Exercices du chapitre VIII (Séries entières)

✓ : exercice d'application des méthodes, ★ : exercice classique, ☢ : exercice difficile.

Dans l'intégralité de ces exercices, lorsqu'on parle de calculer ou simplifier une somme, cela signifie qu'on attend une expression dépendant uniquement de constantes et fonctions usuelles, et sans les symboles $\sum$ *ni* $\int$.

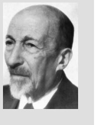
Résultats théoriques sur le rayon de convergence

✓ **Exercice 1.** Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière, dont on note R le rayon de convergence.

1. On suppose que la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est non identiquement nulle et périodique. Déterminer R, puis montrer que $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est une fraction rationnelle.
2. On suppose qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\sum_{n\geqslant 0} a_n (z_0)^n$ converge sans converger absolument. Déterminer R.

✓ **Exercice 2.** Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière. Exprimer son rayon de convergence en fonction de ceux de $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n} z^{2n}$ et $\sum_{n\geqslant 0} a_{2n+1} z^{2n+1}$.

✓ **Exercice 3. (Produit d'Hadamard)** Soient $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n b_n z^n$ est supérieur ou égal à $R_a R_b$, et qu'il n'y a pas égalité en général.


1865-1963

Exercice 4. (Formule d'Hadamard) Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. On note $\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}$ la plus grande valeur d'adhérence de la suite $\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)_{n\geqslant 1}$ (avec $\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} = +\infty$ si la suite n'est pas bornée). On admet son existence. Montrer : $R = \dfrac{1}{\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}}$ (avec la convention : $\dfrac{1}{0} = +\infty$, $\dfrac{1}{+\infty} = 0$).

Calculs de sommes, produits de Cauchy

✓ **Exercice 5.** Après avoir déterminé le rayon de convergence, calculer la somme de chaque série entière :

$$\text{(a)}\ \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!},\quad \text{(b)}\ \sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n(n+1)},\quad \text{(c)}\ \sum_{n\geqslant 0} \sin(n)\frac{x^n}{n!},$$
$$\text{(d)}\ \sum_{n\geqslant 0} (n+1)x^{2n},\quad \text{(e)}\ \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{2n+1}}{2n+1},\quad \text{(f)}\ \sum_{n\geqslant 0} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\right) x^n.$$

✓ **Exercice 6.** Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\cos(n\theta)}{2^n} = 2 \cdot \frac{5\cos(\theta) - 4}{(5 - 4\cos(\theta))^2}$.

✓ **Exercice 7.** Calculer : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1}$.

Exercice 8. (Identités démontrées avec un produit de Cauchy)

1. Soit $(a,b) \in \mathbb{N}^2$. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

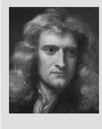
$$(a)\quad \sum_{k=0}^{n} \binom{k+a}{k}\binom{n-k+b}{n-k} = \binom{n+a+b+1}{n},\quad (b)\quad \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} = 4^n.$$

2. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k}\binom{2k}{k} = \frac{2n+1}{4^n}\binom{2n}{n}$.

Exercice 9. (Somme des puissances) Pour tous $\alpha \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_{n,\alpha} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^{\alpha}$.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Montrer que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_{n,3}x^n$ est de rayon de convergence au moins 1, et que pour tout $x \in]-1,1[$ on a : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,3}x^n = \frac{x}{(1-x)^5}\left(x^2+4x+1\right)$.
2. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n,3} = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.
3. Obtenir de même $u_{n,\alpha}$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \{4,5\}$ par cette approche.

✓ **Exercice 10. (Transformation d'Abel)** Soit $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence 1. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$. Soient f et g les sommes des séries entières $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} S_n x^n$. Exprimer g en fonction de f.


1643-1727

★ **Exercice 11. (Sommes de Newton)** Soient $x_1, \dots, x_n$ des nombres complexes (non nécessairement distincts). On pose : $\forall p \in \mathbb{N}$, $S_p = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x_i)^p$, et : $P = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} (X - x_i)$. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on note σ_i la i^{e} fonction symétrique élémentaire de $x_1, \dots, x_n$, et : $\sigma_0 = 1$.

En développant en série entière $x \mapsto \dfrac{P'(1/x)}{xP(1/x)}$, montrer : $\forall p \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{\min(p,n)} (-1)^i \sigma_i S_{p-i} = 0$.

Fonctions développables ou non développables en série entière

✓ **Exercice 12.** Développer en série entière en 0 les applications :

$$\text{(a)}\quad x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad \text{(b)}\quad x \mapsto \arcsin(x),\quad \text{(c)}\quad x \mapsto \arccos(x),\quad \text{(d)}\quad x \mapsto \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right).$$

✓ **Exercice 13.** Développer en série entière en 0 les applications suivantes, en prenant soin de préciser sur quel intervalle ouvert le développement est valide :

$$\text{(a)}\quad f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad \displaystyle\int_0^x \arctan(t)\mathrm{d}t \end{cases},\quad \text{(b)}\quad g : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad e^{-x}\sin(x) \end{cases},\quad \text{(c)}\quad h : \begin{cases} \mathbb{R}\setminus]2,3[& \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad \ln(x^2-5x+6) \end{cases}.$$

Exercice 14. Même chose que dans l'exercice précédent, avec :

$$\text{(a)}\quad f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad e^{-x^2}\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t \end{cases},\quad \text{(b)}\quad g : \begin{cases} [-1,1] & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad (\arcsin(x))^2 \end{cases},\quad \text{(c)}\quad h : \begin{cases}]-1,1[& \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{t}{1-x\sin(t)}\mathrm{d}t \end{cases}.$$

✓ **Exercice 15.** Montrer que $f : \begin{cases} \mathbb{R}^* & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad \dfrac{\sin(x)}{x} \end{cases}$ se prolonge en une application $\tilde{f}$ de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$, et donner les valeurs de $\tilde{f}^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

✓ **Exercice 16. (Développement en série entière en 0 des fractions rationnelles)** Développer en série entière en 0 les applications :

$$\text{(a)}\quad x \mapsto \frac{1}{(x-1)(x+2)},\quad \text{(b)}\quad x \mapsto \frac{1}{(x-2)^2},\quad \text{(c)}\quad x \mapsto \frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}.$$


1880-1968

Exercice 17. (Fonctions absolument monotones et théorème de Bernstein)

1. Soit $f : [0,R[\to \mathbb{R}$ une application de classe C^{∞} sur $[0,R[$, telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} \geqslant 0$. Montrer que f est développable en série entière sur $[0,R[$.
2. Montrer que la fonction tangente est développable en série entière sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

✓ **Exercice 18.** Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $f :]-a,a[\to \mathbb{C}$ une application de classe C^{∞} sur $]-a,a[$. On suppose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|f^{(n)}\|_{\infty,]-a,a[} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{n!}{a^n}\right)$. Montrer que f est développable en série entière sur I.

Exercice 19. (Fonction de classe C^∞ non développable en série entière en 0 : un autre exemple)

1. Montrer que l'application $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{2^n ix}}{n!}$ est définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $f^{(k)}(0)$.
2. Montrer que f n'est pas développable en série entière en 0.

Exercice 20. (Fonction de classe C^∞ non développable en série entière en 0 : deux autres exemples)

1. Montrer que l'application $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t(1-itx)}\mathrm{d}t$ est définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, mais qu'elle n'est pas développable en série entière en 0.
2. Même question avec l'application $g : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k(1-ikx)}$.

Exercice 21. Montrer que les applications $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$, $z \mapsto \mathrm{Im}(z)$, $z \mapsto \bar{z}$ et $z \mapsto |z|^2$ ne sont pas développables en série entière dans un voisinage de 0.

Exercice 22. Soit $A \in \mathrm{M}_p(\mathbb{R})$ une matrice trigonalisable sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que la fonction $f_A : x \mapsto \ln(\det(\mathrm{I}_p - xA))$ soit définie sur $]-r, r[$, et tel que : $\forall x \in]-r, r[$, $f_A(x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{tr}\,(A^n)}{n} x^n$.

★ **Exercice 23. (Inverse d'une fonction développable en série entière)** Soit $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R_\alpha \in]0, +\infty]$, telle que : $\alpha_0 = 1$. L'objectif de cet exercice est de montrer l'existence et l'unicité d'une série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \beta_n z^n$ de rayon de convergence $R_\beta \in]0, +\infty]$ telle que pour tout z appartenant aux domaines de convergence des deux séries (c'est-à-dire tel que $|z| < \min(R_\alpha, R_\beta)$), on ait : $\displaystyle\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n z^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n z^n\right) = 1 \quad (*)$.

1. Montrer que si $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \beta_n z^n$ est de rayon de convergence $R_\beta > 0$ et vérifie $(*)$, alors la suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie : $\beta_0 = 1$, et : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k} = 0 \quad (\dagger)$.

Soit r un réel tel que : $0 < r < R_\alpha$.

2. Montrer qu'il existe un réel $M > 0$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\alpha_n| \leqslant \dfrac{M}{r^n}$.
3. Montrer que $(\dagger)$ admet une unique solution $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$: $|\beta_n| \leqslant \dfrac{M(M+1)^{n-1}}{r^n}$.
4. Montrer que le rayon de convergence R_β de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \beta_n z^n$ vérifie $R_\beta \geqslant \dfrac{r}{M+1}$, et conclure.

Intégration et dérivation terme à terme

✓ **Exercice 24. (Compliquer pour simplifier : intégrer en développant en série entière)** En passant par un développement en série entière, et sans utiliser d'autre technique de calcul intégral que l'intégration terme à terme, déterminer des primitives sur $]-1,1[$ des applications suivantes :

(a) $x \mapsto \ln(1+x)$, (b) $x \mapsto \arctan(x)$, (c) $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}\left(1 - x^2\right)$, (d) $x \mapsto \dfrac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}$, (e) $x \mapsto \arcsin(x)$.

Exercice 25. Montrer : $\displaystyle\int_0^1 \frac{t(\ln(t))^2}{2(1-t)^2}\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

★ **Exercice 26. (Formule intégrale de Cauchy)** Soit $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in]0, +\infty]$, dont on note S la somme.

1. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall r \in]0, R[$, $a_n = \dfrac{1}{2\pi r^n} \displaystyle\int_0^{2\pi} S\left(re^{i\theta}\right) e^{-in\theta}\mathrm{d}\theta$.
2. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall r \in]0, R[$, $\left|S^{(n)}(0)\right| \leqslant \dfrac{n!}{r^n} \cdot \displaystyle\max_{|z|=r} |S(z)|$.

Exercice 27. (Formule de Parseval) Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in]0,+\infty]$, dont on note $S : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ la somme.

1. Montrer : $\forall r \in]0,R[,\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|S\left(re^{i\theta}\right)\right|^2 \mathrm{d}\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n}$.
2. On suppose : $R \geqslant 1$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $a_n \in \mathbb{Z}$, et que S est bornée sur $\mathrm{B}_f(0,1)$. Montrer que S est un polynôme.

Exercice 28. (Calcul de $\zeta(2)$) Vous aurez besoin d'un des développements en série entière de l'exercice 12.

1. Montrer : $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[,\ t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{(\sin(t))^{2n+1}}{2n+1}$. Cette identité vaut-elle également pour $t = \frac{\pi}{2}$?
2. En déduire : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$, et donner la valeur exacte de cette somme.
3. Montrer : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Séries entières génératrices, dénombrement

✓ **Exercice 29. (Suite récurrente linéaire d'ordre 3 à coefficients constants)** Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle vérifiant : $a_0 = -4$, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} - a_n$.

1. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leqslant 2^{n+2}$, et en déduire que le rayon de convergence R de la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est non nul.

On note : $\rho = \min(1, R)$, et S la somme de la série entière de la question précédente.

2. Montrer : $\forall x \in]-\rho,\rho[,\ S(x) = \frac{6x^2+6x-4}{(x-1)^2(x+1)}$, et en déduire une expression explicite de a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

✓ **Exercice 30.** Soient $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites réelles définies par : $u_0 = 0$, $v_0 = -5$, et la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_{n+1} &= 3u_n - 4v_n + 3 \\ v_{n+1} &= 2u_n - 3v_n - 1 \end{cases}$. Calculer les sommes des séries entières $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n x^n$, et en déduire une expression explicite de u_n et v_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 31. (Suite récurrente linéaire à coefficients constants : cas général) Soit $p \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, et soit $P = X^p + \sum_{i=0}^{p-1} a_i X^i \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme unitaire de degré p. On suppose : $a_0 \neq 0$, et que sa décomposition en facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}$ est de la forme : $P = \prod_{i=1}^{k} (X-\alpha_i)^{m_i}$, avec $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, et : $\forall i \in [\![1,k]\!]$, $(\alpha_i, m_i) \in \mathbb{C}\times(\mathbb{N}\setminus\{0\})$. Les α_i sont tous distincts.

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite complexe vérifiant la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+p} + \sum_{i=0}^{p-1} a_i u_{n+i} = 0$. $(*)$

1. Soit r la plus grande racine réelle positive du polynôme $X^p - \sum_{i=0}^{p-1} |a_i| X^i$ (pourquoi existe-t-elle ?). On pose : $c = \max_{0\leqslant i\leqslant p-1} |u_i|$. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant c\cdot r^n$, et en déduire que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$ est de rayon de convergence R non nul.
2. On note S la somme de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$. Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{C}_{p-1}[X]$ tel que, pour tout x au voisinage de 0, on ait : $S(x) = \frac{Q(x)}{\prod_{i=1}^{k} (1-\alpha_i x)^{m_i}}$.
3. En déduire qu'il existe $(Q_i)_{1\leqslant i\leqslant k} \in \prod_{i=1}^{k} \mathbb{C}_{m_i-1}[X]$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum_{i=1}^{k} Q_i(n)\alpha_i^n$.
4. Montrer que réciproquement, toutes les suites de la forme de la question précédente vérifient $(*)$.

Exercice 32. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite réelle définie par : $u_0 = u_1 = 1$, et : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u_k u_{n-k}$.

1. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant n!$, et en déduire que le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{u_n}{n!}x^n$ est strictement positif.

On note S la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{u_n}{n!}x^n$.

2. Montrer : $\forall x \in]-R,R[$, $2\left(S'(x)-1\right) = \left(S(x)\right)^2 - 1$.
3. En déduire : $\forall x \in]-R,R[$, $S(x) = \tan(x) + \dfrac{1}{\cos(x)}$.
4. Conclure que les fonctions $x \mapsto \tan(x)$ et $x \mapsto \dfrac{1}{\cos(x)}$ sont développables en série entière, et écrire les coefficients de leurs développements à l'aide de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

Exercice 33. (Nombre de surjections) Soient m et n deux entiers naturels. Nous allons compter le nombre de surjections $s_{m,n}$ d'un ensemble à m éléments dans un ensemble à n éléments. On pose par convention : $s_{0,0} = 1$.

1. Montrer : $n^m = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}s_{m,k}$, avec la convention : $0^0 = 1$.
2. Montrer que les séries entières $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{s_{m,n}}{n!}x^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{n^m}{n!}x^n$ sont de rayon de convergence infini, et que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{s_{m,n}}{n!}x^n\right)\cdot e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^m}{n!}x^n$.
3. Déduire de l'égalité précédente qu'on a : $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2$, $s_{m,n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}k^m$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k k^n$.

★ **Exercice 34. (Nombre de dérangements)** Soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. On dit qu'une permutation σ de $[\![1,n]\!]$ est un *dérangement* si l'on a : $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\sigma(k) \neq k$. Soit D_n le nombre de dérangements dans S_n. Par convention : $D_0 = 1$.

1. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n! = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D_{n-k}$.
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{D_n}{n!}x^n$ est de rayon de convergence R au moins 1, et que : $\forall x \in]-1,1[$, $\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{D_n}{n!}x^n\right)e^x = \dfrac{1}{1-x}$.
3. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $D_n = n!\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$, puis que : $\forall n \in \mathbb{N}$ $D_n = \left\lfloor \dfrac{n!}{e} + \dfrac{1}{2}\right\rfloor$.

★ **Exercice 35. (Nombre d'involutions : 1re étude)** Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite à valeurs réelles vérifiant la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = (n+1)u_n + u_{n+1}$, avec : $u_0 = u_1 = 1$.

1. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant n!$, et en déduire que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{u_n}{n!}z^n$ est de rayon de convergence R non nul.
2. On note $S : z \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u_n}{n!}z^n$ sa somme. Montrer : $\forall x \in]-R,R[$, $S'(x) = (1+x)S(x)$, et : $S(0) = 1$.
3. En déduire : $R = +\infty$, et : $\forall z \in \mathbb{C}$, $S(z) = e^{z+\frac{z^2}{2}}$.
4. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\frac{A_n^{2\ell}}{2^\ell \ell!}$.

On peut démontrer que u_n décompte le nombre d'involutions de S_n : vous pouvez essayer de le vérifier.

Exercice 36. (Nombre d'involutions : 2e étude) On reprend la suite réelle de l'exercice 35. Pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, soit r_n l'unique solution de l'équation : $x^2 + x = n$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $M_n = \dfrac{n!}{(r_n)^n}e^{r_n + \frac{(r_n)^2}{2}}$.
Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $u_n \leqslant M_n$, et qu'on a : $M_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}n^{\frac{n+1}{2}}e^{-\frac{n}{2}+\sqrt{n}-\frac{1}{4}}$.

Exercice 37. (Dénombrement des solutions d'une équation diophantienne : 1re étude) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons : $s_n = \operatorname{card}\left(\left\{(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2 \mid 2n_1 + 3n_2 = n\right\}\right)$.

1. Montrer que $\sum\limits_{n \geqslant 0} s_n x^n$ est de rayon de convergence au moins 1, et que : $\forall x \in]-1,1[$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} s_n x^n = \dfrac{1}{(1-x^2)(1-x^3)}$.
2. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $s_n = \dfrac{5}{12} + \dfrac{(-1)^n}{4} + \dfrac{n}{6} + \dfrac{2}{3\sqrt{3}} \sin\left(\dfrac{2\pi(n+1)}{3}\right)$.
3. Conclure en montrant que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $s_n = \left\lfloor \dfrac{n}{6} \right\rfloor + 1$ si $n \not\equiv 1 \bmod 6$, et : $s_n = \left\lfloor \dfrac{n}{6} \right\rfloor$ si $n \equiv 1 \bmod 6$.

Exercice 38. (Dénombrement des solutions d'une équation diophantienne : 2e étude) Soient $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $(\alpha_i)_{i \in [\![1,k]\!]} \in \mathbb{N}^k$ une famille d'entiers naturels *premiers entre eux dans leur ensemble.* Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$s_n = \operatorname{card}\left(\left\{(n_i)_{i \in [\![1,k]\!]} \in \mathbb{N}^k \mid \sum_{i=1}^{k} \alpha_i n_i = n\right\}\right).$$

1. Montrer que $\sum\limits_{n \geqslant 0} s_n x^n$ est de rayon de convergence au moins 1, et que : $\forall x \in]-1,1[$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} s_n x^n = \prod\limits_{i=1}^{k} \dfrac{1}{1 - x^{\alpha_i}}$.
2. Montrer que si $z \in \mathbb{C}$ est une racine de $1 - X^{\alpha_i}$ pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, alors : $z = 1$.
3. Notons : $\mathrm{U} = \bigcup\limits_{i=1}^{k} \{\omega \in \mathbb{C} \mid \omega^{\alpha_i} = 1\}$. Montrer qu'il existe $\left((\alpha_j)_{1 \leqslant j \leqslant k}, \left((\beta_{j,\omega})_{1 \leqslant j \leqslant k-1}\right)_{\omega \in U}\right) \in \mathbb{C}^k \times \left(\mathbb{C}^{k-1}\right)^{\mathrm{U}}$ tel que :
$$\forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} s_n x^n = \sum_{j=1}^{k} \frac{\alpha_j}{(1-x)^j} + \sum_{\omega \in \mathrm{U}} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\beta_{j,\omega}}{(\omega - x)^j}.$$
4. En déduire : $s_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \left(\prod\limits_{i=1}^{k} \dfrac{1}{\alpha_i}\right) n^{k-1}$.


1814-1894

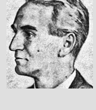
★ **Exercice 39. (Chemins de Dyck et nombres de Catalan)** Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on appelle *chemin de Dyck de taille n* une famille $(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ d'éléments de $\{-1,1\}^n$ telle que : $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\sum\limits_{i=1}^{k} u_i \geqslant 0$, et : $\sum\limits_{i=1}^{n} u_i = 0$.

1. Montrer que si n est un entier impair, alors il n'existe pas de chemin de Dyck de taille n.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note C_n le nombre de chemins de Dyck de longueur $2n$ (avec $C_0 = 1$ par convention).

2. Montrer que la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 0} C_n x^n$ est de rayon de convergence supérieur ou égal à $\dfrac{1}{4}$. On note S sa somme.
3. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $C_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$, et en déduire : $\forall x \in \left]-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right[$, $x\,(S(x))^2 = S(x) - 1$.
4. En déduire : $\forall x \in \left]-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right[$, $S(x) = \dfrac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$, et que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $C_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$.

Les nombres de Catalan C_n permettent aussi de compter le nombre d'arbres binaires à $n+1$ feuilles, le nombre de façons de placer des parenthèses dans le produit $a_0 \cdots a_n$, et bien d'autres choses encore.


1883-1960

Exercice 40. (Partitions d'un ensemble fini et nombres de Bell) Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, soit B_n le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments. On pose aussi : $B_0 = 1$.

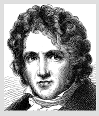
1. Montrer : $B_3 = 5$.
2. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} B_k$.
3. Montrer que $\sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{B_n}{n!} x^n$ est de rayon de convergence R non nul, et que sa somme S vérifie l'équation différentielle : $\forall x \in]-R, R[$, $S'(x) = e^x S(x)$.
4. En déduire : $\forall x \in]-R, R[$, $S(x) = e^{e^x - 1}$, puis : $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_n = \dfrac{1}{e} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{k^n}{k!}$.

Équations différentielles linéaires

★ **Exercice 41. (Fonction de Bessel)** Déterminer les solutions développables en série entière en 0 de l'équation différentielle linéaire :

$$\forall x \in I, \quad x^2y''(x) + xy'(x) + x^2y(x) = 0,$$

sur un intervalle I contenant 0 et à préciser.



1784-1846

Exercice 42. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $a_0 = a_1 = 1$ et : $\forall n \geqslant 1$, $a_{n+1} = a_n + 2\dfrac{a_{n-1}}{n+1}$.

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a $1 \leqslant a_n \leqslant n^2$. En déduire le rayon de convergence R de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_nx^n$.
2. Montrer que la somme de cette série entière vérifie l'équation différentielle :
$$\forall x \in]-R, R[, \quad (1-x)y'(x) - (1+2x)y(x) = 0.$$
3. Résoudre cette équation différentielle, et en déduire la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_nx^n$, puis une expression de a_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Étude du comportement asymptotique et de la régularité d'une fonction développable en série entière

★ **Exercice 43.** Soit $R \in]0, +\infty]$. Montrer que si f est développable en série entière sur $\mathrm{B}(0, R)$, alors f est développable en série entière en tout point de $\mathrm{B}(0, R)$.

Exercice 44. Soit $R \in \mathbb{R}_+^*$. Soit E l'ensemble des fonctions $f : \mathrm{B}_f(0, R) \to \mathbb{C}$ continues sur $\mathrm{B}_f(0, R)$ et développables en série entière sur $\mathrm{B}(0, R)$. Montrer que $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est fermé dans $(\mathrm{C}^0(\mathrm{B}_f(0, R), \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$.

Exercice 45. (Équivalent asymptotique en un point du bord) Soient $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_nx^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} b_nx^n$ deux séries entières. On note S_a et S_b leurs sommes. On suppose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n > 0$, que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} b_nx^n$ est de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$, et que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} b_nR^n$ diverge.

1. On suppose : $a_n \underset{n\to+\infty}{=} o(b_n)$. Justifier que S_a est définie sur $]-R, R[$, et montrer : $S_a(x) \underset{x\to R^-}{=} o(S_b(x))$.
2. On suppose : $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$. Comparer S_a et S_b au voisinage de R.
3. Déduire de ce qui précède : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^kx^n \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$, et : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}} \underset{x\to 1^-}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{1-x}}$.

1866-1942

Exercice 46. (Théorème taubérien faible) Soit $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_nx^n$ une série entière de rayon de convergence 1, dont on note S la somme. On suppose que : $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} S(x) = \ell$ existe et est finie.

1. On suppose : $a_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge et que sa somme est ℓ.
2. Montrer que le résultat de la question précédente est faux si on enlève l'hypothèse $a_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

1809-1882

★ **Exercice 47. (Théorème de Liouville)** Soit $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_nz^n$ une série entière de rayon de convergence $+\infty$, dont on note S la somme. On suppose que S est bornée sur $\mathbb{C}$.

Exercice 48. (Une généralisation du théorème de Liouville) Soit $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_nz^n$ une série entière de rayon de convergence $+\infty$, dont on note S la somme. On suppose qu'il existe $(A, B) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $d \in \mathbb{N}$ tels que : $\forall z \in \mathbb{C}$, $|S(z)| \leqslant A|z|^d + B$. Montrer que S est une application polynomiale de degré au plus d.

☢ **Exercice 49.** Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite complexe telle que la série $\sum_{n\geqslant 0} na_n$ converge absolument.

1. Montrer que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est de rayon de convergence supérieur ou égal à 1. On note S sa somme.
2. On suppose : $a_1 \neq 0$, et : $\sum_{n=2}^{+\infty} n|a_n| < |a_1|$. Montrer que $S : \mathrm{B}(0,R) \to \mathbb{C}$ est injective.

★ **Exercice 50. (Principe des zéros isolés)** Soit $R \in]0,+\infty]$. Soit $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une fonction développable en série entière sur $\mathrm{B}(0,R)$, non identiquement nulle.

1. Soit $z_0 \in \mathrm{B}(0,R)$ tel que : $f(z_0) = 0$. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ et g une application analytique sur $\mathrm{B}(0,R)$ tels que :
   - pour tout $z \in \mathrm{B}(0,R)$, on ait : $f(z) = (z-z_0)^{n_0} g(z)$, et : $g(z_0) \neq 0$;
   - il existe $r \in]0,R]$ tel que $g(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathrm{B}(z_0,r)$.
2. Montrer que tout compact inclus dans $\mathrm{B}(0,R)$ ne contient qu'un nombre fini de zéros de f, et en déduire que l'ensemble des zéros de f dans $\mathrm{B}(0,R)$ est au plus dénombrable.

★ **Exercice 51. (Principe du maximum)** Soient $R \in \mathbb{R}_+^*$ et S une fonction développable en série entière sur $\mathrm{B}(0,R)$, continue sur $\mathrm{B}_f(0,R)$.

1. On suppose dans cette question que $|S|$ atteint son maximum sur $\mathrm{B}_f(0,R)$ en un point z_0 de $\mathrm{B}(0,R)$. On note $(a_n)_{n\geqslant 0}$ la suite des coefficients du développement en série entière de S en z_0. Montrer que pour tout r au voisinage de 0, on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} r^{2n}|a_n|^2 \leqslant |a_0|^2$.
2. En déduire : $\max_{z\in \mathrm{B}_f(0,R)} |S(z)| = \max_{z\in \mathrm{S}(0,R)} |S(z)|$ (*principe du maximum*).

☢ **Exercice 52. (Théorème d'Abel angulaire)** Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1, dont on note S la somme. On suppose que la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge. Pour tout $\theta_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, on pose :

$$\Delta_{\theta_0} = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1,\ \exists \rho \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0],\ z = 1 - \rho e^{i\theta} \right\}.$$

Montrer : $\lim_{z\to 1} S_{|\Delta_{\theta_0}}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Exercice 53. (Les fonctions dérivables au sens complexe sont développables en série entière !)

1. Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, dont on note $S : \mathrm{B}(0,R) \to \mathbb{C}$ la somme. Montrer : $\forall z_0 \in \mathrm{B}(0,R),\ \lim_{z\to z_0} \frac{S(z)-S(z_0)}{z-z_0} = S'(z_0)$, où $S'(z_0)$ est définie formellement comme vous l'imaginez pour une série entière, au même titre que pour un polynôme (*bien noter que z tend vers z_0 dans $\mathbb{C}\setminus\{z_0\}$*).

On s'intéresse à la réciproque, autrement plus impressionnante et inattendue. Soit $f : \mathrm{B}(0,R) \to \mathbb{C}$ une application telle que, pour tout $z_0 \in \mathrm{B}(0,R)$, la limite : $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$, existe et soit finie. On note $f'(z_0)$ cette limite pour tout $z_0 \in \mathrm{B}(0,R)$, et on suppose que l'application f' ainsi définie est continue sur $\mathrm{B}(0,R)$.

2. Montrer que si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\gamma : I \to \mathrm{B}(0,R)$ une application de classe C^1, alors $f\circ\gamma$ est de classe C^1 sur I et on a : $(f\circ\gamma)' = \gamma' \cdot f'\circ\gamma$.
3. Soient $r > 0$ et $g : \mathrm{S}(0,R) \to \mathbb{C}$ une application continue. Montrer que l'application $z \mapsto \frac{r}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{g\left(re^{i\theta}\right)e^{i\theta}}{re^{i\theta}-z}\mathrm{d}\theta$ est développable en série entière sur $\mathrm{B}(0,R)$.
4. Montrer : $\forall r \in]0,R[,\ \forall z \in \mathrm{B}(0,R),\ f(z) = \frac{r}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f\left(re^{i\theta}\right)e^{i\theta}}{re^{i\theta}-z}\mathrm{d}\theta$. Conclure. *On montrera que l'application* $x \mapsto \frac{r}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f\left(z + x\left(re^{i\theta}-z\right)\right)e^{i\theta}}{re^{i\theta}-z}\mathrm{d}\theta$ *est constante.*