Exercices du chapitre VIII (Séries entières) – Indications

L'icône « (🗎) » indique que les documents *Méthodes* donnent des conseils plus généraux.
La lettre « C » indique que la *Banque des Cent* contient ou contiendra des exercices analogues.

Résultats théoriques sur le rayon de convergence

✓ **Exercice 1.**

1. Encadrer les termes non nuls de $(a_n)_{n\geqslant 0}$ par leur minimum et leur maximum, et raisonner par comparaison. Utiliser le théorème de sommation par paquets avec les classes modulo T (où T est la période) pour exprimer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ en fonction de $\frac{1}{1-z^j}$ et des T premiers termes de la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$.
2. Noter que tout z vérifiant $|z| < R$ donne la convergence absolue. En déduire une relation entre z_0 et R. Raisonner de même avec le fait que z vérifiant $|z| > R$ donne la divergence.

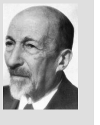
Commentaires.

✓ **Exercice 2.** Remarquer que $(a_n\rho^n)_{n\geqslant 0}$ est bornée si et seulement si $\left(a_{2n}\rho^{2n}\right)_{n\geqslant 0}$ et $\left(a_{2n+1}\rho^{2n+1}\right)_{n\geqslant 0}$ le sont.

Commentaires.

✓ **Exercice 3. (Produit d'Hadamard)** Noter que si $\rho < R_a R_b$, alors $(a_n b_n \rho^n)_{n\geqslant 0}$ peut s'écrire comme produit de deux suites de la forme $(a_n r^n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n r'^n)_{n\geqslant 0}$ avec $r < R_a$ et $r' < R_b$. En déduire le résultat. Méditer sur $\sum\limits_{n\geqslant 0} z^{2n}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} z^{2n+1}$ pour montrer qu'il n'y a pas égalité en général.

Commentaires.



1865-1963

Exercice 4. (Formule d'Hadamard) Il suffit de démontrer que la suite $(a_n\rho^n)_{n\geqslant 0}$ est bornée dès que $\rho < \frac{1}{\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}}$ et qu'elle ne l'est pas dès que $\rho > \frac{1}{\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}}$. Vous pouvez vous inspirer de la démonstration de la règle de D'Alembert. Le cas non borné est celui qui s'adapte le mieux : minorer une suite extraite convenable de $(a_n\rho^n)_{n\geqslant 0}$ par une suite géométrique de raison strictement supérieure à 1. Pour le cas borné : montrer d'abord que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un rang N au-delà duquel, pour tout $n \geqslant N$, on a : $|a_n|^{\frac{1}{n}} \leqslant \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} + \varepsilon$. Ceci étant établi, vous arriverez à conclure par un bon choix de ε *via* un raisonnement analogue à celui de la règle de D'Alembert.

Le cas extrême d'une limite supérieure infinie est à traiter à part et est facile.

Commentaires.

Calculs de sommes, produits de Cauchy

✓ **Exercice 5. (🗎C)** Item (a) : quelle série usuelle fait figurer $(2n)!$ au dénominateur ? S'y ramener. Item (b) : décomposer en éléments simples. Item (c) : exprimer alternativement le sinus pour reconnaître la série exponentielle. Item (d) : le facteur $n+1$ doit évoquer une dérivation. Item (e) : deux pistes sont possibles. Soit le $2n+1$ permet de remarquer qu'il s'agit des termes d'indice impair d'une autre somme, qu'on devrait savoir simplifier, soit le facteur $\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ semble indiquer que cette somme provient d'une autre somme (usuelle) après avoir effectué une opération classique de l'analyse. Item (f) : la somme dans le terme général de la série devrait vous faire penser à un type de série entière rencontré dans votre cours.

Commentaires.

✓ **Exercice 6. (🗎C)** Calculer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nz^n$ *via* une dérivation ou un produit de Cauchy (si vous passez par une dérivation, le résultat ne sera valable que pour z réel : le passage à z complexe nécessitera un argument supplémentaire, dont il est question dans *Méthodes*, *Le prolongement des identités*). En déduire la somme annoncée en évaluant en un z convenable.

Commentaires.

✓ **Exercice 7. (🗎C)** Obtenir cette somme par intégration d'une somme usuelle, soit par le théorème de convergence dominée, soit en intégrant terme à terme la somme usuelle en question, sur un segment convenable inclus dans l'intervalle ouvert de convergence, puis en utilisant le théorème d'Abel radial.

Une décomposition en éléments simples est nécessaire lors d'une étape du calcul, et nécessite de savoir factoriser X^4+1 dans $\mathbb{R}[X]$. Pour cela, soit on factorise le polynôme sur $\mathbb{C}$ (ses racines sont des racines de l'unité) et on regroupe convenablement les termes pour avoir la décomposition sur $\mathbb{R}$; soit on fait astucieusement apparaître l'identité remarquable $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ en partant de ce polynôme, afin de le factoriser directement.

Commentaires.

Exercice 8. (Identités démontrées avec un produit de Cauchy)

1. Item (a) : songer à une série entière de votre cours dont le coefficient d'indice n est $\binom{n+a}{n}$ ou $\binom{n+b}{n}$. Faire le produit de Cauchy. Développer en série entière ce produit par un autre moyen, et utiliser l'unicité des coefficients. Item (b) : l'égalité entre les deux sommes peut se déduire d'un changement de variable basique. Pour trouver 4^n : on note que $\binom{2n+1}{2k}=\frac{(2n+1)!}{(2k)!(2(n-k)+1)!}$. Songer à une fonction usuelle dont le développement en série entière fait apparaître $(2n)!$ ou $(2n+1)!$ au dénominateur. En déduire que la somme initiale s'exprime à l'aide du produit de Cauchy de deux fonctions usuelles. Or ce produit de deux fonctions usuelles peut aussi s'exprimer autrement, grâce à une propriété que vous connaissez depuis très longtemps. Développer en série entière cette expression alternative. Utiliser l'unicité des coefficients.
2. Noter que $\binom{2n}{n}$ apparaît dans le développement en série entière de $x\mapsto(1-x)^\alpha$ avec α bien choisi. En déduire que la somme à simplifier est le coefficient général du produit de Cauchy de cette fonction par $\sum\limits_{n\geqslant 0}x^n$. Conclure en raisonnant comme dans la première question.

Commentaires.

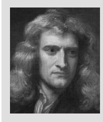
Exercice 9. (Somme des puissances)

1. Remarquer que $u_{n,3}$ peut s'interpréter comme le coefficient d'un produit de Cauchy de deux séries entières. En déduire une expression de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_{n,3}x^n$ comme produit de deux sommes de série entière. L'une d'elle est usuelle. L'autre s'obtient par combinaison linéaire et dérivation d'une somme usuelle : voir *Méthodes*.
2. Développer en série entière le membre de droite de l'égalité précédente. Vous y parviendrez par dérivation de $x\mapsto\frac{1}{1-x}$. Conclure avec l'unicité des coefficients.
3. Reprendre le raisonnement des deux questions précédentes. Cela devient très calculatoire.

Commentaires.

✓ **Exercice 10. (Transformation d'Abel)** Reconnaître un produit de Cauchy.

Commentaires.


1643-1727

★ **Exercice 11. (Sommes de Newton)** Remarquer que $\frac{P'}{P}$ est une combinaison linéaire de fractions rationnelles de la forme $\frac{1}{X-x_i}$. Utiliser la série géométrique pour développer en série entière la fonction proposée par l'énoncé. Obtenir ainsi $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}S_kx^k$ après calcul. Conclure en multipliant l'identité obtenue par $xP(1/x)$ et en utilisant l'unicité des coefficients.

Commentaires.

Fonctions développables ou non développables en série entière

✓ **Exercice 12.** Item (a) : utiliser le développement de $(1+u)^\alpha$ avec α et u bien choisis. Items (b) et (c) : utiliser la dérivée de ces deux fonctions et l'intégrer terme à terme. Ne pas oublier la constante d'intégration. Item (d) : même raisonnement. La dérivée ressemble beaucoup à celle de l'item (a).

Commentaires.

✓ **Exercice 13.** Item (a) : on sait développer en série entière l'arc tangente. Item (b) : exprimer le sinus en fonction de l'exponentielle. Item (c) : se ramener à des quantités de la forme $\ln(1+u)$ avec u monôme.

Commentaires.

Exercice 14. Item (a) : un produit de Cauchy est envisageable mais n'est pas la meilleure façon de faire. Si vous choisissez cette voie, vous devrez savoir simplifier une somme se ramenant « presque » à la formule du binôme de Newton : vous aurez un facteur $\frac{1}{2k+1}$ en trop. Noter que cette somme se ramène à un « vrai » binôme de Newton par intégration. Vous aurez alors à simplifier $\int_0^1 (t^2-1)^n \mathrm{d}t$: on y parvient en se ramenant à $\int_{-1}^1 (t^2-1)^n \mathrm{d}t$ par parité et en intégrant par parties n fois. Cela permet enfin d'avoir le développement en série entière de f.

Cependant ce n'est pas du tout le plus simple : utiliser la méthode de l'équation différentielle. Vous pouvez d'ailleurs abréger les calculs dans cette méthode en notant que f est une fonction impaire.

Item (b) : utiliser la méthode de l'équation différentielle. Vous aurez besoin d'une équation d'ordre 2.

Item (c) : développer en série entière l'intégrande en utilisant : $\frac{1}{1-u} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u^n$. Justifier alors l'intégration terme à terme *via* la convergence normale par exemple (bien noter que la variable d'intégration est t : c'est cette variable qu'il faut éliminer pour majorer la norme infinie). L'autre théorème d'intégration terme à terme peut aussi être envisagé.

Pour simplifier $\int_0^\pi t(\sin(t))^n \mathrm{d}t$: faire un changement de variable qui ramène à un intervalle centré en 0, et utiliser la parité de l'intégrande pour simplifier une partie de l'intégrale. L'intégrale restante se simplifie avec les intégrales de Wallis.

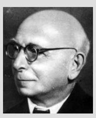
Commentaires.

✓ **Exercice 15.** Développer en série entière le sinus et diviser par x. En déduire qu'avec un bon choix de $\tilde{f}(0)$, l'application $\tilde{f}$ est développable en série entière. Se souvenir que les coefficients d'une série entière donnent la valeur des dérivées successives en 0.

Commentaires.

✓ **Exercice 16. (Développement en série entière en 0 des fractions rationnelles) (C)** Résolution sans mystère, une fois qu'on a lu *Méthodes*.

Commentaires.


1880-1968

Exercice 17. (Fonctions absolument monotones et théorème de Bernstein)

1. Une formule de Taylor bien choisie permet d'exprimer $f^{(n)}(t)$, pour tout $0 \leqslant x < a$ et tout $0 \leqslant t \leqslant x$, en fonction de f (évaluée en un tierce point b de $[0, a[$) et d'autres dérivées de f. En déduire une majoration de $f^{(n)}(t)$ par $\frac{n!}{(b-t)^n} f(b)$, puis une majoration du reste intégral de la série de Taylor de f. Vous aurez besoin de majorer au mieux $\frac{x-t}{b-t}$ pour $t \in [0, x]$: immédiat si l'on fait siens les conseils de *L'art de la majoration*. En déduire, par le théorème des gendarmes, que le reste intégral converge simplement vers la fonction nulle.
2. Il suffit de montrer que la fonction tangente vérifie les hypothèses de la question précédente. Pour cela, on raisonne par récurrence. Deux façons de le faire : 1° montrer que $\tan^{(n)}$ et $\tan^{(n+1)}$ sont deux polynômes en tan et qu'on peut exprimer l'un en fonction de l'autre (de sorte que la positivité de l'un implique celle de l'autre), 2° on vérifie que c'est vrai pour $\tan'$, et on utilise la formule de dérivation de Leibniz avec $\tan'$ (qui est somme d'une constante et d'un produit de fonctions) pour avoir le cas général par récurrence forte.

   Cela donne le développement en série entière sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Utiliser la parité de la fonction pour en déduire le résultat sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Commentaires. On se demandera, dans les majorations de la première question, ce qui nécessite l'introduction d'un point intermédiaire b.

Il existe d'autres moyens de montrer que la fonction tangente est développable en série entière, sans suivre la philosophie de l'exercice : 1° utiliser l'exercice 23 ; 2° utiliser la méthode de l'équation différentielle ; 3° voir l'exercice 32. Cependant la méthode de cet exercice est la seule qui donne le rayon de convergence maximal.

✓ **Exercice 18.** Montrer que le reste intégral de la formule de Taylor converge simplement vers la fonction nulle, grâce au théorème des gendarmes et à la domination de l'énoncé.

Commentaires.

Exercice 19. (Fonction de classe C^∞ non développable en série entière en 0 : un autre exemple)

1. Utiliser le théorème de dérivation terme à terme (version C^k). La convergence normale est immédiate si l'on remarque que $\sum_{n\geqslant 0}\|f_n\|_\infty$ (où f_n est ce que vous pensez) est une série usuelle. Cette même série usuelle permet d'obtenir la valeur de $f^{(k)}(0)$.
2. Vérifier que la série de Taylor de f est de rayon de convergence nul.

Commentaires.

Exercice 20. (Fonction de classe C^∞ non développable en série entière en 0 : deux autres exemples)

1. Montrer la classe C^∞ avec le théorème de classe C^k des intégrales à paramètres. La fonction de domination s'obtient trivialement, et on montre son intégrabilité avec le théorème des croissances comparées. Pour montrer qu'elle n'est pas développable en série entière en 0 : calculer sa série de Taylor. Cela nécessite de savoir calculer $\int_0^{+\infty} t^{2k}e^{-t}\mathrm{d}t$: c'est une intégrale abordée au chapitre I. Vérifier alors que la série de Taylor de f est de rayon de convergence nul.
2. Même raisonnement que dans l'exercice 19. Pour montrer que la série de Taylor est de rayon de convergence nul : minorer trivialement $g^{(p)}(0)$ par l'un des termes « grands » de la somme.

Commentaires.

Exercice 21. Raisonner par l'absurde et utiliser le principe du prolongement analytique pour montrer que ces fonctions seraient alors égales à $z\mapsto z$, ou $z\mapsto 0$, ou une variante de ces deux fonctions, sur $\mathbb{C}$. Conclure.

Commentaires.

Exercice 22. Grâce aux hypothèses, exprimer f_A comme somme de logarithmes de la forme $\ln(1\pm u)$ avec u monôme. Les développer en série entière et conclure après arrangement des termes.

Commentaires.

★ **Exercice 23. (Inverse d'une fonction développable en série entière)**

1. Écrire un produit de Cauchy et utiliser l'unicité des coefficients.
2. C'est vrai par définition du rayon de convergence.
3. Isoler β_n dans la relation de récurrence (†) pour définir la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 0}$ par récurrence. L'inégalité demandée s'obtient par récurrence forte. Mettre à part β_0 (qui vaut 1 et ne se majore pas comme les autres termes).
4. Utiliser la question précédente et le théorème de comparaison des séries entières. Faire une analyse-synthèse à l'aide des questions précédentes, pour montrer que la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 0}$ définie par la relation (†) définit une série entière de rayon de convergence non nul et vérifiant $(*)$.

Commentaires.

Intégration et dérivation terme à terme

✓ **Exercice 24. (Compliquer pour simplifier : intégrer en développant en série entière)** Item (a) : intégrer terme à terme le développement en série entière de $x\mapsto\ln(1+x)$, et effectuer une décomposition en éléments simples pour faire apparaître des fonctions usuelles. Item (b) : même stratégie.

Item (c) : développer en série entière $x\mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$. Distribuer le produit et faire un changement d'indice pour obtenir une expression de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty}\bigstar x^{2n}$. L'intégrer terme à terme et admirer la simplification immédiate.

Item (d) : développer en série entière $x\mapsto\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ grâce à un développement usuel et diviser par x^2. Intégrer terme à terme (d'abord isoler le premier terme de la somme, qui donne une singularité ; attention, aussi, à ne pas intégrer en prenant 0 comme borne inférieure). En réarrangeant le produit du terme général de la somme ainsi obtenue, reconnaître le développement en série entière de $x\mapsto\sqrt{1-x^2}$. Item (e) : même stratégie.

Commentaires.

Exercice 25. C'est un exercice d'intégration terme à terme. Noter que l'intégrande est positif. Le développement en série entière de $t\mapsto\frac{1}{(1-t)^2}$ s'obtient par dérivation d'une série usuelle. Le calcul de $\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t$ se fait classiquement en intégrant par parties, de sorte à éliminer le logarithme et ne conserver qu'une fonction puissance.

Commentaires.

★ **Exercice 26. (Formule intégrale de Cauchy)**

1. Développer en série l'intégrande et intégrer terme à terme. Attention : après composition par $\theta \mapsto re^{i\theta}$, ce n'est plus une série entière et la justification de l'intégration terme à terme doit être faite, comme pour toute série de fonctions. On y parvient aisément *via* la convergence normale : elle nous permet de comparer la série en présence à une série qui converge absolument par définition du rayon de convergence. Une fois l'intégration terme à terme justifiée, il n'y a plus de mystère : il suffit de savoir simplifier $\int_0^{2\pi} e^{ik\theta}\mathrm{d}\theta$ pour tout entier k.
2. Immédiat en utilisant l'inégalité triangulaire dans l'expression de la question précédente, et en se souvenant que a_n s'exprime en fonction de $S^{(n)}$.

Commentaires. Cette formule – d'inversion, en quelque sorte : connaissant S, on retrouve les a_n – est parmi les plus importantes de l'analyse complexe. Connaissant le comportement d'une fonction développable en série entière sur un domaine de $\mathbb{C}$, elle permet de reconstituer ses coefficients (noter que contrairement à la relation $a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}$, elle ne nécessite pas de connaître les dérivées de S ; au contraire, c'est un moyen de contrôler la taille de $S^{(n)}$ grâce à celle de S, comme on l'illustre dans le seconde question !). C'est notamment très utile dans l'étude de la série entière génératrice d'une suite. Les exercices 36 et 47 en sont des applications, la seconde étant extrêmement classique.

Exercice 27. (Formule de Parseval)

1. Écrire $\left|S\left(re^{i\theta}\right)\right|^2 = S\left(re^{i\theta}\right)\overline{S\left(re^{i\theta}\right)}$, développer en série les deux facteurs et utiliser un argument de sommabilité pour distribuer le produit comme on le souhaiterait. Justifier qu'on peut alors intégrer terme à terme (se convaincre que les théorèmes d'interversion du cours s'appliquent à la série double obtenue, grâce à un résultat sur les familles sommables), en montrant qu'il y a convergence normale.

   Si vous ne voulez pas de somme double : développer en série seulement un seul des deux facteurs ci-dessus. Justifier l'intégration terme à terme en montrant la convergence normale : utiliser le fait que S soit bornée sur tout compact inclus dans le disque ouvert de convergence pour éliminer la dépendance en θ. Vous aurez ensuite à simplifier $\int_0^{2\pi} S\left(re^{i\theta}\right)e^{-in\theta}\mathrm{d}\theta$ ou une autre expression du même acabit : encore intégrer terme à terme ou recourir à l'exercice 47 (formule intégrale de Cauchy).
2. Déduire de la question précédente une majoration de $\sum\limits_{n=0}^{N} |a_n|^2 r^{2n}$, pour tout N et tout $r \in]0,1[$, par une constante. En déduire que $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ converge. Conclure en utilisant le fait que les a_n soient entiers.

Commentaires.

Exercice 28. (Calcul de $\zeta(2)$)

1. Reconnaître, dans le membre de droite, le développement en série entière d'une fonction de l'exercice 12, composé avec le sinus. Vous savez simplifier cette composition. On peut justifier que l'identité vaut aussi en $\frac{\pi}{2}$ par le théorème d'Abel radial, ce qui nécessite de justifier la convergence de la série en $\frac{\pi}{2}$. La règle de D'Alembert donne le cas d'incertitude : donner un équivalent du terme général.
2. Intégrer terme à terme la somme de la question précédente, en notant la positivité des intégrandes. Reconnaître des intégrales de Wallis.
3. Exprimer cette somme en fonction de la somme précédente grâce au théorème de sommation par paquets.

Commentaires.

Séries entières génératrices, dénombrement

✓ **Exercice 29. (Suite récurrente linéaire d'ordre 3 à coefficients constants) (C)**

1. Raisonner par récurrence forte.
2. Multiplier par x^{n+3} la relation de récurrence et sommer. En déduire l'expression de $S(x)$ proposée. La décomposer en éléments simples et développer en série entière le résultat obtenu. Utiliser l'unicité des coefficients pour conclure.

Commentaires.

✓ **Exercice 30. (C)** D'abord montrer que $|u_n|$ et $|v_n|$ sont dominés par 10^n (vous aurez besoin de multiplier par une constante adéquate pour que la majoration soit correcte : regarder les premiers termes). Comprendre le choix de 10^n au moment de vouloir majorer $|u_{n+1}|$ par récurrence. En déduire que les séries entières génératrices de l'énoncé ne sont pas de rayon de convergence nul. Multiplier par x^{n+1} les deux sommes et sommer. En déduire un système linéaire vérifié par $S_u(x)$ et $S_v(x)$. Expliciter $S_u(x)$ et $S_v(x)$. Vous obtiendrez des fractions rationnelles. Les décomposer en éléments simples et développer en série entière les résultats obtenus. Utiliser l'unicité des coefficients pour conclure.

Commentaires.

Exercice 31. (Suite récurrente linéaire à coefficients constants : cas général)

1. L'existence de r découle du théorème des valeurs intermédiaires. Raisonner ensuite par récurrence forte. En déduire, par comparaison, une minoration du rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n x^n$.
2. Multiplier la relation de récurrence $(*)$ par x^{n+p} et sommer de $n = 0$ à $+\infty$. Exprimer toutes les sommes en présence à l'aide de $S(x)$. Remarquer que le terme au dénominateur de l'expression à trouver s'exprime simplement à l'aide du polynôme P.
3. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle de la question précédente et utiliser l'unicité des coefficients.
4. Deux pistes sont possibles. Première piste : comparer la dimension de l'espace des suites vérifiant $(*)$, avec l'espace des suites de la forme du membre de droite de la question précédente. Conclure que ces deux espaces sont égaux. Deuxième piste : vérifier par un calcul bête et méchant que les suites de la question précédente conviennent. On se simplifie la vie si, au lieu d'injecter $\sum\limits_{i=1}^{k} Q_i(n)\alpha_i^n$ dans $(*)$, on injecte $n^\ell \alpha_i^n$ avec $\ell \leqslant m_i - 1$.

Commentaires.

Exercice 32.

1. Raisonner par récurrence forte. Conclure avec le théorème de comparaison des séries entières.
2. Exprimer $(S(x))^2$ à l'aide d'un produit de Cauchy et de la relation de récurrence de l'énoncé.
3. Résoudre l'équation différentielle précédente en faisant apparaître une expression de la forme $S' \cdot f'(S)$, dont on sait qu'une primitive est $f(S)$. En déduire : $S(x) = \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$. User ensuite de formules de trigonométrie pour obtenir le résultat de l'énoncé.
4. Remarquer que ces deux fonctions donnent respectivement la partie impaire et la partie paire de S.

Commentaires.

Exercice 33. (Nombre de surjections) ()

1. Noter que n^m donne le nombre d'applications de $[\![1, m]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$, et qu'une application induit une surjection sur son image. Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ donne le nombre de façons de choisir l'ensemble image.
2. La première série entière est à support fini. Le rayon de convergence de la seconde série entière s'obtient aisément avec la règle de D'Alembert ou la définition du rayon de convergence. Faire un produit de Cauchy pour obtenir l'identité demandée.
3. Isoler la série génératrice de $\left(\frac{s_{m,n}}{n!}\right)_{n\geqslant 0}$ dans l'identité de la question précédente. L'exprimer autrement comme une somme de série entière grâce au développement en série entière de l'exponentielle et un produit de Cauchy. Conclure par unicité des coefficients.
4. Relier cette somme à $s_{n,n}$, que vous savez calculer autrement.

Commentaires.

★ **Exercice 34. (Nombre de dérangements) ()**

1. Utiliser le fait qu'une permutation quelconque dans S_n induise un dérangement sur son support. Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ correspond au nombre de façons de choisir le support.
2. Majorer trivialement D_n et en déduire une minoration de R par le théorème de comparaison des séries entières. Obtenir l'identité demandée par un produit de Cauchy et la question précédente.

3. Isoler la série génératrice de $\left(\frac{D_n}{n!}\right)_{n\geqslant 0}$ dans l'identité de la question précédente. L'exprimer autrement comme une somme de série entière grâce au développement en série entière de l'exponentielle et un produit de Cauchy. Conclure par unicité des coefficients.
   Pour l'expression alternative de D_n : écrire $\frac{n!}{e}+\frac{1}{2}$ à l'aide de D_n et du reste d'une série vérifiant le théorème spécial des séries alternées. En déduire un encadrement de $\left(\frac{n!}{e}+\frac{1}{2}\right)-D_n$. Conclure.

Commentaires.

★ Exercice 35. (Nombre d'involutions : 1re étude)

1. Montrer l'inégalité par récurrence double. En déduire une minoration du rayon de convergence par le théorème de comparaison des séries entières.
2. Développer S' en série entière, faire un changement d'indice de sorte à faire apparaître u_{n+2} dans le terme général, puis utiliser la relation de récurrence de l'énoncé.
3. Résoudre l'équation différentielle vérifiée par S'. En déduire son expression, *a priori* valable sur $]-R,R[$. Montrer alors que $z\mapsto e^{z+\frac{z^2}{2}}$ est développable en série entière sur $\mathbb{C}$, et utiliser l'unicité des coefficients pour en déduire que S est aussi développable en série entière sur $\mathbb{C}$.
4. Développer en série entière *explicitement* $z\mapsto e^{z+\frac{z^2}{2}}$ grâce au développement en série entière de l'exponentielle. Utiliser le théorème de sommation par paquets pour que le résultat soit bien sous la forme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\bigstar z^n$. Conclure par unicité des coefficients.

Commentaires.

Exercice 36. (Nombre d'involutions : 2e étude) On note que l'inégalité demandée demande, au fond, d'exprimer u_n en fonction de $z\mapsto e^{z+\frac{z^2}{2}}$: c'est possible grâce à une formule démontrée dans l'un des exercices classiques de ce chapitre. L'équivalent demandée s'obtient d'abord en explicitant r_n (afin d'en faire le développement asymptotique à la précision $\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$), et ensuite par un bon usage de la formule de Stirling et des développements limités usuels (ne pas oublier que pour une quantité dépendant de n à un exposant dépendant de n, il vaut mieux utiliser la relation $a^b=e^{b\ln(a)}$ pour en faire le développement asymptotique).

Commentaires.

Exercice 37. (Dénombrement des solutions d'une équation diophantienne : 1re étude)

1. Développer $x\mapsto\frac{1}{1-x^2}$ et $x\mapsto\frac{1}{1-x^3}$ en série entière et distribuer le produit des deux séries obtenues (possible grâce à un résultat sur les familles sommables). Utiliser ensuite le théorème de sommation par paquets convenablement pour en déduire le résultat voulu.
2. Décomposer en éléments simples $x\mapsto\frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)}$ afin d'en déduire une autre expression sous forme de somme de série entière (voir *Méthodes*, *Développer en série entière*, *Cas des fractions rationnelles*). Utiliser l'unicité des coefficients.
3. Grâce à la question précédente, montrer que $\left(s_n-\left\lfloor\frac{n}{6}\right\rfloor\right)_{n\geqslant 0}$ est une suite 6-périodique. Vérifier qu'elle coïncide pour $0\leqslant n\leqslant 5$ avec l'expression attendue d'après l'énoncé. Conclure.

Commentaires.

Exercice 38. (Dénombrement des solutions d'une équation diophantienne : 2e étude) S'inspirer si besoin de la résolution de l'exercice 37, qui est un cas particulier de ce qu'on cherche à démontrer ici.

1. Développer $x\mapsto\frac{1}{1-x^{\alpha_i}}$ en série entière et distribuer le produit des k séries obtenues (possible grâce à un résultat sur les familles sommables). Utiliser ensuite le théorème de sommation par paquets convenablement pour en déduire le résultat voulu. Le rayon de convergence s'obtient grâce au résultat sur les produits de Cauchy.
2. Deux raisonnements possibles (et au fond équivalents). Soit on interprète le fait d'être racine de $1-X^{\alpha_i}$ en termes d'ordre dans le groupe $\mathbb{U}$, et on utilise convenablement le théorème de Lagrange ; soit on écrit z en fonction des z^{α_i} grâce au théorème de Bézout.
3. On utilise le théorème de décomposition en éléments simples. La seule chose à démontrer est qu'aucune racine du polynôme au dénominateur (de la première question) n'est d'ordre de multiplicité k, hormis 1. Utiliser le fait que les $1-X^{\alpha_i}$ soient scindés et à racines simples, afin d'en déduire qu'une racine d'ordre de multiplicité k doit être une racine commune à tous ces polynômes, et conclure avec la question précédente.

4. Développer en série entière les fractions rationnelles de la question précédente, puis utiliser l'unicité des coefficients pour obtenir une expression de s_n en fonction des α_j et $\beta_{j,\omega}$. Constater que le coefficient provenant du développement en série entière de $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^k}$ est prépondérant devant tous les autres : il suffit donc de calculer α_k pour obtenir l'équivalent de s_n cherché. La méthode est standard.

Commentaires.

Exercice 39. (Chemins de Dyck et nombres de Catalan)

1. Noter que si : $\sum_{i=1}^{n} u_n = 0$, alors il y a autant de 1 que de -1 dans la somme.
2. La définition de chemin de Dyck permet une majoration triviale de C_n, qui suffit à obtenir la minoration proposée du rayon de convergence grâce au théorème de comparaison des séries entières.
3. Noter que pour construire un chemin de Dyck de longueur $2n+2$, il suffit de choisir le dernier entier pair $2k$ tel que $\sum_{i=1}^{2k} u_i = 0$ (justifier la parité comme à la première question), ce qui définit un chemin de Dyck de longueur $2k$, puis de compléter ce chemin avec un autre chemin de Dyck de longueur $2n-2k$ (pourquoi $2n$ et non $2n+2$? remarquer qu'il y a toujours deux indices i et j tels que les valeurs de u_i et u_j soient imposées, à cause des conditions $\sum_{i=1}^{k'} u_i \geqslant 0$ pour tout k' et $\sum_{i=1}^{2n+2} u_i = 0$; si vous comprenez cela, alors vous comprenez aussi que ce chemin de Dyck de longueur $2n-2k$ ne complète pas « naïvement » le premier chemin : si vous le faites naïvement, vous ne respecterez pas le fait que $2k$ définisse le dernier indice tel que $\sum_{i=1}^{2k} u_i = 0$).

   On obtient la relation vérifiée par S^2 en faisant le produit de Cauchy de S par elle-même, et en utilisant la relation de récurrence démontrée à l'instant.
4. Pour tout x, le réel $S(x)$ vérifie une équation polynomiale du second degré. La résoudre. Il y a cependant une indétermination sur le signe (de la formule $\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$). Utiliser la continuité de S en 0 pour obtenir le signe au voisinage de 0, et encore un argument de continuité pour justifier que le signe doit être le même sur tout l'intervalle de définition de S.

   On en déduit l'expression de C_n en développant en série entière $x \mapsto \sqrt{1-4x}$ grâce à un développement en série entière usuel.

Commentaires.

Exercice 40. (Partitions d'un ensemble fini et nombres de Bell)

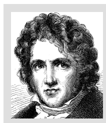
1. Faire une étude exhaustive.
2. Pour partitionner $[\![1, n+1]\!]$, il suffit de choisir le cardinal du premier sous-ensemble de la partition (c'est un entier entre 1 et $n+1$, étant donné qu'une partition ne contient pas l'ensemble vide), puis le premier sous-ensemble en question (d'où le coefficient binomial), puis de partitionner son complémentaire.
3. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ B_n \leqslant n!$, par récurrence à l'aide de la relation de la question précédente (ou bien en construisant une application naturelle de l'ensemble des partitions de $[\![1, n]\!]$ dans S_n, par exemple à l'aide de la décomposition en cycles à supports disjoints). En déduire une minoration du rayon de convergence par le théorème de comparaison des séries entières.

   Obtenir la relation entre S' et S en faisant le produit de Cauchy de la série exponentielle par $\sum_{n\geqslant 0} \frac{B_n}{n!} x^n$, et en le simplifiant grâce à la relation de récurrence démontrée.
4. Résoudre l'équation différentielle. En déduire une nouvelle expression de $S(x)$ comme somme de série entière (développer en série entière les deux exponentielles et utiliser le théorème de Fubini). Utiliser l'unicité des coefficients.

Commentaires.

Équations différentielles linéaires

★ **Exercice 41. (Fonction de Bessel)** (🗎) La méthode est très classique. Voir *Méthodes*, *Applications des séries entières*, *Résolution d'équations différentielles*.



1784-1846

Commentaires.

Exercice 42. (🗎) Voir si besoin *Méthodes*, aux sections *Résolution d'équations différentielles* et *Études de suites*.

1. Raisonner par récurrence double. Utiliser ensuite le théorème de comparaison des séries entières.
2. C'est classique. Voir *Méthodes* aux sections référencées ci-dessus.
3. C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre : on sait résoudre. En déduire S (noter que $S(0)$ est connu). On peut alors écrire S comme un produit de deux fonctions usuellement développables en série entière. Faire leur produit de Cauchy et utiliser l'unicité des coefficients.

Commentaires.

Étude du comportement asymptotique et de la régularité d'une fonction développable en série entière

★ **Exercice 43.** Cela revient à montrer que $z \mapsto f(z_0+z)$ est développable en série entière en 0 pour tout $z_0 \in \mathrm{B}(0,R)$. Écrire $f(z_0+z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z_0+z)^n$ (possible par hypothèse). Partant de là : comment obtenir très naturellement une expression de $f(z_0+z)$ sous forme de somme dont le terme général fait figurer une puissance de z plutôt qu'une puissance de z_0+z ? (Ne surtout pas chercher compliqué.)

Si vous comprenez cette indication, vous aurez encore à utiliser un théorème sur les familles sommables pour vous ramener à une expression de la forme $f(z_0+z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \bigstar z^k$ (noter le changement de nom de l'indice de sommation).

Ne pas oublier de justifier que les théorèmes sur les familles sommables sont licites. C'est possible par absolue convergence en tout point du disque ouvert de convergence d'une série entière.

Commentaires.

Exercice 44. Si $(f_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de fonctions développables en série entière sur $\mathrm{B}(0,R)$, continues sur $\mathrm{B}_f(0,R)$, et convergeant uniformément vers une fonction f, on veut montrer que f est développable en série entière aussi (et continue sur l'adhérence). Une première piste serait de déterminer les coefficients de la série entière à laquelle serait égale f : il est logique de penser qu'ils s'obtiennent en considérant les limites des suites $(a_k(f_n))_{n\geqslant 0}$, où $a_k(f_n)$ désigne le k^{e} coefficient du développement en série entière de f_n. Encore faut-il justifier qu'elles convergent : pour cela, songer à une formule classique, démontrée dans un des exercices de ce chapitre, permettant d'exprimer $a_k(f_n)$ en fonction de f_n (et non de ses dérivées : précision importante). Ainsi la convergence de $(f_n)_{n\geqslant 0}$ impliquerait la convergence de $(a_k(f_n))_{n\geqslant 0}$ pour tout k, vers un nombre complexe a_k.

Pour montrer : $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$, d'abord justifier que cette somme existe bien par comparaison (on sait majorer les a_k en fonction de f grâce à la formule insinuée ci-dessus). Ensuite : majorer $\left| f_n(x) - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \right|$ par des quantités convergeant vers 0 (faire apparaître des différences qu'on sait être petites par ce qui précède ; si vous vous débrouillez bien, votre majoration ne nécessitera aucunement un théorème d'interversion : ne pas perdre de vue que, toujours grâce à la formule classique sous-entendue plus haut, vous pouvez majorer $a_k(f_n) - a_k$ en fonction de $f_n - f$) et passer à la limite quand $n \to +\infty$.

Commentaires.

Exercice 45. (Équivalent asymptotique en un point du bord)

1. Utiliser le théorème de comparaison des séries entières pour s'assurer que S_a est définie sur $]-R,R[$. Ensuite, s'inspirer du théorème de sommation des relations de comparaison pour montrer : $S_a(x) \underset{x\to R^-}{=} o(S_b(x))$, en majorant $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right|$ par une somme à support fini plus $\varepsilon \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$. Vous aurez à justifier : $\lim_{x\to R^-} S_b(x) = +\infty$. Ici sert l'hypothèse de positivité des b_n : voir éventuellement *Méthodes* du chapitre VII, pour voir comment la monotonie ou le signe permet d'intervertir somme et limite.
2. Se ramener au cas précédent, puisque : $a_n - b_n \underset{n\to+\infty}{=} o(b_n)$.
3. Pour le premier équivalent : noter qu'un exemple du cours vous donne le développement en série entière de l'équivalent à trouver. Il suffit de vérifier les hypothèses de l'exercice avec ce développement. Développer $x \mapsto \sqrt{\frac{1}{1-x}}$ en série entière et observer si son coefficient général est équivalent à $\frac{1}{\sqrt{n}}$ à une constante près.

Commentaires.

Exercice 46. (Théorème taubérien faible)


1866-1942

1. Revenir à la définition de la limite. Majorer $\left|\sum_{n=0}^{N} a_n - \ell\right|$ à l'aide d'une quantité qu'on sait être « petite » *via* l'hypothèse de l'énoncé. Vous aurez alors à majorer $\sum_{n=1}^{N} a_n(1-x^n)$ et $\sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n$ par des quantités arbitrairement petites (en valeur absolue), pour x « proche de 1 » (chose qui devra être précisée plus tard).
   Si l'on souhaite majorer la seconde somme en majorant les a_n par $\| (a_n)_{n\geqslant 0} \|_\infty$, on n'est pas en mesure de montrer que la quantité en résultant devient arbitrairement petit : le faire pour voir pourquoi. Utiliser l'hypothèse de l'énoncé sur la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ afin de proposer une majoration des a_n par une meilleure quantité, faisant apparaître un $\frac{1}{N}$ salvateur (car convergeant vers 0).
   Pour la première somme : d'abord factoriser $1-x^n$ de sorte à avoir $(1-x)\bigstar$. Majorer trivialement $\bigstar$ et utiliser l'hypothèse de l'énoncé.
   Vos deux majorations feront apparaître $(1-x)n$ dans le calcul. C'est là que vous devez réfléchir à un choix de x donnant une majoration de $\left|\sum_{n=0}^{N} a_n - \ell\right|$ par une constante fois ε.
2. Une série usuelle permet aisément de fabriquer un contre-exemple.

> **Commentaires.** On peut affaiblir l'hypothèse et exiger uniquement : $a_n \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n}\right)$ (théorème taubérien *fort*). Mais c'est beaucoup plus technique.
> Avec la démonstration du théorème d'Abel radial et cet exercice, vous avez les deux schémas de raisonnement les plus fréquents pour obtenir une continuité sur le bord. Il ne manque plus que le cas où les a_n sont tous positifs : ce sera illustré dans le chapitre de probabilités lorsqu'on étudiera la dérivabilité des fonctions génératrices de variables aléatoires en 1.


1809-1882

★ **Exercice 47. (Théorème de Liouville)** Montrer que S est constante revient à démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $a_n = 0$. Autrement dit : on a une hypothèse sur S (être borné) et on veut en déduire un résultat sur a_n. Quel résultat classique de cette feuille d'exercices permet d'exprimer a_n en fonction de S ? (Et non en fonction des dérivées de S pour lesquelles nous n'avons pas d'information : je parle bien de S.)

Une fois que vous avez identifié à quel résultat je fais allusion, le théorème découle trivialement d'une majoration et d'un passage à la limite.

> **Commentaires.**
> Le théorème de Liouville admet une généralisation stupéfiante appelée *théorème de Picard* : une fonction développable en série entière sur $\mathbb{C}$ qui évite au moins deux points est constante (donc à l'inverse, une telle fonction non constante est quasiment surjective). Une démonstration très élégante utilise la théorie des surfaces de Riemann et les revêtements universels. Sans cela, le théorème de Picard nous est inaccessible.

Exercice 48. (Une généralisation du théorème de Liouville) Même indication que dans l'exercice 47.

> **Commentaires.**

☢ **Exercice 49.**

1. L'hypothèse donne une information sur le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} n a_n z^n$. Conclure par comparaison.
2. Raisonner par contraposée. Si z et z' ont même image par S, partir de l'égalité $0 = S(z) - S(z')$ et y isoler le facteur en a_1. Les autres facteurs nécessitent d'être d'abord mis sous la forme $a_n(z-z')\cdot\bigstar$ (cette factorisation ne sort pas de nulle part : elle permet aux a_n d'avoir le même facteur que a_1, ce qui facilite les opérations à venir). Ainsi on peut écrire une inégalité entre a_1 et les a_n, qui s'avère être le contraire de celle de l'énoncé.

> **Commentaires.**

★ **Exercice 50. (Principe des zéros isolés)**

1. Utiliser l'exercice 43 pour développer f en série entière en z_0. Utiliser le fait que $f(z_0) = 0$ pour factoriser $f(z) - f(z_0)$. Introduire le plus petit entier n_0 tel que a_{n_0} (coefficient du développement en série entière en z_0) soit non nul.
2. Si K est un compact inclus dans U : raisonner par l'absurde en supposant que K contient une infinité de zéros de f. Produire une suite injective de zéros de f, et en extraire une sous-suite convergente par le théorème de Bolzano-Weierstraß. Montrer que la limite ℓ est aussi un zéro de f. Obtenir une absurdité en considérant les boules centrées en ℓ et en invoquant la question précédente.
   On peut aussi utiliser l'exercice 32 du chapitre de topologie : la question précédente montre en effet que l'ensemble des zéros de f est discret.

Écrire ensuite U comme réunion croissante de compacts relatifs. Conclure que l'ensemble des zéros de f dans U est une réunion dénombrable d'ensembles au plus dénombrables.

Commentaires. Par contraposée, le principe des zéros isolés montre que si l'ensemble des zéros de f admet un point d'accumulation (c'est-à-dire : il existe une suite de zéros convergente et toujours distincte de sa limite), alors f est nulle. Ainsi par exemple il n'existe pas de fonction développable en série entière sur un ouvert U contenant 0 tel que : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$, hormis la fonction nulle.
Ce principe des zéros isolés est plus souvent utilisé pour montrer que si deux fonctions sont égales en suffisamment de points, alors elles sont identiquement égales (principe du prolongement analytique). Résultat étonnant et impressionnant !
On peut alléger les hypothèses de l'énoncé : il suffit que f soit développable en série entière autour de chaque point de U (autrement dit, la série de Taylor de f en 0 n'a pas à converger sur tout U : penser par exemple au logarithme sur $\mathbb{R}_+^*$, qui n'est pas développable en série entière sur $\mathbb{R}_+^*$ mais qui l'est autour de chaque point de $\mathbb{R}_+^*$). Il faut alors un argument de connexité pour étendre la nullité autour de chaque point en une nullité globale.

★ **Exercice 51. (Principe du maximum)**

1. La somme $\sum_{n=0}^{+\infty} r^{2n}|a_n|^2$ doit vous faire penser à une identité rencontrée dans un autre exercice de ce chapitre. L'utiliser non pas avec S, mais $z \mapsto S(z_0 + z)$ (pour se ramener à un développement en série entière en 0). Majorer trivialement $|S|$ par son maximum. Noter qu'il s'exprime en fonction de a_0.
2. Noter que $|a_0|^2$ se simplifie dans l'inégalité précédente. Qu'en déduit-on sur les a_n, puis sur S ? Conclure par contraposée.

Commentaires.

☢ **Exercice 52. (Théorème d'Abel angulaire)** Il suffit de reprendre la démonstration du théorème d'Abel radial dans le cours. La seule différence vient lors des majorations finales : on doit majorer $\frac{|z-1|}{1-|z|}$ indépendamment de z, là où dans le cours on avait commodément la simplification $\frac{1-x}{1-x} = 1$. C'est là qu'on utilise l'expression des éléments de Δ_{θ_0}. Noter que $\rho \leqslant \cos(\theta_0)$ si $z = 1 - \rho e^{i\theta} \in \Delta_{\theta_0}$. En déduire une majoration de $\frac{|z-1|}{1-|z|}$ par $\frac{1+|z|}{2\cos(\theta)-\rho}$ puis par $\frac{2}{\cos(\theta_0)}$. Le reste ne pose pas de difficulté majeure.

Commentaires.

Exercice 53. (Les fonctions dérivables au sens complexe sont développables en série entière)

1. Noter qu'on peut mettre $S(z) - S(z_0)$ sous la forme : $S(z) - S(z_0) = (z - z_0)T(z)$, où T est une somme de série entière. Vous pouvez alléger vos calculs en montrant le résultat pour $z_0 = 0$ et en utilisant le résultat de l'exercice 43 pour vous y ramener dans le cas général.
2. C'est le même raisonnement que lorsqu'on dérive selon la variable réelle.
3. Utiliser le développement en série géométrique pour développer l'intégrande, et intégrer terme à terme (licite par convergence normale sur $[0,2\pi]$).
4. Dériver l'intégrale à paramètre $x \mapsto \dfrac{r}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{f\left(z + x\left(re^{i\theta} - z\right)\right)e^{i\theta}}{re^{i\theta} - z}\mathrm{d}\theta$, sachant que la dérivation de l'intégrande est permise par la deuxième question (pour l'hypothèse de domination, noter qu'on intègre sur un segment). Conclure que la dérivée est nulle. En déduire la valeur de cette intégrale à paramètre grâce à sa valeur en 0 et à la question précédente (la fonction g n'est pas compliquée à choisir). Conclure en évaluant cette intégrale à paramètre en 1.

Commentaires. L'hypothèse de continuité de f' peut être enlevée, mais les outils de classes préparatoires ne le permettent absolument pas.