Exercices du chapitre V (Réduction des endomorphismes) – Indications

L'icône « (🗎) » indique que les documents *Méthodes* donnent des conseils plus généraux.
La lettre « C » indique que la *Banque des Cent* contient ou contiendra des exercices analogues.

Révisions et approfondissements

Exercice 1. (Espaces vectoriels quotients)

1. Puisque la structure de groupe quotient est déjà définie, il suffit de vérifier que si $\bar{x} = \bar{x'}$ alors : $\forall \lambda \in K$, $\overline{\lambda x} = \overline{\lambda x'}$. Immédiat par stabilité de F par multiplication externe.
2. Prendre une base d'un supplémentaire de F dans E et vérifier qu'elle est libre et génératrice modulo F. Pour l'indépendance linéaire : se souvenir qu'être nul modulo F équivaut à appartenir à F. Pour l'aspect générateur : d'abord décomposer un vecteur dans la somme $E = F + G$ et réduire modulo F.
3. Utiliser le théorème d'isomorphisme et la question précédente.
4. Par le théorème de factorisation, la projection canonique $E \to E/G$ induit une application surjective $E/F \to E/G$. Noter que l'hypothèse dimensionnelle implique son injectivité : l'utiliser pour obtenir $F = G$.
5. Utiliser le théorème de factorisation et le fait que E/H soit de dimension 1 : deux vecteurs de cet espace vectoriel sont toujours liés.
6. Montrer que u induit une application linéaire surjective de $\mathrm{im}(v)$ dans $\mathrm{im}(u \circ v)/\mathrm{im}(u \circ v \circ w)$. Utiliser le théorème de factorisation puis le fait que l'image d'une application linéaire soit nécessairement de dimension plus petite que celle de départ.

Commentaires.

Exercice 2. (Diviseurs de zéro dans $\mathrm{M}_n(K)$) Noter que $AB = 0_{\mathrm{M}_n(K)}$ si et seulement si $\mathrm{im}(B)$ est inclus dans $\ker(A)$. Cela donne une condition suffisante simple pour que A ne soit pas un diviseur de zéro. Cette condition est nécessaire : si $\ker(A) \neq \{0\}$, comment construire B non nulle pour que son image soit bien incluse dans $\ker(A)$? Conclure.

Commentaires.

Exercice 3. (Une formule d'inversion)

1. Remarquer que c'est la matrice relativement à la base canonique d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ très simple à décrire et à inverser.
2. Réécrire l'identité de l'énoncé sous une forme matricielle grâce à la matrice de la question précédente.
3. Utiliser le fait que toute application linéaire soit une surjection sur son image pour en déduire une expression reliant $s_{n,k}$ (le nombre de surjections recherché) et k^n. Vous devez trouver une formule analogue à celle de la question précédente, où le coefficient binomial découle du nombre de choix possibles de l'image.

Commentaires.

★ **Exercice 4. (Matrice à diagonale strictement dominante)** Raisonner par contraposée : s'il existe X non nul dans $\ker(A)$, regarder ligne à ligne ce que donne l'égalité $AX = 0_{\mathrm{M}_{n,1}(K)}$. Pour avoir une inégalité comme celle de l'énoncé, il faut se « débarrasser » des coordonnées de X dans ces égalités : comment les majorer (en valeur absolue) pour y parvenir ?

Commentaires.

Exercice 5.

1. Le cas où A est inversible est facile. Sinon : se souvenir de la définition des coefficients de la comatrice, et que le rang de A est égal à la taille des plus grandes matrices extraites inversibles. Vous en déduisez une condition simple sur le rang de A pour que la comatrice soit nulle. Il reste un dernier cas à traiter : utiliser une relation de dépendance entre les colonnes de A pour en déduire une relation de dépendance entre les colonnes de la comatrice de A.
2. Comparer les rangs montre que l'égalité est impossible sauf si A est nulle ou si A est inversible (de déterminant 1) et vérifie une certaine relation, aisément conséquence de la formule bien connue liant A et $\mathrm{com}(A)^\top$.

Commentaires.

Exercice 6. Montrer que $f(\mathrm{I}_n) = 1$ et $f(0_{\mathrm{M}_n(K)}) = 0$ grâce à l'identité de l'énoncé. Conclure que $f(A) \neq 0$ pour A inversible en raisonnant comme on le fait avec les morphismes de groupes. Ensuite : utiliser l'invariance du rang pour montrer que si A n'est pas inversible, alors A est équivalente à une matrice B dont il est très facile de montrer que $f(B) = 0$ en passant par $f(B^k)$.

Commentaires.

Exercice 7. Se souvenir que $E_{i,j}E_{k,\ell}$ s'exprime simplement en fonction de $E_{i,\ell}$. En appliquant l'identité de l'énoncé avec ces produits dans les deux sens, et en variant les choix de i, j, k et ℓ : montrer que $f(E_{i,j}) = 0$ pour tous i et j distincts, et que $f(E_{i,i}) = f(E_{1,1})$ pour tout i. Conclure par linéarité.

Il peut être utile de noter que, sans même utiliser l'hypothèse de l'énoncé, il existe A tel que f soit de la forme $M \mapsto \mathrm{tr}(AM)$ (pour le montrer : montrer que l'application $A \mapsto (M \mapsto \mathrm{tr}(AM))$ est une bijection de E dans $\mathrm{L}(E, K)$).

Commentaires.

★ **Exercice 8.** Pour le sens direct : écrire ce que signifie par définition l'existence d'un inverse dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$ et prendre le déterminant dans cette égalité. Noter que le déterminant doit être un entier. Pour le sens réciproque : comment exprimer explicitement M^{-1} en fonction de $\det(M)$ et des coefficients de M (que l'on sait être entiers) ?

Commentaires.

★ **Exercice 9.** Noter que dénombrer $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ revient à dénombrer les familles libres à n éléments de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$, et qu'une telle famille peut se construire pas à pas, en choisissant pour i^{e} vecteur un vecteur qui n'est pas combinaison linéaire des $i-1$ précédents. Compter le nombre de combinaisons linéaires possibles de $i-1$ vecteurs en se souvenant que les scalaires sont dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Conclure par principe multiplicatif.

Pour $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$: utiliser le théorème d'isomorphisme (ou sa version plus faible : le principe des bergers).

Commentaires.

Exercice 10. D'abord montrer que G est isomorphe à un sous-groupe de S_p avec $p = \mathrm{card}(G)$ (exercice 36 du chapitre III). Passer ensuite par les matrices associées aux endomorphismes de K^p définis sur la base canonique par $\vec{e}_i \mapsto \vec{e}_{\sigma(i)}$, pour tout $\sigma \in S_p$, afin de construire un morphisme injectif de S_p dans $\mathrm{GL}_p(K)$.

Commentaires.

Exercice 11. Quand on élève au carré $\sum\limits_{M\in G} M$, on se retrouve à devoir simplifier $\sum\limits_{M\in G}\sum\limits_{N\in G} MN$. On y parvient en se souvenant que $M \mapsto MN$ est une permutation de G pour tout $N \in G$. Ensuite : utiliser le lien entre la trace et le rang d'un projecteur.

Commentaires.

★ **Exercice 12.** Écrire $M = PNP^{-1}$, et passer par les parties réelle et imaginaire pour obtenir l'existence de matrices carrées réelles (non nécessairement inversibles) R et S telles que : $MR = RN$, $MS = SN$. Montrer alors qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $R + xS$ soit inversible en utilisant la nature polynomiale de $x \mapsto \det(R + xS)$. Il faudra justifier que ce n'est pas une application polynomiale identiquement nulle, pour en déduire qu'il ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur $\mathbb{C}$ et donc sur $\mathbb{R}$.

Commentaires.

Exercice 13. (Une généralisation de l'exercice précédent)

1. Si $f : L^{d+1} \to L$ est polynomiale, noter qu'on peut l'écrire : $\forall \vec{x} \in L^{d+1}$, $f(\vec{x}) = \sum\limits_i P_i(x_1, \ldots, x_d)x_{d+1}^i$, afin de se ramener à un polynôme à une variable (pour lequel on sait qu'il est nul sur K, qui est infini, si et seulement si c'est le polynôme nul). Conclure par récurrence.
2. Si $M = PNP^{-1}$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(L)$, décomposer les coefficients de P dans une K-base de L afin d'en déduire d matrices P_i telles que pour tout i, on ait : $MP_i = P_iN$. Montrer que $\vec{x} \mapsto \det\left(\sum\limits_{i=1}^{d} x_iP_i\right)$ n'est pas identiquement nulle sur K^d grâce à la question précédente, et conclure comme dans l'exercice 12.

Commentaires.

Exercice 14. (Algèbres de dimension finie et polynômes annulateurs)

1. Montrer que $K[f+g]$ et $K[f\circ g]$ sont inclus dans une K-algèbre ayant une partie génératrice finie, constituée d'endomorphismes de la forme $f^i\circ g^j$. S'inspirer éventuellement de l'exercice 84 du chapitre IV.
2. Noter que si A est une telle algèbre et si $f\in A$, alors $\mathbb{R}[f]$ est de dimension finie. En déduire que f admet un polynôme annulateur non nul, et raisonner sur le nombre de racines réelles de ce polynôme pour montrer que f doit être constante. La continuité de f interviendra à ce moment.

Commentaires.

Exercice 15. Le membre de gauche est une matrice symétrique : celui de droite doit l'être aussi. Décomposer A comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique, puis identifier (pourquoi peut-on le faire ?). Effectuer une distinction de cas selon que la trace de M soit nulle ou non : dans le second cas, noter que la trace de A est imposée et que cette matrice doit être symétrique. En déduire que M est combinaison linéaire de A et d'une matrice antisymétrique. Étudier la réciproque.

Commentaires.

Exercice 16. Remarquer que $M\mapsto(A\mapsto \mathrm{tr}(AM))$ est un isomorphisme de $\mathrm{M}_n(K)$ dans $\mathrm{L}(\mathrm{M}_n(K),K)$, et qu'un isomorphisme doit préserver les bases. Conclure en notant que la non inversibilité de la matrice $((\mathrm{tr}(A_iA_j)))_{1\leqslant i,j\leqslant n^2}$ équivaut à une relation de dépendance linéaire entre les formes linéaires $M\mapsto \mathrm{tr}(MA_j)$.

Commentaires.

★ **Exercice 17.**

1. Noter que certaines inclusions sont toujours vraies sans la moindre hypothèse, et que le théorème du rang assure alors de l'équivalence de deux de ces trois propriétés. Ensuite : si $E=\ker(f)\oplus\mathrm{im}(f)$, on peut au choix montrer $\ker(f)=\ker(f^2)$ en notant que si $\vec{x}\in\ker(f^2)$, alors $f(\vec{x})\in\ker(f)\cap\mathrm{im}(f)$, ou montrer $\mathrm{im}(f)=\mathrm{im}(f^2)$ en écrivant tout vecteur dans la somme $E=\ker(f)\oplus\mathrm{im}(f)$ et en considérant son image par f.

   Pour l'implication réciproque : noter que le théorème du rang assure que seule la somme directe est à démontrer (même si l'on pourrait s'en passer de ce théorème). Considérer $\vec{y}\in\ker(f)\cap\mathrm{im}(f)$ et traduire l'appartenance à ces deux ensembles.
2. Écrire explicitement tout vecteur $\vec{x}$ de E comme somme d'un vecteur de $\ker(f)$ et d'un vecteur de $\mathrm{im}(f)$ en écrivant $f(\vec{x})=f^2(\vec{y})$ avec $\vec{y}\in E$ (possible grâce aux hypothèses), et en voyant ce que cela implique comme relation entre $\vec{x}$ et $f(\vec{y})$.

Commentaires.

★ **Exercice 18. (Noyaux itérés)**

1. Facile dès qu'on traduit ce qu'on doit démontrer.
2. Étudier la monotonie de la suite des dimensions de ces noyaux.
3. Raisonner par récurrence. Remarquer que $f^{n+2}(\vec{x})=\vec{0}$ équivaut à $f(\vec{x})\in\ker(f^{n+1})$.
4. S'inspirer de l'exercice 17.

Commentaires.

★ **Exercice 19. (La suite des noyaux itérés « s'essouffle »)** Utiliser le théorème du rang avec une application linéaire convenable de $\mathrm{im}(f^n)$ dans $\mathrm{im}(f^{n+1})$. Montrer que son noyau décroît grâce à l'exercice 18 et conclure.

Avec le théorème de factorisation (hors programme) c'est plus direct : construire une application linéaire injective de $\ker(f^{n+2})/\ker(f^{n+1})$ dans $\ker(f^{n+1})/\ker(f^n)$.

Commentaires.

Calculs de déterminant

✓ **Exercice 20.** Le premier déterminant doit vous faire penser à un déterminant usuel. Essayer de s'y ramener. Ensuite : pour obtenir un déterminant sous forme factorisée, il s'agit de faire des opérations sur les lignes et colonnes de sorte à n'obtenir que des coefficients nuls (sauf un) dans une ligne ou colonne, pour soit : 1° développer par rapport à cette ligne ou colonne, afin d'avoir un nouveau facteur, 2° se ramener au déterminant d'une matrice triangulaire. Avant d'utiliser la méthode du pivot (incontournable), guetter des simplifications naturelles : noter par exemple la présence d'un coefficient en commun dans les 1^re^ et 3^e^ lignes du deuxième déterminant.

Commentaires.

★ **Exercice 21.** Faire des opérations sur les lignes de $A + xJ$, de sorte à simplifier de nombreux x et majorer très efficacement le degré de l'application polynomiale $x \mapsto \det(A+xJ)$. Cela vous permet d'en déduire qu'un nombre fini (et petit) d'évaluations connues suffit à reconstituer les coefficients du polynôme associé. Quels choix pertinents de x nous ramènent à des déterminants simples à calculer.

Commentaires.

Exercice 22. Développer par rapport à une ligne ou colonne convenable, pour reconnaître le même déterminant « en plus petit ». La relation obtenue est une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants : on sait faire.

Pour vous éviter une distinction de cas fastidieuse, vous pouvez passer du cas où l'équation caractéristique admet deux racines distinctes, au cas où elle en a une seule, par un argument de continuité. Le déterminant de cette matrice est en effet une fonction continue de la variable θ (pourquoi ?).

Commentaires.

★ **Exercice 23. (Matrices circulantes)**

1. Écrire $C(a_1,\dots,a_n)$ comme un polynôme en une matrice beaucoup plus simple à diagonaliser, dont on sait calculer le polynôme caractéristique à l'œil nu (reconnaître une matrice « usuelle ») ou un polynôme annulateur à l'œil nu (reconnaître une matrice dont l'endomorphisme canoniquement associé a une action très simple sur les vecteurs de la base canonique). L'équation aux éléments propres se résout sans subtilité particulière, même si on peut accélérer la résolution par un bon argument sur le rang. On en déduit que $C(a_1,\dots,a_n)$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont de la forme $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j\omega^{jk}$ où $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$.
2. On sait diagonaliser cette matrice grâce à la question précédente. Utiliser ensuite le fait que le déterminant soit le produit des valeurs propres. On peut simplifier les sommes en présence en passant par des sommes géométriques.

Commentaires.

Exercice 24. Le plus ingénieux est de diagonaliser A_n en remarquant que c'est la matrice d'un endomorphisme convenable de $\mathbb{R}_n[X]$. Pour le trouver : la surdiagonale de 1, 2, 3, etc., n, doit vous faire penser à l'endomorphisme de dérivation. De même pour la sous-diagonale, avec un ajustement du fait que les nombres soient ordonnés « dans le mauvais sens ». C'est une multiplication par une puissance de X convenable qui justifie que cette suite de nombres soit sur la sous-diagonale (penser à l'endomorphisme $P \mapsto XP$).

Une fois que vous avez identifié cet endomorphisme : trouver ses valeurs propres revient à résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre, et plus précisément à déterminer à quelle condition ses solutions non nulles sont bien polynomiales. On en déduit alors le déterminant de A_n en faisant le produit des valeurs propres.

Commentaires.

★ **Exercice 25.**

1. Penser à une opération sur les lignes et colonnes qui ramènerait la matrice par blocs du membre de gauche à une matrice triangulaire supérieure par blocs. Se souvenir que cela équivaut à une multiplication par une matrice de dilatation ou de transvection convenable. Prendre le déterminant dans l'égalité qui en résulte.
2. Se ramener au cas précédent. Remplacer D par $D - X\mathrm{I}_n$, qui est inversible dans $\mathrm{M}_n(K(X))$ (pourquoi ?).
   Si K est un sous-corps de $\mathbb{C}$, on peut alléger le côté conceptuel de ce raisonnement en notant que $D - \frac{1}{p}\mathrm{I}_n$ est inversible pour presque tout p entier (pourquoi ?) et en prenant la limite quand $p \to +\infty$. Cela nécessite une anticipation sur le chapitre de topologie.

Commentaires.

Exercice 26. Montrer que ce déterminant est égal à $\det(A+iB)\det(A-iB) = |\det(A+iB)|^2$ grâce à des multiplications par blocs convenables. Vous pouvez éventuellement puiser votre inspiration dans le cas des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ avec a et b réels : comment réduire une telle matrice ? Imiter alors les relations obtenues.

Commentaires.

Sommes directes, sous-espaces supplémentaires, sous-espaces stables

Exercice 27. Écrire la relation $\pi_f(f)(\vec{x}) = \vec{0}$ avec $\vec{x} \in F$ ou $\vec{x} \in G$ pour en déduire deux premières relations de divisibilité entre ces trois polynômes. On trouve un multiple commun à deux polynômes, ce qui fournit une nouvelle relation de divisibilité. En écrivant tout vecteur $\vec{x}$ dans la somme : $E = F \oplus G$, montrer la relation de divisibilité en sens contraire.

Commentaires.

Exercice 28. Montrer que tout sous-espace vectoriel de dimension $k-1$ est stable par f, en l'écrivant comme intersection de deux sous-espaces vectoriels de dimension k. En réitérant, conclure que toute droite est stable par f. Cela permet de déterminer f.

Commentaires.

✓ **Exercice 29.** Décomposer un vecteur $\vec{x} \in G_i$ dans la somme directe $E = \bigoplus_{i=1}^{k} F_i$, et utiliser l'unicité de la décomposition en somme directe, pour montrer l'inclusion $G_i \subseteq F_i$.

Commentaires.

✓ **Exercice 30.** Composer l'égalité de l'énoncé par p_j. Pour montrer la somme directe : si $\sum_{i=1}^{k} \vec{x}_i = \vec{0}$ avec les $\vec{x}_i$ dans $\mathrm{im}(p_i)$, se souvenir que les éléments dans l'image d'un projecteur sont des points fixes. Composer ensuite l'égalité par un projecteur convenable pour éliminer tous les termes de la somme sauf un, et conclure aisément qu'il est nul. Cette somme directe est facilement égale à E grâce à l'hypothèse de l'énoncé.

Commentaires.

★ **Exercice 31.** Noter que la donnée d'une droite stable équivaut à l'existence d'un vecteur propre. Il suffit donc de traiter le cas où il n'en existe pas. Noter que dans ce cas, $(\vec{x}, f(\vec{x}))$ est libre pour tout $\vec{x}$ non nul et que cette famille engendre donc un plan, mais que sa stabilité n'est vraie que si $(\vec{x}, f(\vec{x}), f^2(\vec{x}))$ est liée. Montrer par l'absurde que si cette famille est libre pour tout $\vec{x}$ non nul, alors $P(f)$ est inversible pour tout polynôme P de degré 1 ou 2, et en déduire une absurdité grâce au lemme des noyaux appliqué à un polynôme convenable.

Commentaires.

Exercice 32. Noter que le lemme des noyaux fournit des sous-espaces stables par f et qui dépendent des facteurs irréductibles de χ_f. Pour l'autre implication : se souvenir que χ_{f_F} divise χ_f si F est stable par f.

Commentaires.

★ **Exercice 33.** Montrer que f admet au moins une valeur propre complexe λ et que $\ker(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$ est stable par g. Conclure en considérant le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit par g sur ce sous-espace propre.

Commentaires.

Exercice 34. (Racine carrée de la dérivation) Trouver un sous-espace vectoriel F de dimension finie stable par d, sur lequel l'endomorphisme induit par d est nilpotent. Montrer que F est aussi stable par δ et que δ y induit un endomorphisme nilpotent. Obtenir une contradiction en comparant son indice de nilpotence et celui de l'endomorphisme induit par d sur F.

Commentaires.

★ **Exercice 35.** Pour traiter cet exercice, il y a deux observations à avoir en tête : 1° l'image d'un espace vectoriel par un endomorphisme non inversible ne peut qu'être plus petite strictement (en termes de dimension), 2° un endomorphisme nilpotent n'est jamais inversible. Il suffit alors de noter que $\mathrm{im}(f_1 \circ \cdots \circ f_n) = \mathrm{im}((f_1 \circ \cdots \circ f_{n-1})_{|\mathrm{im}(f_n)})$ et de réitérer pour avoir le résultat. Ne pas oublier l'hypothèse de commutativité : où sert-elle ?

Commentaires.

Exercice 36. Comme $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$, déterminer $v \in C(u)$ revient exactement à déterminer $v_{|\ker(u-\lambda\mathrm{Id}_E)}$ pour toute valeur propre λ de u. Remarquer que les sous-espaces propres de u sont stables par v, et que la relation $v \circ u = u \circ v$ sur ces sous-espaces montre que la donnée de $v \in C(u)$ équivaut de manière bijective à la donnée d'un élément de $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \mathrm{L}(\ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E))$. Conclure en calculant la dimension de cet espace vectoriel.

On peut aussi raisonner matriciellement (dans une base convenable de vecteurs propres de u) et montrer que la matrice de v (dans cette même base) est diagonale par blocs par un argument de stabilité, où les blocs diagonaux peuvent être choisis arbitrairement.

Commentaires.

★ **Exercice 37.** Sens direct : si F est un sous-espace vectoriel de E, utiliser le théorème de la base incomplète avec une base de F complétée avec une famille génératrice de vecteurs propres de f, afin de construire un supplémentaire de F stable par f. Sens réciproque : par l'absurde, si $\dim\left(\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \ker(f - \lambda \mathrm{Id}_E)\right) < \dim(E)$, on peut inclure cette somme directe dans un hyperplan de E, dont un supplémentaire stable par f doit être engendré par un vecteur propre de f. En déduire une contradiction.

Commentaires.

Exercice 38. S'inspirer de la résolution faite dans le cours, avec le lemme des noyaux, des équations différentielles linéaires à coefficients constants. La principale difficulté est de montrer que si : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - \lambda_i u_n = P_i(n)\lambda_i^n$, avec P_i un polynôme de degré au plus $\alpha_i - 1$, alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = Q_i(n)\lambda_i^n$, avec Q_i un polynôme de degré au plus α_i. Pour contourner cette difficulté, un argument dimensionnel peut venir à la rescousse. Sans cet argument dimensionnel : cela se ramène à savoir justifier que $\sum_{i=0}^{n-1} P_i(k)$ est un polynôme en n de degré au plus α_i. Il suffit de savoir démontrer que c'est vrai de la somme $\sum_{i=0}^{n-1} i^\ell$ pour tout $\ell \leqslant \alpha_i - 1$. C'est possible par récurrence et par un examen attentif de la somme télescopique $\sum_{i=0}^{n-1} \big((i+1)^{\ell+1} - i^{\ell+1}\big)$.

Commentaires.

★ **Exercice 39.**

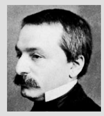
1. Pour montrer l'indication : produire des bases cycliques de $\ker(f^\ell)$ pour tout ℓ (on a en effet vu en cours qu'un tel endomorphisme est cyclique). Ensuite : si F est un sous-espace stable de dimension ℓ, noter que f induit sur F un endomorphisme nilpotent, et utiliser la majoration de l'indice de nilpotence pour montrer : $F \subseteq \ker(f^\ell)$. Conclure par un argument dimensionnel.
2. Utiliser le lemme des noyaux avec le polynôme π_f et l'endomorphisme induit par f sur F.
3. Montrer que $\pi_A = (X-1)^2(X-2)^2$ et utiliser la question précédente pour ramener l'étude des sous-espaces stables à la recherche des sous-espaces stables d'endomorphismes nilpotents (ceux induits par $f - \mathrm{Id}$ et $f - 2\mathrm{Id}$ sur les sous-espaces caractéristiques, où f est l'endomorphisme de $\mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A).

Commentaires.

Espaces cycliques, matrices compagnons

★ **Exercice 40.** (🗎) Passer par la matrice compagnon de P. Si λ est une valeur propre de $C_P^\top$ et X un vecteur propre associé, la relation $C_P^\top X = X$ donne une relation entre les coefficients a_k et λ. Se débarrasser des coefficients de X par une majoration convenable. S'inspirer si besoin de l'exercice 4.

Commentaires.


1823-1891

★ **Exercice 41. (Théorème de Kronecker) (🗎)**

1. Regarder la trace de la matrice compagnon associée à P et de ses puissances. La trianguler préalablement.
2. Montrer que P_k est le polynôme caractéristique de $(C_P)^k$, dont les coefficients sont nécessairement entiers car c'est le cas de P.
3. Si les λ_i sont de module 1, alors les relations coefficients-racines assurent que les coefficients de P_k, pour tout k, sont majorés par une constante indépendante de k. La suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ parcourt donc un nombre fini de polynômes de degré n, qui ont chacun un nombre fini de racines complexes. En déduire que pour tout i, l'application $k \mapsto \lambda_i^k$ définie sur $\mathbb{N}$ n'est pas injective. Conclure.

Commentaires.

Exercice 42. Introduire une base $\left(f^i(\vec{x})\right)_i$ et décomposer $g(\vec{x})$ dans cette base (pour $g \in C(f)$) pour avoir une égalité de la forme $g(\vec{x}) = P(f)(\vec{x})$ avec $P \in K[X]$. Vérifier alors que $g = P(f)$ en comparant leurs images sur une base.

Commentaires.

★ **Exercice 43.** Sens réciproque : utiliser un exemple du cours et un des deux critères de diagonalisation pour en déduire que π_f est de degré n et scindé à racines simples. Sens direct : la seule difficulté est de montrer que f est cyclique. Pour cela, il s'agit de se demander comment choisir $\vec{x} \in E$ pour que $\left(\vec{x}, f(\vec{x}), \dots, f^{n-1}(\vec{x})\right)$ soit libre. Décomposer $\vec{x}$ dans une base de vecteurs propres (avec des coordonnées à déterminer plus tard « pour que ça marche ») et écrire une relation de dépendance linéaire entre les vecteurs de la famille ci-avant, devrait vous mener à n équations polynomiales vérifiées par les valeurs propres de f. C'est là que vous comprenez comment choisir les coordonnées de $\vec{x}$ dans la base de vecteurs propres, si vous voulez que ces n équations polynomiales impliquent la nullité de tous les scalaires de la relation de dépendance linéaire.

Commentaires.

☢ **Exercice 44.** Les indications ne sont pas les mêmes selon que K soit infini ou quelconque. Dans les deux cas, remarquer que pour avoir un endomorphisme cyclique, il suffit de montrer qu'il existe $\vec{x}$ tel que π_f soit le polynôme minimal de l'idéal $\left\{P \in K[X] \mid P(f)(\vec{x}) = \vec{0}\right\}$ (pourquoi ? raisonner avec les degrés et dimensions, en imitant ce qu'on a dit concernant la dimension de $K[f]$). Si $\pi_{f,\vec{x}}$ est un générateur unitaire de cet idéal, remarquer qu'il divise π_f.

Si K est infini, noter que si $\mathcal{D}$ est l'ensemble des diviseurs *stricts* de π_f, alors $\bigcup\limits_{P\in\mathcal{D}} \ker(P(f))$ ne peut pas être égal à E (exercice classique si la réunion ne contient que deux sous-espaces vectoriels, plus subtil sinon). Conclure que si $\vec{x} \in E \setminus \bigcup\limits_{P\in\mathcal{D}} \ker(P(f))$ alors $\pi_{f,\vec{x}}$ ne peut pas appartenir à $\mathcal{D}$ et est donc égal à π_f.

Si K est quelconque : utiliser le lemme des noyaux pour se ramener à des sous-espaces stables où π_g est une puissance d'un polynôme irréductible : $\pi_g = P^\alpha$ (j'ai noté g l'endomorphisme induit sur un tel sous-espace). Intérêt : dans ce cas, pour tout $\vec{x}$, le polynôme $\pi_{g,\vec{x}}$ est de la forme P^β avec $\beta \leqslant \alpha$. Remarquer que si $\vec{x} \notin \ker(P^{\alpha-1}(g))$ (pourquoi existe-t-il de tels vecteurs ?) alors on doit avoir $\beta = \alpha$. Pour passer des sous-espaces stables à l'espace entier, s'inspirer éventuellement de l'exercice 27.

Commentaires.

Réduction de matrices et endomorphismes explicites

✓ **Exercice 45. (🗎C)** C'est très standard. Suivre les conseils de la section 1 de *Méthodes*. Pour la dernière matrice, un raisonnement analogue à celui de l'exercice 59 vous permet de gagner du temps lors de la détermination des sous-espaces propres.

Commentaires.

✓ **Exercice 46. (🗎C)** C'est très standard. Suivre les conseils de la section 1 de *Méthodes*.

Commentaires.

Exercice 47. Écrire cette matrice comme polynôme en une matrice plus simple à diagonaliser. L'approche devient alors classique.

Commentaires.

✓ **Exercice 48. (Endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{R}_n[X]$) (🗎)** Deux pistes pour l'endomorphisme f. Première piste : noter qu'un polynôme non nul P vérifiant $f(P) = \lambda P$ est de degré borné (comparer les coefficients dominants). Chercher les vecteurs propres de f peut donc se ramener à une étude restreinte à $\mathbb{R}_k[X]$, où k est de taille raisonnable. Écrire la matrice de f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_k[X]$ et étudier ses éléments propres : on s'est ramené à une étude banale. Deuxième piste : remarquer que $f(P) = \lambda P$ équivaut à la résolution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre. La résoudre et regarder à quelle condition sur λ les solutions sont polynomiales.

Commentaires.

✓ **Exercice 49. (Endomorphismes de $\mathrm{M}_n(K)$) (🗎)** Trouver un polynôme annulateur de f. C'est facile si vous exprimez $M \mapsto bM^\top$ en fonction de f, car vous connaissez un polynôme annulateur très simple de cet endomorphisme. En déduire les valeurs propres potentielles de f. Vous vérifiez qu'elles sont effectivement valeurs propres en résolvant $f(M) = \lambda M$ pour les valeurs potentielles de λ trouvées.

Une étude analogue est possible pour g. On peut aussi trouver « à l'œil nu » deux valeurs propres, et vérifier que leurs sous-espaces propres sont de dimension suffisamment élevée pour qu'il n'y en ait pas d'autre. Effectuer une distinction de cas sur A.

Commentaires.

✓ **Exercice 50. (🗎)** Montrer que A admet un polynôme annulateur P de degré 1 ou 2. Cela passe d'abord par la détermination de ses valeurs propres. Isoler A dans l'égalité $P(A) = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{R})}$ pour obtenir A^{-1}. Utiliser une division euclidienne par P, comme expliqué dans *Méthodes*, pour obtenir A^k.

Commentaires.

★ **Exercice 51. (Matrice tridiagonale)** Lorsqu'on veut résoudre $A_n(\alpha, \beta)X = \lambda X$ d'inconnue X, remarquer que les coordonnées de X vérifient une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 (en posant par convention $x_0 = x_{n+1} = 0$ pour que la première et la dernière ligne donnent la même relation). Expliciter les x_i et observer que la relation de récurrence et les valeurs de x_0 et x_{n+1} imposent les valeurs possibles de λ. Vous en déduirez l'existence de n valeurs propres et l'expression de vecteurs engendrant leurs sous-espaces propres.

Commentaires.

Exercice 52. (🗎) Donner une relation entre $\chi_{A_{p+1}}$ et χ_{A_p} en ramenant le calcul de $\det(X\mathrm{I}_{2^{p+2}} - A_{p+1})$ à celui de déterminants de matrices triangulaires par blocs. S'inspirer si besoin de l'exercice 25. En déduire par récurrence que A_p n'admet que deux valeurs propres au plus. Cela fournit un polynôme annulateur scindé à racines simples à tester si l'on veut montrer que A_p est diagonalisable.

Le théorème spectral permettra plus tard de montrer que A_p est diagonalisable plus rapidement.

Commentaires.

Matrices à coefficients entiers et modulo p

★ **Exercice 53.** Sens direct : écrire que A est semblable à une matrice diagonale D, et exprimer A^p en fonction de D^p. Utiliser le petit théorème de Fermat. Sens réciproque : reconnaître un polynôme annulateur, dont on démontrera qu'il est scindé et à racines simples (on l'a souvent croisé au chapitre IV).

Commentaires.

Exercice 54. Utiliser le fait que π_A soit scindé et à racines simples, et à coefficients entiers (pourquoi ?). Montrer que sa réduction modulo p est un polynôme annulateur de $\bar{A}$ et qu'elle est toujours scindée. La difficulté est de montrer qu'elle est à racines simples : montrer que π_A et π_A' sont premiers entre eux dans $\mathbb{Q}[X]$ et utiliser une relation de Bézout. L'arranger convenablement afin d'en déduire, modulo p bien choisi, une relation de Bézout dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ qui prouve que π_A est encore premier avec π_A' modulo p.

Commentaires.

Exercice 55. Remarquer qu'il suffit de montrer que toutes les valeurs propres de A sont des racines de l'unité pour avoir le résultat. Utiliser les relations coefficients-racines pour montrer que les coefficients du polynôme caractéristique de A^k sont des entiers bornés par une constante ne dépendant pas de k. Conclure que pour tout λ valeur propre, l'application $k \mapsto \lambda^k$ a une image finie et qu'elle ne peut pas être injective. Conclure.

À comparer avec l'exercice 41.

Commentaires.

Exercice 56. Montrer d'abord que A est diagonalisable dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ et que ses valeurs propres sont des racines de l'unité. Or la trace de A est un entier : considérer toutes les possibilités pour que la somme de deux racines de l'unité soit un entier. Vérifier que dans tous les cas, on obtient une racine douzième de l'unité, et conclure.

Commentaires.

Réduction abstraite et nilpotence

✓ **Exercice 57.** Factoriser par A dans $\chi_A = \det(X\mathrm{I}_n - A)$ pour faire apparaître $\chi_{A^{-1}}$. Pour les sous-espaces propres : $AX = \lambda X$ équivaut clairement à une équation aux éléments propres impliquant A^{-1}.

Commentaires.

Exercice 58. Isoler le facteur de X dans l'égalité $\chi_A = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} b_{i,\sigma(i)}$, où $b_{i,j} = X\delta_{i,j} - a_{i,j}$.

Autre piste moins coûteuse en calculs : remarquer que le coefficient de degré 1 dans χ_A équivaut à un facteur de $\chi_{A^{-1}}$ bien connu, dans le cas où A est inversible (voir l'exercice 57 si besoin). Utiliser un argument de densité pour le cas général (cet argument de densité nécessite de montrer d'abord que $A \mapsto \chi_A$ est continue, et n'est valable que si K est un sous-corps de $\mathbb{C}$).

Commentaires.

★ **Exercice 59.**

1. Utiliser le fait que $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$ pour comparer les ordres de multiplicité. Conjuguer $AX = \lambda X$ pour en déduire une relation entre les vecteurs propres associés à λ et ceux associés à $\bar{\lambda}$.
2. Se souvenir que le déterminant est le produit des valeurs propres comptées avec multiplicités. Regrouper les valeurs propres non réelles conjuguées.

Commentaires.

✓ **Exercice 60.** Se ramener au calcul de $\det(\mathrm{I}_n + N')$ avec N' une matrice nilpotente. Calculer ce déterminant en triangulant N'.

Commentaires.

★ **Exercice 61.** (🗎) Sens direct : immédiat en triangulant M et en exprimant la trace à l'aide des valeurs propres. Sens réciproque : exprimer la trace à l'aide des valeurs propres de M et de leurs ordres de multiplicité. Noter que les égalités : $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\mathrm{tr}(M^k) = 0$, se ramènent à un système faisant intervenir une matrice « presque » de Vandermonde. En déduire une absurdité si M admet au moins une valeur propre non nulle.

Commentaires.

★ **Exercice 62.** Grâce aux valeurs propres des matrices nilpotentes, on sait qu'on a l'inclusion directe. Montrer qu'il y a égalité des dimensions en explicitant autant de matrices nilpotentes linéairement indépendantes que la dimension de $\ker(\mathrm{tr})$.

Commentaires.

★ **Exercice 63.**

1. Raisonner par récurrence. Passer du rang k au rang $k+1$ en composant par f l'égalité de l'hérédité, et en utilisant $f \circ g = \alpha f + g \circ f$.
2. Deux pistes sont possibles. La première : montrer que dans le cas contraire, la question précédente impliquerait qu'un certain endomorphisme admet une infinité de valeurs propres alors qu'on est en dimension finie. La seconde : étendre par linéarité l'égalité de la question précédente, pour avoir une relation entre $P(f)$ et $P'(f)$ pour tout $P \in K[X]$. Prendre $P = \pi_f$ pour en déduire que π_f divise $X\pi_f'$. En comparant les degrés et les coefficients dominants, conclure que ces deux polynômes sont égaux et que ce n'est possible que si $\pi_f = X^k$ avec k un entier.

Commentaires.

Exercice 64.

1. Comparer les polynômes caractéristiques de M et $2M$.
2. Considérer une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont exactement les $p-1$ éléments de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$.

Commentaires.

★ **Exercice 65. (Matrices stochastiques)**

1. La somme des coefficients de chaque ligne égale 1. Pour la majoration : écrire $AX = \lambda X$ avec X vecteur propre, puis majorer ses coordonnées par la plus grande. À comparer avec le raisonnement des exercices 4 et 40.
2. Soit $\lambda \neq 1$ de module 1 En reprenant plus finement les majorations de la question précédente, montrer qu'on a le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire quelque part. En déduire que toutes les composantes d'un vecteur propre X associé à λ sont soit nulles, soit égales à λx_{i_0} avec i_0 l'indice qui maximise $|x_i|$. Constater qu'alors, pour tout entier naturel k, le nombre $\lambda^k x_{i_0}$ est une coordonnée de X. Conclure.
3. C'est encore conséquence du cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire : reprendre les majorations des questions précédentes pour montrer l'existence de i tel que : $1 - a_{i,i} = |\lambda - a_{i,i}|$. En élevant au carré et en développant *convenablement* le membre de droite (ne pas oublier que λ est de module 1, donc de la forme $e^{i\theta}$), vérifier que cette égalité n'est possible que si $\lambda = 1$ ou $a_{i,i} = 0$.

   Pour la dimension du sous-espace propre : le raisonnement de la seconde question permet de montrer que les coordonnées d'un vecteur propre associé à 1 sont toutes égales. Autre approche : montrer que l'on a : $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \ker(A - \mathrm{I}_n) \oplus \mathrm{im}(A - \mathrm{I}_n)$ (cela ne va pas de soi et vous aurez probablement besoin de faire un peu d'analyse) et regarder le polynôme caractéristique de l'endomorphisme $X \mapsto AX$ dans une base adaptée à cette décomposition. Il est alors nécessaire de remarquer qu'aucun vecteur propre de A n'appartient à $\mathrm{im}(A - \mathrm{I}_n)$, ce qui est facile.

Commentaires.

★ **Exercice 66. ()** Les deux critères de diagonalisation sont pertinents. Si l'on veut raisonner avec le critère classique : noter que l'hypothèse sur le rang de f nous donne une valeur propre d'ordre de multiplicité très élevé et utiliser la trace (par exemple) pour avoir la dernière valeur propre. Sommer les dimensions des sous-espaces propres pour conclure. Avec le critère polynomial de diagonalisation : remarquer un lien entre f^2 et f (il y a plusieurs façons d'y parvenir ; vous pouvez trouver un tel lien en écrivant la matrice de f dans une base de E, idéalement avec plein de zéros si vous voulez vous épargner des calculs). Noter que cela vous donne un polynôme annulateur scindé et à racines simples. Sauf si...

Commentaires.

★ **Exercice 67. ()**

1. Appliquer le critère de diagonalisation puis le lemme des noyaux pour écrire E comme somme directe de sous-espaces et d'un sous-espace caractéristique (ce cas à part vient du fait que tous $X^k - \lambda$ ne soit pas toujours scindé à racines simples). La condition nécessaire et suffisante cherchée est que ce sous-espace caractéristique soit un sous-espace propre.
2. Reproduire le raisonnement ci-dessus. Remarquer que pour $k \geqslant 3$ on ne peut pas scinder $X^k - \lambda$ en général. Pour $k = 2$: que suffit-il d'avoir pour que $X^2 - \lambda$ puisse se scinder et pour que le raisonnement de la première question se généralise ?
3. Calculer son carré et remarquer qu'il est diagonalisable. Appliquer ensuite la question précédente.

Commentaires.

✓ **Exercice 68.** Sens direct : remarquer une relation entre les polynômes annulateurs de M et ceux de A et B. Sens réciproque : écrire explicitement A et B comme étant semblables à des matrices diagonales, et s'en servir pour construire une matrice de passage entre M et une matrice diagonale.

Commentaires.

★ **Exercice 69.** Donner une relation entre $P(M)$ et $P(A)$ pour tout $P \in K[X]$. En déduire que si M est diagonalisable alors A aussi, et A admet de plus un autre polynôme annulateur s'exprimant à l'aide de la dérivée du polynôme minimal de M. Utiliser la connaissance des racines de π_M pour en déduire quelque chose l'inversibilité de $\pi'_M(A)$, et conclure que A est nulle. Réciproque triviale.

Autre piste très efficace mais qui utilise un résultat hors programme : exprimer M en fonction de la décomposition de Dunford de A, afin d'en déduire une décomposition de Dunford de M. Utiliser le fait qu'une matrice soit diagonalisable si et seulement si la partie nilpotente de sa décomposition de Dunford est nulle.

Commentaires.

Exercice 70. Utiliser le théorème de Lagrange pour obtenir un polynôme annulateur scindé à racines simples de toute matrice de G. Les codiagonaliser grâce à une hypothèse de l'énoncé.

Commentaires.

☢ **Exercice 71.**

1. Étudier séparément la diagonalisation de $M \mapsto AM$ et $M \mapsto MB$: noter que les polynômes annulateurs de ces deux endomorphismes, et ceux de A et B, sont intimement reliés. Pour que la somme soit diagonalisable, il suffit de montrer que les deux endomorphismes sont codiagonalisables (pourquoi ?). Vous connaissez une condition suffisante pour cela.
2. Exprimer $M \mapsto AM - MA$ en fonction de la décomposition de Dunford de A. Identifier la partie nilpotente de la décomposition de Dunford de $M \mapsto AM - MA$, et utiliser le fait qu'elle soit nulle par hypothèse sur cet endomorphisme. Conclure que la partie nilpotente de la décomposition de Dunford de A est également nulle.

Commentaires.

Exercice 72. Une analyse de la matrice demandée nous permet de trouver comment construire la base $\mathcal{B}$: une base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ qui conviendrait vérifierait en effet $f(\vec{e}_1) = \vec{0}$, $f(\vec{e}_2) = \vec{e}_3$ et $f(\vec{e}_3) = -\vec{e}_2$. Comment choisir $\vec{e}_1$ pour que ce soit vérifié ? Si $\vec{e}_2$ est « bien choisi », alors le choix de $\vec{e}_3$ est immédiat (pourquoi ?). Pour comprendre comment choisir $\vec{e}_2$: combiner les deux dernières égalités ci-dessus et en déduire que $\vec{e}_2$ doit appartenir à un certain noyau.

Cette analyse étant terminée : montrer que des vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ vérifiant ce qu'on souhaite (et qui sont non nuls : sinon, aucune chance d'avoir une base) existent bien et que la famille $(\vec{e}_2, \vec{e}_3)$ définie comme ci-dessus est libre. Utiliser l'hypothèse de l'énoncé pour conclure que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et obtenir la matrice voulue.

Commentaires.

Exercice 73. Cet isomorphisme reviendrait à dire qu'un élément de la forme $P(f)$ est entièrement caractérisé par un r-uplet indexé par les valeurs propres de f (dans le cas diagonalisable). Le cours vous permet de conjecturer de ce que serait ce r-uplet qui caractérise $P(f)$, et vous donne donc une idée de l'isomorphisme explicite entre $K[f]$ et K^r. Montrer le caractère bijectif peut se faire par interpolation de Lagrange. Pour le sens réciproque, ce peut être fait par contraposée : montrer que si f n'est pas diagonalisable, alors $K[f]$ admet des éléments nilpotents (vous pouvez en fabriquer à l'aide des facteurs irréductibles de π_f) et ne peut donc pas être isomorphe à K^r qui n'en a pas.

Commentaires.

Exercice 74. (Lien entre rang et valeurs propres)

1. Une piste : justifier que si f est diagonalisable, alors : $\ker(f) \oplus \mathrm{im}(f) = E$. Utiliser alors le critère de diagonalisation et le raisonnement de l'exercice 29 pour obtenir l'égalité. Une autre piste : utiliser à bon escient l'expression de f comme combinaison linéaire de projecteurs associés à la décomposition en somme directe de sous-espaces propres. Comparer les dimensions pour avoir le deuxième résultat demandé.

2. Certains endomorphismes non diagonalisables ayant une unique valeur propre ne peuvent pas vérifier la propriété de la première question.

Commentaires.

Exercice 75. (Matrice semi-simple) Sens réciproque : il suffit de diagonaliser $M(a,b)$ pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Les matrices de passage des $M(a_i, b_i)$ vers une matrice diagonale permettent aisément de fabriquer une matrice de passage de A vers une matrice diagonale. Sens direct : écrire que A est semblable à une matrice diagonale à coefficients complexes. Remarquer que quitte à permuter l'ordre des vecteurs de la matrice de passage, on peut regrouper les coefficients diagonaux non réels par paires conjuguées $(a+ib, a-ib)$. Montrer que $\begin{pmatrix} a+ib & 0 \\ 0 & a-ib \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ (si le sens réciproque a été correctement traité, ce passage n'est pas difficile). Ainsi A est semblable dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ à une matrice de la forme demandée : raisonner comme dans l'exercice 12 pour en déduire que ces deux matrices sont aussi semblables dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Commentaires.

Utilisation de la réduction

✓ **Exercice 76.** Mettre ces relations de récurrence couplées sous la forme $X_{n+1} = AX_n$ où A est une matrice carrée convenable et X_n un vecteur colonne dont les composantes sont les suites à déterminer. Déterminer $(u_n)_{n\geqslant 0}$, $(v_n)_{n\geqslant 0}$ et $(w_n)_{n\geqslant 0}$ se ramène alors au calcul de A^n. Les méthodes ne manquent pas : lire *Méthodes* aux pages consacrées.

Commentaires.

✓ **Exercice 77.** Mettre ces relations de récurrence couplées sous la forme $Y' = AY$ où A est une matrice carrée convenable et $Y : \mathbb{R} \to \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ une application dont les composantes sont les fonctions à déterminer. Réduire $A = PDP^{-1}$ et passer par la fonction $Z = P^{-1}Y$ pour se ramener à des équations différentielles linéaires triviales à résoudre. Lire si besoin *Méthodes* aux pages consacrées aux équations différentielles.

Commentaires.

✓ **Exercice 78.** Un raisonnement combinatoire permet de démontrer que $(d_n(j))_{n\geqslant 0}$ vérifie la relation : $d_{n+1}(j) = d_n(k_{1,j}) + d_n(k_{2,j}) + d_n(k_{3,j})$, où les $k_{i,j}$ sont les numéros des sommets voisins de j. Écrire matriciellement cette relation de récurrence. Le calcul de $d_n(j)$ pour tout n se ramène alors au calcul des puissances de A^n avec $A = \begin{pmatrix} B & \mathrm{I}_4 \\ \mathrm{I}_4 & B \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_8(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (cela dépend de votre façon de numéroter les sommets : vous pouvez avoir d'autres matrices). On y parvient en diagonalisant A. Si l'on s'y prend intelligemment, nul besoin de calculer les éléments propres de A : il suffit de diagonaliser $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et d'en déduire une diagonalisation de B, puis de C. Voir les conseils de *Méthodes* sur la réduction des matrices par blocs.

Commentaires.

Exercice 79. Montrer que si $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ est d'ordre 5, alors soit $M = \mathrm{I}_2$ (ce qui est impossible car l'identité est d'ordre 1), soit les deux valeurs propres (complexes) de M sont conjuguées et de la forme $e^{\pm\frac{2i\pi}{5}}$ ou $e^{\pm\frac{4i\pi}{5}}$. Avoir une contradiction en considérant la trace. Vous aurez besoin de calculer $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ ou $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

Commentaires.

Exercice 80.

1. Montrer qu'un tel sous-groupe est commutatif (voir si besoin l'exercice 15 du chapitre III) et constitué de matrices de symétries. Les codiagonaliser. En déduire que ce sous-groupe s'injecte dans l'ensemble $\left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \pm 1 \end{pmatrix} \right\}$ qui est de cardinal 2^n. Cet ensemble fournit aussi le cas d'égalité.

2. Si deux groupes sont isomorphes, il existe une bijection entre leurs sous-groupes et leurs exposants. Conclure en comparant les sous-groupes d'exposant 2.

Commentaires.


1852-1927

★ **Exercice 81. (Théorème de Burnside)** Remarquer que toutes les matrices de G sont diagonalisables et que leurs valeurs propres sont des racines de l'unité. Conclure que l'image de l'application décrite dans l'indication de l'énoncé est finie. Pour l'injectivité : montrer que si deux matrices M et N ont même image par l'application de l'énoncé, alors le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire est vérifié et toutes les valeurs propres de $M^{-1}N$ sont égales à 1. Que dire d'une matrice diagonalisable dont le spectre est $\{1\}$? Conclure.

Commentaires.

Équations polynomiales matricielles

✓ **Exercice 82. (🗎)** La donnée d'un polynôme annulateur de A informe sur ses valeurs propres potentielles. Comme A est à coefficients réels, ses valeurs propres complexes ont même ordre de multiplicité et sont conjuguées. Conclure en remarquant que A est diagonalisable dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et que son rang est donné par le nombre de valeurs propres non nulles.

Commentaires.

Exercice 83. (🗎)

1. Calculer χ_A et en déduire : $\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = \ker(A^2) \oplus \ker(A - 2\mathrm{I}_3)$. Produire une base cyclique de $\ker(A^2)$ (noter que vous pouvez expliciter aisément $\ker(A)$ et $\ker(A^2)$, si besoin) et une base de $\ker(A - 2\mathrm{I}_3)$. Les concaténer et utiliser la formule du changement de base.
2. Étudier l'endomorphisme canoniquement associé à M, et plus précisément son endomorphisme induit sur $\ker(A^2)$. Montrer qu'il est nilpotent et en déduire une contradiction.

Commentaires.

Exercice 84. (🗎) Montrer que si M est solution, alors M est nilpotente. Obtenir une contradiction en considérant son indice de nilpotence et celui de la matrice du membre de droite.

Commentaires.

✓ **Exercice 85. (🗎)** Diagonaliser la matrice explicite du membre de droite. Utiliser ensuite le fait qu'elle commute avec M pour en déduire que M et cette matrice sont nécessairement codiagonalisables (par stabilité des sous-espaces propres). Ainsi on ramène l'équation de l'énoncé à une équation ne faisant intervenir que des matrices diagonales : la résolution devient triviale.

Autre approche sans diagonaliser : montrer qu'une solution M de cette équation doit être un polynôme en A de degré au plus 1 (faire le lien avec l'exercice 42, sachant qu'il est très facile de montrer qu'une matrice d'ordre 2 distincte d'une homothétie est cyclique : comment choisir X pour que (X, AX) soit libre ?). Injecter $M = a\mathrm{I}_2 + bA$ dans l'équation et identifier (vous aurez à exprimer A^2 en fonction de A et I_2, ce que vous savez normalement faire pour toute matrice d'ordre 2).

Commentaires.

Exercice 86. (🗎) Trouver un polynôme annulateur de A, et obtenir des informations sur ses racines *via* une factorisation évidente puis une étude de variations sur $\mathbb{R}$. En déduire les seules possibilités pour les valeurs propres de A (noter que A est à coefficients réels, ce qui nous dit quelque chose de ses valeurs propres non réelles) grâce à la trace. Conclure en utilisant la trace dans l'égalité $A^2 - A^\top = \mathrm{I}_3$.

Commentaires.

✓ **Exercice 87. (🗎)** Justifier que B est diagonalisable, et montrer que ses sous-espaces propres sont stables par $X \mapsto MX$. En déduire que M et B sont codiagonalisables. Ramener l'équation $P(M) = B$ à une équation de la forme $P(D) = D'$ où D et D' sont des matrices diagonales. Noter qu'elle équivaut à n équations polynomiales : on sait majorer leur nombre de solutions.

Commentaires.

Exercice 88. (📄) Réduire A grâce à une famille cyclique qu'on complète en une base de $\mathrm{M}_3(K)$. Vous aurez besoin de remarquer que nécessairement : $A^2 = 0_{\mathrm{M}_3(K)}$ (plusieurs arguments possibles : utiliser l'exercice 66, ou noter que le rang d'une matrice nilpotente ne peut que décroître quand on la multiplie par elle-même). Utiliser la stabilité de $\mathrm{im}(A)$ et $\ker(A)$ par $X \mapsto MX$ pour réduire M avec la même base. Le fait que M soit nilpotente (car A l'est) vous permet d'encore plus simplifier la matrice obtenue, qui a encore trop de coefficients inconnus pour être exploitable. L'équation $M^2 = A$ se ramène alors à une équation impliquant deux matrices ayant énormément de zéros, ce qui permet de la résoudre explicitement. On observe que l'ensemble des solutions est paramétré par $K^* \times K$, qui est infini si K l'est.

Commentaires.

Exercice 89. (📄) Montrer d'abord que A et B sont codiagonalisables. Pour cela : montrer que A est un polynôme en B, en montrant d'abord que c'est un polynôme en A^3. On y parvient par interpolation de Lagrange, après avoir codiagonalisé A et A^3. Le document *Méthodes* donne des détails sur l'emploi de l'interpolation de Lagrange. Ceci étant dit : on en déduit que A est un polynôme en B et commute donc avec B. On sait en déduire que A et B sont semblables à deux matrices diagonales avec la même matrice de passage. L'équation $A^3 = B^3$ se ramène alors banalement à une équation avec deux matrices diagonales. Identifier les coefficients diagonaux, et utiliser l'injectivité de $x \mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$ pour conclure.

Commentaires.