]\!] \mid r_{n,k} \geqslant \frac{k}{2}\}\right)$.

★ **Exercice 42.** Soit $z \in \mathbb{C}$. On suppose : $|z| < 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, on note $d(n)$ le nombre de diviseurs positifs de $n$. Montrer : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n) z^n$.

## Dénombrabilité

★ **Exercice 43.** Montrer que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ne sont pas dénombrables.

**Exercice 44. (Dénombrabilité des nombres algébriques)** On pose : $\overline{\mathbb{Q}} = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists P \in \mathbb{Z}[X]\setminus\{0\},\ P(z) = 0\}$. Montrer que $\overline{\mathbb{Q}}$ est dénombrable. En déduire qu'il existe une infinité de nombres complexes qui ne sont pas dans $\overline{\mathbb{Q}}$ (on parle dans ce cas de nombres *transcendants*).


1845-1918

**Exercice 45. (L'ensemble de Cantor)** On définit l'application $\mathcal{T} : [a,b] \mapsto \left[a, a + \frac{b-a}{3}\right] \cup \left[b - \frac{b-a}{3}, b\right]$ sur l'ensemble des segments inclus dans $[0,1]$, et on la prolonge à l'ensemble des réunions disjointes de segments $\bigcup_{k\in I} S_k$ par la formule : $\mathcal{T}\left(\bigcup_{k\in I} S_k\right) = \bigcup_{k\in I} \mathcal{T}(S_k)$. On définit alors une suite par récurrence ainsi : $C_0 = [0,1]$, et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $C_{n+1} = \mathcal{T}(C_n)$. On pose enfin : $C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$. C'est l'ensemble de Cantor.

1. Montrer que l'application $\varphi : (a_n)_{n\geqslant 1} \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} a_n 3^{-n}$ est une bijection de $\{0,2\}^{(\mathbb{N}\setminus\{0\})}$ dans $C$.
2. Montrer que l'application $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} a_n 2^{-n-1}$, avec : $(a_n)_{n\geqslant 1} = \varphi^{-1}(x)$, est une surjection de $C$ dans $[0,1]$.
3. En déduire que $C$ n'est pas dénombrable.

## Familles sommables

✓ **Exercice 46.** Étudier la sommabilité des familles suivantes :

$$\text{(a)}\ \left(\frac{n}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{Z}},\quad \text{(b)}\ \left(\frac{1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^3}\right)_{n\in\mathbb{Z}},\quad \text{(c)}\ \left(\frac{e^{inx}}{2^{|n|}}\right)_{n\in\mathbb{Z}},\quad \text{(d)}\ \left(2^{n-2|n|}\right)_{n\in\mathbb{Z}}.$$

✓ **Exercice 47.** Étudier la sommabilité des familles suivantes :

$$\text{(a)}\ \left(\frac{1}{(i+j)^\alpha}\right)_{(i,j)\in(\mathbb{N}\setminus\{0\})^2},\ \alpha\in\mathbb{R},\qquad \text{(b)}\ \left(\frac{1}{i^\alpha+j^\alpha}\right)_{(i,j)\in(\mathbb{N}\setminus\{0\})^2},\ \alpha\in\mathbb{R}$$
$$\text{(c)}\ \left(\frac{1}{a^p+b^q}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2},\ (a,b)\in]1,+\infty[^2,\qquad \text{(d)}\ \left(\frac{1}{r^2}\right)_{r\in\mathbb{Q}\cap[1,+\infty[}.$$

✓ **Exercice 48.** Calculer la somme de la famille $\left(\dfrac{1}{pq(p+q+2)}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}\setminus\{0\})^2}$.

☢ **Exercice 49.** Calculer la somme de la famille $\left(\dfrac{p!q!}{(p+q+2)!}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$. On admet : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ (*voir l'exercice 16 pour une démonstration*).

★ **Exercice 50.** On pose : $\forall s\in]1,+\infty[$, $\zeta(s)=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^s}$. Calculer $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}(\zeta(n)-1)$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(\zeta(n)-1)$, en justifiant l'existence de cette dernière somme.

**Exercice 51. (Contre-exemple au théorème de Fubini)** On pose, pour tous entiers naturels distincts $n$ et $p$ : $a_{n,p}=\dfrac{1}{n^2-p^2}$, puis : $a_{n,n}=0$.

1. Montrer que la famille $(a_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ n'est pas sommable.
2. Calculer, en justifiant l'existence, les sommes : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}a_{n,p}\right)$, et : $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_{n,p}\right)$.

**Exercice 52.** Soit $(x_i)_{i\in I}\in\mathbb{C}^I$ une famille sommable, et soit $(I_n)_{n\geqslant 0}$ une suite croissante de parties de $I$ telle que : $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}I_n=I$. Montrer : $\displaystyle\sum_{i\in I}x_i=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i\in I_n}x_i$.

**Exercice 53. ($\zeta(4)$ en quelques secondes)** On note $\zeta : s\mapsto\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}$ la fonction dzêta de Riemann. Pour tout entier naturel $k$ pair et supérieur ou égal à 4, on pose : $\forall(m,n)\in(\mathbb{N}\setminus\{0\})^2$, $f_k(m,n)=\dfrac{1}{mn^{k-1}}+\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{j=2}^{k-2}\frac{1}{m^jn^{k-j}}+\frac{1}{m^{k-1}n}$.

1. En calculant de deux manières différentes : $\displaystyle\sum_{(m,n)\in(\mathbb{N}\setminus\{0\})^2}(f_4(m,n)-f_4(m+n,n)-f_4(m,m+n))$, montrer l'égalité : $\zeta(4)=\dfrac{2}{5}(\zeta(2))^2$.
2. Montrer, pour tout entier pair $k$ supérieur ou égal à 4 : $\displaystyle\sum_{\substack{j=2\\ j\text{ pair}}}^{k-2}\zeta(j)\zeta(k-j)=\frac{k+1}{2}\zeta(k)$. En déduire les valeurs de $\zeta(k)$ pour $k\in[\![4,6,8]\!]$. On admet : $\zeta(2)=\dfrac{\pi^2}{6}$ (*voir l'exercice 16 pour une démonstration*).
3. Montrer, pour tout entier pair $k$ supérieur ou égal à 2 : $\dfrac{\zeta(k)}{\pi^k}\in\mathbb{Q}$.

*Le cas impair est toujours très mystérieux à l'heure actuelle. On ne sait toujours pas si le résultat de la dernière question est vrai même pour $k=3$.*