Exercices du chapitre V (Réduction des endomorphismes)

✓ : exercice d'application des méthodes, ★ : exercice classique, ☢ : exercice difficile.

Dans tous les exercices de ce chapitre : sauf mention explicite du contraire, n est un entier naturel non nul, K un corps et E un espace vectoriel sur K. On note $\mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{Q})$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Il est facile de vérifier que c'est un sous-anneau de $\mathrm{M}_n(\mathbb{Q})$.

Pour tout $(k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2$, on désigne par $E_{k,\ell} \in \mathrm{M}_n(K)$ la matrice $((\delta_{i,k}\delta_{j,\ell}))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

Révisions et approfondissements

Exercice 1. (Espaces vectoriels quotients) Soit F un sous-espace vectoriel de E.

1. Montrer qu'on peut munir le groupe quotient E/F d'une structure de K-espace vectoriel, qui fait de l'application $\pi : E \to E/F$ définie par $x \mapsto \bar{x}$ une application linéaire surjective de noyau F.
2. On suppose E de dimension finie. Montrer que E/F est de dimension finie, et exprimer sa dimension en fonction de $\dim(E)$ et $\dim(F)$.

Nous pouvons retrouver rapidement plusieurs résultats connus avec cette structure :

3. Démontrer le théorème du rang en une ou deux lignes (selon la taille de vos mimines).
4. Montrer que si G est un sous-espace vectoriel de E tel que : $F \subseteq G$, alors : $F = G \iff \dim(F) = \dim(G)$.
5. Montrer que deux formes linéaires de E ayant même noyau sont proportionnelles.
6. Soient E, F, G et H quatre espaces vectoriels de dimension finie. Soient $w : E \to F$, $v : F \to G$ et $u : G \to H$ des applications linéaires. Montrer : $\mathrm{rang}(u \circ v \circ w) \geqslant \mathrm{rang}(u \circ v) + \mathrm{rang}(v \circ w) - \mathrm{rang}(v)$.

Exercice 2. (Diviseurs de zéro dans $\mathrm{M}_n(K)$) Soit $A \in \mathrm{M}_n(K)$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que : $\exists B \in \mathrm{M}_n(K) \setminus \left\{0_{\mathrm{M}_n(K)}\right\}$, $AB = 0_{\mathrm{M}_n(K)}$. *L'exercice est le même si l'on remplace AB par BA.*

Exercice 3. (Une formule d'inversion)

1. Calculer l'inverse de la matrice $M = \left(\left(\binom{j}{i}\right)\right)_{0\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathrm{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.
2. Soient $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites à valeurs réelles telles que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = \sum\limits_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a_j$. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \sum\limits_{j=0}^{n} (-1)^{n-j}\binom{n}{j} b_j$.
3. En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, le nombre de surjections de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,k]\!]$ (par convention, il y en a une si $n = k = 0$, et zéro si $nk = 0$ avec $(n,k) \neq (0,0)$).

★ **Exercice 4. (Matrice à diagonale strictement dominante)** Soit $A = ((a_{i,j}))_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathrm{M}_n(K)$. On suppose : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $|a_{i,i}| > \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|$. Montrer que A est une matrice inversible.

Exercice 5. Soit $A \in \mathrm{M}_n(K)$. On rappelle que $\mathrm{com}(A)$ désigne la comatrice de A.

1. Déterminer le rang de $\mathrm{com}(A)$.
2. On suppose : $n \geqslant 3$. Résoudre l'équation : $\mathrm{com}(A) = A$.

Exercice 6. Soit $f : \mathrm{M}_n(K) \to K$ une application non identiquement nulle et telle que : $\forall (A,B) \in (\mathrm{M}_n(K))^2$, $f(AB) = f(A)f(B)$. Montrer : $\forall A \in \mathrm{M}_n(K)$, $A \in \mathrm{GL}_n(K) \iff f(A) \neq 0$.

Exercice 7. Soit $f : \mathrm{M}_n(K) \to K$ linéaire telle que : $\forall (A,B) \in (\mathrm{M}_n(K))^2$, $f(AB) = f(BA)$. Montrer qu'il existe $\alpha \in K$ tel que : $f = \alpha\mathrm{tr}$. *On utilisera les matrices $E_{k,\ell}$.*

★ **Exercice 8.** Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que M admet un inverse dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si : $\det(M) \in \{1,-1\}$.

★ **Exercice 9.** Soit p un nombre premier. Calculer les cardinaux de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ et $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \ker(\det)$.

Exercice 10. Soit G un groupe fini. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que G soit isomorphe à un sous-groupe de $\mathrm{GL}_p(K)$.

Exercice 11. Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(K)$. Montrer que $\dfrac{1}{\mathrm{card}(G)} \sum\limits_{M\in G} M$ est une matrice de projecteur, et en déduire une expression de : $\dim\left(\{X \in \mathrm{M}_{n,1}(K) \mid \forall M \in G,\ MX = X\}\right)$, en fonction des traces des éléments de G.

★ **Exercice 12.** Soient M et N deux matrices réelles, et semblables dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que M et N sont semblables dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 13. (Une généralisation de l'exercice précédent) On suppose que K est infini. Soient L un corps contenant K et de dimension finie sur K en tant que K-espace vectoriel. On pose : $d = \dim_K(L)$. Soient M et N deux matrices à coefficients dans K, et semblables dans $\mathrm{M}_n(L)$.

1. Montrer qu'une application polynomiale à d variables, à coefficients dans L, est nulle sur K^d si et seulement si elle est nulle sur L^d (on dit qu'une application $f : L^d \to L$ est *polynomiale* si elle est de la forme $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant d} \mapsto \sum_{(m_1,\dots,m_d)\in I} a_{m_1,\dots,m_d} \prod_{i=1}^{d} x_i^{m_i}$ où I est une partie finie de $\mathbb{N}^d$ et $(a_{m_1,\dots,m_d})_{(m_1,\dots,m_d)\in I} \in L^I$).
2. En déduire que M et N sont semblables dans $\mathrm{M}_n(K)$.

Exercice 14. (Algèbres de dimension finie et polynômes annulateurs)

1. Soient f et g deux endomorphismes de E tels que : $f\circ g = g\circ f$. Montrer que si f et g admettent des polynômes annulateurs non nuls, alors $f+g$ et $f\circ g$ également.
2. Déterminer les sous-$\mathbb{R}$-algèbres de $\mathrm{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de dimension finie.

Exercice 15. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre l'équation : $M + M^\top = \mathrm{tr}(M)A$, d'inconnue $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 16. Soit $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n^2} \in (\mathrm{M}_n(K))^{n^2}$. Montrer que $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n^2}$ est une base de $\mathrm{M}_n(K)$ si et seulement si $((\mathrm{tr}(A_iA_j)))_{1\leqslant i,j\leqslant n^2}$ est inversible.

★ **Exercice 17.** Supposons E de dimension finie. Soit $f \in \mathrm{L}(E)$.

1. Montrer que $\ker(f) \oplus \mathrm{im}(f) = E$ si, et seulement si $\mathrm{im}(f) = \mathrm{im}(f^2)$, si et seulement si $\ker(f) = \ker(f^2)$.
2. Montrer que si E est de dimension infinie, alors on a toujours $\ker(f) + \mathrm{im}(f) = E$ si $\mathrm{im}(f) = \mathrm{im}(f^2)$, mais plus nécessairement la somme directe (qui, elle, s'obtient si $\ker(f) = \ker(f^2)$).

★ **Exercice 18. (Noyaux itérés)** Supposons E de dimension finie. Soit f un endomorphisme de E.

1. Montrer que $(\mathrm{im}(f^n))_{n\geqslant 0}$ et $(\ker(f^n))_{n\geqslant 0}$ sont respectivement décroissante et croissante pour l'inclusion.
2. Montrer qu'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $\ker(f^n) = \ker(f^{n+1})$.
3. Montrer que si $\ker(f^n) = \ker(f^{n+1})$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$, alors la suite stationne à partir de ce rang. De même pour $\mathrm{im}(f^n)$.
4. Soit $p \geqslant 1$ le plus petit entier naturel tel que $\ker(f^p) = \ker(f^{p+1})$. Montrer qu'alors on a $\ker(f^p) \oplus \mathrm{im}(f^p) = E$.

★ **Exercice 19. (La suite des noyaux itérés « s'essouffle »)** Supposons E de dimension finie. Soit $f \in \mathrm{L}(E)$. Montrer que la suite $\big(\dim(\ker(f^{n+1})) - \dim(\ker(f^n))\big)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

Calculs de déterminant

✓ **Exercice 20.** Soit $(a,b,c,d,e,f) \in K^6$. Calculer les déterminants ci-dessous en les donnant *sous forme factorisée* :

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & (c+a)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & a & b & ab \\ 1 & c & b & cb \\ 1 & a & d & ad \\ 1 & c & d & cd \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}.$$

★ **Exercice 21.** Soit $(a,b,c) \in K^3$ tel que : $b \neq c$. On pose :

$$A = \begin{pmatrix} a & c & \cdots & c \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(K), \quad J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(K).$$

Calculer $\det(A)$ en passant par l'étude de $x \mapsto \det(A + xJ)$.

Exercice 22. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On suppose : $n \geqslant 2$. Calculer le déterminant de la matrice :

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \cos(\theta) \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}).$$

★ **Exercice 23. (Matrices circulantes)** Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$.

1. Diagonaliser $C(a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer le déterminant de : $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \cos(2\theta) & \cdots & \cos(n\theta) \\ \cos(n\theta) & \cos(\theta) & \cdots & \cos((n-1)\theta) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos(2\theta) & \cos(3\theta) & \cdots & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Exercice 24. Soit $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ n & 0 & 2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n+1}(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(A_n) = 0$ si n est pair, et que si $n = 2p + 1$ est impair (donc $p \in \mathbb{N}$), alors : $\det(A_n) = (-1)^{p+1} \dfrac{((2p+1)!)^2}{2^{2p}(p!)^2}$.

★ **Exercice 25.** Soit $(A, B, C, D) \in (\mathrm{M}_n(K))^2$. On suppose : $CD = DC$, et que D est inversible.

1. Montrer : $\det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right) = \det(AD - BC)$.
2. Montrer que l'égalité précédente reste vraie même si D n'est pas inversible.

Exercice 26. Soit $(A, B) \in (\mathrm{M}_n(\mathbb{R}))^2$. Montrer : $\det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}\right) \geqslant 0$.

Sommes directes, sous-espaces supplémentaires, sous-espaces stables

Exercice 27. Supposons E de dimension finie non nulle n. Soit $f \in \mathrm{L}(E)$, et soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E stables par f. Donner une relation entre π_{f_F}, π_{f_G} et π_f.

Exercice 28. Supposons E de dimension finie non nulle n. Soit $f \in \mathrm{L}(E)$. On suppose qu'il existe $k \in [\![1, n-1]\!]$ tel que, pour tout sous-espace vectoriel F de E de dimension k, on ait : $f(F) \subseteq F$. Déterminer f.

✓ **Exercice 29.** Soient k un entier naturel non nul et $F_1, \dots, F_k, G_1, \dots, G_k$ des sous-espaces vectoriels de E tels que : $E = \bigoplus\limits_{i=1}^{k} F_i = \bigoplus\limits_{i=1}^{k} G_i$. On suppose de plus : $\forall i \in [\![1, k]\!]$, $F_i \subseteq G_i$. Montrer : $\forall i \in [\![1, k]\!]$, $F_i = G_i$.

✓ **Exercice 30.** Soient k un entier naturel non nul et $p_1, \dots, p_k$ des endomorphismes de E vérifiant : $\sum\limits_{i=1}^{k} p_i = \mathrm{Id}_E$, et : $\forall (i, j) \in [\![1, k]\!]^2$, $i \neq j \Longrightarrow p_i \circ p_j = 0_{\mathrm{L}(E)}$. Montrer que pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, l'application p_i est un projecteur, et que l'on a : $\bigoplus\limits_{i=1}^{k} \mathrm{im}(p_i) = E$.

★ **Exercice 31.** On suppose : $K = \mathbb{R}$, et que E est de dimension finie. Soit $f \in \mathrm{L}(E)$. Montrer que f admet une droite ou un plan stable.

Exercice 32. Supposons E de dimension finie non nulle. Soit $f \in \mathrm{L}(E)$. Montrer que χ_f est irréductible dans $K[X]$ si et seulement si le seul sous-espace vectoriel strict de E stable par f est $\{\vec{0}\}$.

★ **Exercice 33.** On suppose : $K = \mathbb{C}$, et que E est de dimension finie non nulle. Soient f et g deux endomorphismes de E qui commutent. Montrer que f et g ont un vecteur propre en commun.

Exercice 34. (Racine carrée de la dérivation) Soit d l'endomorphisme de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ défini par $f \mapsto f'$. Montrer qu'il n'existe pas $\delta \in \mathrm{L}(\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}))$ tel que : $\delta^2 = d$.

★ **Exercice 35.** Supposons E de dimension finie non nulle n. Soient $f_1, \dots, f_n$ des endomorphismes de E nilpotents, qui commutent deux à deux. Montrer : $f_1 \circ \cdots \circ f_n = 0_{\mathrm{L}(E)}$.

Exercice 36. Supposons E de dimension finie non nulle. Soit u un endomorphisme diagonalisable de E, qui admet s valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_s$, d'ordres de multiplicité respectifs $\alpha_1, \dots, \alpha_s$. On note $C(u)$ l'ensemble des endomorphismes v de $\mathrm{L}(E)$ qui commutent avec u. Montrer : $\dim(C(u)) = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i^2$.

★ **Exercice 37.** Supposons E de dimension finie non nulle. Soit f un endomorphisme de E. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire stable par f.

Exercice 38. Soit $(a_0, \dots, a_{p-1}) \in K^p$. On suppose que le polynôme $P = X^p + \sum_{i=0}^{p-1} a_i X^i \in K[X]$ est scindé sur K, sous la forme : $P = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$, où les λ_i sont des éléments de K tous distincts et α_i des entiers naturels non nuls.

Déterminer les suites $(u_n)_{n \geqslant 0} \in K^{\mathbb{N}}$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+p} + \sum_{i=0}^{p-1} a_i u_{n+i} = 0$.

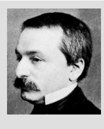
★ **Exercice 39.** Supposons E de dimension finie. Soit f un endomorphisme de E.

1. Montrer que si f est un endomorphisme nilpotent, d'indice de nilpotence $n = \dim(E)$, alors ses sous-espaces stables sont exactement ceux de la forme $\ker(f^k)$ avec $k \in [\![0, n]\!]$ (*commencer par montrer que pour tout* $\ell \in [\![0, n]\!]$, *on a* $\dim(\ker(f^\ell)) = \ell$).
2. On ne suppose plus f nilpotent. On suppose que π_f est scindé, et on pose : $\pi_f = \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$. Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E stable par f, alors : $F = \bigoplus_{i=1}^{k} \left(F \cap \ker\left((f - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{\alpha_i}\right)\right)$.
3. Donner tous les sous-espaces stables de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Espaces cycliques, matrices compagnons

★ **Exercice 40.** Soit $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une racine de P, alors : $|z| \leqslant 1 + \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |a_k|$.

★ **Exercice 41. (Théorème de Kronecker)** Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme unitaire. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses racines complexes (éventuellement avec répétitions).


1823-1891

1. Montrer : $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k \in \mathbb{Z}$.
2. Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On pose : $P_k = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i^k)$. Montrer : $P_k \in \mathbb{Z}[X]$.
3. On suppose : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ |\lambda_i| = 1$. Montrer que les λ_i sont des racines de l'unité.

Exercice 42. Soit f un endomorphisme cyclique de E. On note $C(f)$ l'ensemble des endomorphismes g de E qui commutent avec f. Montrer : $C(f) = K[f]$.

★ **Exercice 43.** Supposons E de dimension finie non nulle n. Soit f un endomorphisme de E. Montrer que f admet n valeurs propres distinctes si et seulement si f est cyclique et diagonalisable.

☢ **Exercice 44.** Supposons E de dimension finie non nulle. Soit f un endomorphisme de E. Montrer que si : $\pi_f = \chi_f$, alors f est cyclique (*le résultat est plus accessible lorsque K est un corps infini*).

Réduction de matrices et endomorphismes explicites

✓ **Exercice 45.** Déterminer les éléments propres de ces matrices complexes, et les diagonaliser si possible :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

✓ **Exercice 46.** Déterminer si la matrice $U = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable, et si oui expliciter une matrice diagonale qui lui est semblable.

Exercice 47. Soit $(a,b,c)\in\mathbb{C}^3$. Diagonaliser si possible la matrice : $\begin{pmatrix} a & c & b \\ c & a+b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

✓ **Exercice 48. (Endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{R}_n[X]$)** Déterminer les éléments propres de :

$$f:\begin{cases}\mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & (2X+1)P-(X^2-1)P'\end{cases}\quad,\quad g:\begin{cases}\mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P-P'\end{cases}.$$

✓ **Exercice 49. (Endomorphismes de $\mathrm{M}_n(K)$)** Soient $(a,b)\in K^2$ et $A\in\mathrm{M}_n(K)$. Déterminer les éléments propres de :

$$f:\begin{cases}\mathrm{M}_n(K) & \to & \mathrm{M}_n(K) \\ M & \mapsto & aM+bM^\top\end{cases}\quad,\quad g:\begin{cases}\mathrm{M}_n(K) & \to & \mathrm{M}_n(K) \\ M & \mapsto & \mathrm{tr}(A)M-\mathrm{tr}(M)A\end{cases}.$$

✓ **Exercice 50.** Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. On pose : $A=\begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix}\in\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer A^{-1} lorsque A est inversible, ainsi que A^k pour tout $k\in\mathbb{N}$.

★ **Exercice 51. (Matrice tridiagonale)** Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. Montrer que la matrice :

$$A_n(\alpha,\beta)=\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & \cdots & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \cdots & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}\in\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$$

est diagonalisable et expliciter ses sous-espaces propres.

Exercice 52. On définit une suite de matrices par : $A_0=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\in\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, et : $\forall p\in\mathbb{N},\ A_{p+1}=\begin{pmatrix} A_p & A_p \\ A_p & -A_p \end{pmatrix}$. Montrer que pour tout $p\in\mathbb{N}$, la matrice A_p est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

Matrices à coefficients entiers et modulo p

★ **Exercice 53.** Soit p un nombre premier. Soit $A\in\mathrm{M}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ si et seulement si : $A^p=A$.

Exercice 54. Soit $A\in\mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$ une matrice diagonalisable dont toutes les valeurs propres sont des entiers relatifs. Montrer que pour tout nombre premier p sauf un nombre fini, la matrice $\bar{A}\in\mathrm{M}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ (obtenue en réduisant modulo p les coefficients de A) est diagonalisable.

Exercice 55. Soit $A\in\mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$ une matrice diagonalisable dans $\mathbb{C}$, dont toutes les valeurs propres sont de module 1. Montrer qu'il existe $p\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ tel que : $A^p=\mathrm{I}_n$.

Exercice 56. Soit $A\in\mathrm{M}_2(\mathbb{Z})$ telle que : $A^p=\mathrm{I}_2$. Montrer : $A^{12}=\mathrm{I}_2$.

Réduction abstraite et nilpotence

✓ **Exercice 57.** Soit $A\in\mathrm{M}_n(K)$ une matrice inversible. Déterminer une relation entre χ_A et $\chi_{A^{-1}}$, ainsi qu'entre les sous-espaces propres de A et de A^{-1}.

Exercice 58. Soit $A\in\mathrm{M}_n(K)$. Déterminer le coefficient de degré 1 de χ_A.

★ **Exercice 59.**

1. Soit $A\in\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, et soit $\lambda\in\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$. Montrer que $\bar{\lambda}$ est une valeur propre de A de même ordre de multiplicité, et que : $\dim(\ker(A-\lambda\mathrm{I}_n))=\dim\left(\ker(A-\bar{\lambda}\mathrm{I}_n)\right)$.
2. Soit $A\in\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que toutes ses valeurs propres réelles sont positives. Montrer que $\det(A)\geqslant 0$.

✓ **Exercice 60.** Soient $A\in\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice inversible et $N\in\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente. On suppose que A et N commutent. Montrer : $\det(A+N)=\det(A)$.

★ **Exercice 61.** Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que M est nilpotente si et seulement si : $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\mathrm{tr}(M^k) = 0$.

★ **Exercice 62.** Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ engendré par les matrices nilpotentes. Montrer : $F = \ker(\mathrm{tr})$.

★ **Exercice 63.** On suppose que K contient $\mathbb{Q}$ et que E est de dimension finie. Soient f et g deux endomorphismes de E. On suppose l'existence de $\alpha \in K^*$ tel que : $f \circ g - g \circ f = \alpha f$.

1. Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}$, $f^k \circ g - g \circ f^k = \alpha k f^k$.
2. Montrer que f est un endomorphisme nilpotent.

Exercice 64.

1. Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que si M et $2M$ sont semblables alors M est nilpotente.
2. Soit p un nombre premier. Trouver un exemple, dans $\mathrm{M}_{p-1}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, de matrice M non nilpotente et semblable à aM pour tout $a \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$.

★ **Exercice 65. (Matrices stochastiques)** Soit $A = ((a_{i,j}))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A est *stochastique*, c'est-à-dire que tous ses coefficients sont positifs ou nuls et que : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$.

1. Montrer que 1 est valeur propre de A, et : $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, $|\lambda| \leqslant 1$.
2. Montrer que les valeurs propres de A de module 1 sont des racines de l'unité.
3. On suppose à présent que A est *strictement* stochastique, c'est-à-dire : ses coefficients sont strictement positifs, et : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$. Montrer que 1 est l'unique valeur propre de module 1 et que le sous-espace propre de A associé à 1 est de dimension 1.

★ **Exercice 66.** Supposons E de dimension finie non nulle $n \geqslant 2$. Soit f un endomorphisme de E de rang 1. Donner une condition nécessaire et suffisante simple pour que f soit diagonalisable.

★ **Exercice 67.** Soient $f \in \mathrm{L}(\mathbb{C}^n)$ et $k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.

1. On suppose que f^k est diagonalisable. Donner une condition nécessaire et suffisante simple pour que f soit diagonalisable.
2. Même question pour $k = 2$, en remplaçant $\mathbb{C}^n$ par $\mathbb{R}^n$.
3. Donner une condition sur $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}^*)^n$ pour que la matrice « anti-diagonale » $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & & a_n \\ & \iddots & \\ a_1 & & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

✓ **Exercice 68.** Soit $(A, B) \in (\mathrm{M}_n(\mathbb{C}))^2$. On pose : $M = \begin{pmatrix} A & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \\ 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} & B \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2n}(\mathbb{C})$. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si A et B le sont.

★ **Exercice 69.** Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et notons $M = \begin{pmatrix} A & 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{C})} \\ A & A \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2n}(\mathbb{C})$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que M soit diagonalisable.

Exercice 70. Montrer que si G est un sous-groupe *commutatif* fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, alors il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale pour tout $M \in G$.

☢ **Exercice 71.** Soient A et B deux matrices de $\mathrm{M}_n(K)$ diagonalisables.

1. Montrer que l'endomorphisme de $\mathrm{M}_n(K)$ défini par $M \mapsto AM - MB$ est diagonalisable.
2. On se propose d'établir une réciproque partielle. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que l'endomorphisme de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ défini par $M \mapsto AM - MA$ est diagonalisable. Montrer que A l'est aussi.

Exercice 72. Soit $f \in \mathrm{L}(\mathbb{R}^3)$. On suppose : $f^3 + f = 0_{\mathrm{L}(\mathbb{R}^3)}$, et que f n'est pas l'endomorphisme nul. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que : $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 73. Supposons E de dimension finie non nulle. Soit f un endomorphisme de E. Montrer que $K[f]$ est isomorphe, en tant que K-algèbre, à K^r pour un certain entier naturel non nul r, si et seulement si f est diagonalisable, et que dans ce cas on a : $r = \mathrm{card}(\mathrm{Sp}(f))$.

Exercice 74. (Lien entre rang et valeurs propres) Supposons E de dimension finie. Soit $f \in \mathrm{L}(E)$.

1. On suppose que f est diagonalisable. Montrer : $\mathrm{im}(f) = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f) \setminus \{0\}} \ker(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$, et en déduire que le rang de f est égal au nombre de valeurs propres non nulles de f, comptées avec multiplicités.
2. Montrer que le résultat de la question précédente peut être faux si f n'est pas supposé diagonalisable.

Exercice 75. (Matrice semi-simple) Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. On définit : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ si et seulement s'il existe deux entiers naturels p et q, des réels $a_1, a_2, \ldots, a_q$, des réels non nuls $b_1, b_2, \ldots, b_q$, et une matrice D diagonale de $\mathrm{M}_p(\mathbb{R})$, tels que : $p + 2q = n$, et tels que A soit semblable à la matrice diagonale par blocs : $\begin{pmatrix} D & & & \mathbf{0} \\ & M(a_1,b_1) & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & M(a_q,b_q) \end{pmatrix}$.

Utilisation de la réduction

✓ **Exercice 76.** Déterminer les suites réelles vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_{n+1} &= u_n + v_n \\ v_{n+1} &= u_n + w_n \\ w_{n+1} &= v_n + w_n \end{cases}$.

✓ **Exercice 77.** Déterminer les applications $a, b, c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telles que : $\begin{cases} a' &= -a + b + c, \\ b' &= a - b + c, \\ c' &= a + b - c. \end{cases}$

✓ **Exercice 78.** Soit C un cube dont les sommets sont numérotés de 0 à 7. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, un chemin de longueur n entre deux sommets numérotés i et j est une suite d'arêtes (orientées) $(A_1, \ldots, A_n)$ telle que :

— i soit le sommet de départ de A_1 ;

— pour tout entier $k \in [\![1, n-1]\!]$, le sommet d'arrivée de A_k soit le sommet de départ de A_{k+1} ;

— j soit le sommet d'arrivée de A_n.

Pour tout sommet numéroté j, et pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on note $d_n(j)$ le nombre de chemins de longueur n entre 0 et j. Donner la valeur $d_n(j)$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et tout $j \in [\![1,8]\!]$.

Si l'on veut diminuer le nombre d'étapes de calcul sans trop changer la philosophie de l'exercice, on peut remplacer le cube par un carré.

Exercice 79. Montrer qu'il n'existe pas d'élément d'ordre 5 dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$.

Exercice 80. On dit qu'un groupe est d'exposant 2 si tous ses éléments sont d'ordre 1 ou 2.

1. Montrer qu'un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(K)$ d'exposant 2 est nécessairement de cardinal au plus 2^n, le cas d'égalité pouvant être atteint.
2. Soit $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Montrer que si les groupes $\mathrm{GL}_n(K)$ et $\mathrm{GL}_m(K)$ sont isomorphes, alors $m = n$.


1852-1927

★ **Exercice 81. (Théorème de Burnside)** Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall M \in G$, $M^r = \mathrm{I}_n$. Montrer que G est fini.

On introduira une base $(A_1, \ldots, A_k)$ bien choisie de $\mathrm{Vect}(G)$ et on étudiera l'image de l'application définie sur G par $M \mapsto (\mathrm{tr}(A_1 M), \ldots, \mathrm{tr}(A_k M))$.

Équations polynomiales matricielles

✓ **Exercice 82.** Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose : $A^3 + A^2 + A = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{R})}$. Montrer que le rang de A est pair.

Exercice 83. On pose : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que : $A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$.
2. Déterminer l'ensemble des matrices $M \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$.

Exercice 84. Résoudre l'équation : $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ d'inconnue $M \in \mathrm{M}_3(K)$.

✓ **Exercice 85.** Résoudre l'équation : $M^2 - 2M = \begin{pmatrix} 5 & -15 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$ d'inconnue $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 86. Déterminer les matrices $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ telles que : $\mathrm{tr}(A) = 0$, et : $A^2 - A^\top = \mathrm{I}_3$.

✓ **Exercice 87.** Soient $P \in K[X]$ un polynôme non nul et $B \in \mathrm{M}_n(K)$ une matrice ayant n valeurs propres distinctes. Montrer que l'équation $P(M) = B$, d'inconnue $M \in \mathrm{M}_n(K)$, a un nombre fini de solutions, qu'on majorera en fonction de n et $\deg(P)$.

Exercice 88. Supposons que K est infini. Soit $A \in \mathrm{M}_3(K)$ une matrice nilpotente de rang 1. Montrer que l'équation : $M^2 = A$, d'inconnue $M \in \mathrm{M}_3(K)$, admet une infinité de solutions.

Exercice 89. Soient A et B deux matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisables, telles que : $A^3 = B^3$. Montrer : $A = B$, et donner un contre-exemple au résultat de cet exercice lorsque A et B ne sont pas diagonalisables.