Exercices du chapitre IX (Probabilités discrètes) – Indications

L'icône « (🗎) » indique que les documents *Méthodes* donnent des conseils plus généraux.
La lettre « C » indique que la *Banque des Cent* contient ou contiendra des exercices analogues.

Probabilités, variables aléatoires

★ **Exercice 1. (Loi hypergéométrique)**

1. Trouver $X(\Omega)$, ou du moins un ensemble le contenant de manière « optimale », est facile. Noter que P est uniforme et qu'il suffit donc de calculer $\mathrm{card}(X = k)$ pour avoir p_k. Y parvenir par un raisonnement combinatoire (combien y a-t-il de possibilité de tirer k joueurs dopés et $\ell - k$ qui ne le sont pas ?).
2. Calculer $\sum\limits_{k\in E} p_k$ est la subtilité de la question. Pour y parvenir : noter que le terme général de cette somme (dont on a enlevé ce qui ne dépend pas de k) est le coefficient général d'un produit (simplifiable) de polynômes ou de séries entières.
3. On a une somme de la forme $\sum\limits_k k\bigstar$ à calculer, avec un coefficient binomial caché dans $\bigstar$. On peut la calculer grâce à une formule combinatoire permettant de simplifier $k \cdot \binom{*}{k}$ (en « éliminant » le k gênant) et de se ramener à la formule du binôme de Newton. Autre approche : la méthode de la question suivante s'appliquerait aussi ici, beaucoup plus facilement parce que l'espérance est linéaire au contraire de la variance.
4. Remarquer que Y_iY_j suit une loi de Bernoulli, dont on déterminera le paramètre en regardant la probabilité que les joueurs i et j soient sélectionnés (c'est un argument combinatoire classique). L'espérance d'une variable de loi de Bernoulli est connue. Cela tombe bien : le calcul de la covariance de Y_i et Y_j fait intervenir des espérances de telles variables. Écrire X en fonction des Y_i et se souvenir de la formule donnant la variance d'une somme pour conclure. Vous aurez besoin de simplifier $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} 1$: plutôt que de faire un calcul formel, remarquer que cela revient à compter le nombre de choix possibles de deux éléments distincts dans $[\![1, n]\!]$.
5. Remplacer les coefficients binomiaux de l'expression de $\mathrm{P}(X = k)$ par leurs définitions factorielles, et réarranger les termes pour voir apparaître $\binom{\ell}{k}$. Pour les autres termes factoriels : trouver des équivalents simples (remarquer que les quotients de factoriels donnent des produits avec un nombre fixe de termes, donc l'équivalent du produit est le produit des équivalents). Interpréter le résultat en notant que quand N est très grand, un tirage avec ou sans remise dans un ensemble à N éléments est presque équivalent, puisqu'il y a peu de chance (même avec remise) de tirer deux fois le même élément.

Commentaires.

★ **Exercice 2.** Remarquer que la variable donnant le nombre de lancers avant la fin de la partie suit une loi usuelle. Exprimer la probabilité que A et B gagnent à l'aide de cette variable aléatoire. Comparer les résultats obtenus pour répondre à la question de l'équité.

Commentaires.

✓ **Exercice 3.** Je note E, G et F les variables aléatoires donnant le nombre d'enfants, de garçons et de filles.

1. L'ordre logique naturel est plutôt de regarder la probabilité d'avoir deux garçons quand on sait qu'il y a deux enfants : s'y ramener *via* la formule de Bayes. Pour simplifier le dénominateur dans cette formule, vous aurez besoin de vous ramener aux probabilités que l'énoncé permet de calculer, à savoir p_k et $\mathrm{P}_{(E=n)}(G = k)$, $\mathrm{P}_{(E=n)}(F = k)$. Quelle formule du cours le permet ?

   La somme à calculer se ramène alors aisément à une somme de série entière usuelle *via* une opération analytique de routine.
2. Inverser le conditionnement ne sert à rien ici. Noter que $\mathrm{P}_{(G=2)}(F = 2)$ est égal à une autre probabilité conditionnelle (avoir deux filles et deux garçons, c'est aussi avoir... ?) où, là, la formule de Bayes est pertinente.

Commentaires.

✓ **Exercice 4. (🗎C)** C'est une chaîne de Markov : voir *Méthodes* si besoin. Utiliser la formule des probabilités totales pour exprimer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n. Mettre sous forme matricielle ces relations et diagonaliser la matrice carrée en présence afin d'en déduire la limite de ses puissances quand $n \to +\infty$.

Commentaires.

✓ **Exercice 5. (C)** C'est une chaîne de Markov. C'est très standard : voir *Méthodes* si besoin. Attention au fait qu'il y a deux cas à considérer, selon que l'information communiquée à P_1 soit oui ou non.

Commentaires.

Exercice 6.

1. Immédiat.
2. Remarquer que si l'on veut qu'il n'y ait jamais « pile » trois fois de suite, en particulier il existe au moins un « face » parmi les trois derniers lancers (pourquoi ?), c'est-à-dire les $(n-2)^{\text{e}}$, $(n-1)^{\text{e}}$ et n^{e}. Ce constat permet d'écrire p_n en fonction de p_{n-1}, p_{n-2} et p_{n-3}.
3. Mettre la relation de la question précédente sous forme matricielle, comme on l'a vu au chapitre V, ou utiliser convenablement le lemme des noyaux. Nous sommes toutefois en difficulté pour déterminer les valeurs propres de la matrice qui apparaît : pas grave, parce que p_n s'exprimera en fonction des puissances de ces valeurs propres ; le comportement asymptotique de ces puissances, quand $n \to +\infty$, dépend seulement de la position de leurs modules par rapport à 1. Vous devez donc essayer, par des moyens indirects (théorème des valeurs intermédiaires, monotonie...), de démontrer que les valeurs propres sont de module strictement inférieur à 1. Vous aurez besoin des relations entre coefficients et racines.

Commentaires.

Exercice 7. La probabilité de marquer r buts en k tirs est décrite par une loi usuelle. En déduire la loi de la variable aléatoire X donnant le nombre de tirs nécessaires pour que Lionel Messire atteigne les r buts qu'il lui manque (on peut noter que $\mathrm{P}(X=k)$ s'écrit à l'aide d'une probabilité conditionnelle du type $\mathrm{P}_{(\bigstar=r)}(\spadesuit=k)$, tandis que la probabilité demandée dans la première partie de la question est $\mathrm{P}_{(\spadesuit=k)}(\bigstar=r)$; se demander alors comment relier ces deux probabilités).

Autre piste : on peut aussi remarquer que c'est un temps d'attente avant d'observer un r^{e} succès. Cela permet d'écrire X comme une somme de variables aléatoires de loi usuelle et de conclure par linéarité de l'espérance.

Commentaires.

Exercice 8. (Urnes de Pólya)

1. Pour que la première boule blanche soit tirée au n^{e} tirage, que faut-il avoir eu aux $n-1$ premiers tirages ? En déduire une écriture ensembliste simple de l'évènement « avoir la première boule blanche au n^{e} tirage », dépendant des évènements « avoir la première boule blanche au k^{e} tirage » pour tout $k \leqslant n$. Identifier ensuite quelle formule classique est adaptée pour calculer une telle probabilité.
2. (a) Reproduire le raisonnement de la question précédente. La probabilité p_n s'écrit simplement à l'aide de a_n et a_{n-1}.
   (b) Cela revient à montrer que la suite $(\ln(a_n))_{n\geqslant 1}$ tend vers $-\infty$. L'intérêt de procéder ainsi est qu'on sait le faire grâce à des théorèmes sur les séries, vu que le logarithme transforme produits en sommes.
   (c) Utiliser le théorème de continuité décroissante ou la σ-additivité, selon votre façon de formuler l'évènement demandé. On est ramené au calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n$. Grâce au lien suite-série et à la question précédente, on conclut.

Commentaires.

Exercice 9. () Reconnaître une chaîne de Markov, où $((X_n=0),(X_n=1),(X_n=2))$ est un système complet d'évènements. La méthode est alors classique. Voir *Méthodes* si besoin. Ci-dessous, je note U_n le vecteur dont les coordonnées sont $\mathrm{P}(X_n=0)$, $\mathrm{P}(X_n=1)$ et $\mathrm{P}(X_n=2)$.

1. Remarquer que cela revient à dire que la suite $(L\cdot U_n)_{n\geqslant 0}$ est constante, où L est un vecteur ligne bien choisi. La constance de cette suite découle alors aisément de la relation de récurrence vérifiée par la suite $(U_n)_{n\geqslant 0}$.
2. Cela revient à expliciter U_n pour tout n. Vu que $U_n = A^n U_0$ avec A une matrice convenable, on est réduit à du calcul de puissance matricielle : les méthodes ne manquent pas (voir *Méthodes* du chapitre V si besoin).

Commentaires.

✓ **Exercice 10.** Remarquer que M est une matrice de rang 1 : on a vu au chapitre V que son carré se calcule immédiatement (revoir l'exercice 66 du chapitre V si besoin). Partant de la relation entre M^2 et M, en déduire une condition nécessaire et suffisante simple sur X, Y et Z pour que M soit un projecteur (la positivité, ou l'indépendance, ou les deux, permettent de simplifier la première condition naïvement trouvée). Comme vous connaissez la loi de ces variables, le reste en découle. Approche analogue pour la diagonalisation.

Commentaires.

★ **Exercice 11. (Temps d'attente d'au moins un succès)** On a formulé dans le cours une situation où, pour avoir la loi d'une variable aléatoire X, il était plus intéressant de calculer $\mathrm{P}(X \leqslant k)$ plutôt que $\mathrm{P}(X = k)$. Retrouver cela, et l'adapter (ce n'est pas tout à fait le même cas de figure).

Avec un peu de flair probabiliste, vous pouvez trouver la loi de T sans le moindre calcul (reconnaître le modèle d'une expérience type).

Commentaires.

★ **Exercice 12. (Lemme de Borel-Cantelli)**

1. Traduire avec quantificateurs ce que signifie l'appartenance d'un élément ω de Ω à $\limsup A_n$.
2. Noter que $\mathrm{P}(\limsup A_n)$ est la probabilité d'une intersection : vous avez essentiellement deux résultats pour étudier une telle probabilité. Déterminer lequel est le plus approprié. Vous serez ensuite amenés à étudier la probabilité d'une réunion, et c'est là que vous devrez faire le lien avec la somme de la série de l'énoncé (attention à ne pas conclure trop vite : la réunion n'a pas lieu d'être disjointe, mais une autre propriété que la σ-additivité vous servira).

Commentaires.

Exercice 13. (Loi du zéro-un de Borel)

1. Il suffit de savoir ce qu'est le complémentaire d'une réunion ou d'intersection, et d'utiliser un théorème convenable du cours (la présence d'une limite dans le membre de droite doit aiguiller votre réflexion).
2. La convexité de l'exponentielle permet et sa propriété de morphisme de ramener le calcul de limite de l'énoncé à $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{k=n}^{N} \mathrm{P}(A_k)$, ce qui permet d'utiliser l'hypothèse sur $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathrm{P}(A_n)$. Conclure en exprimant $\mathrm{P}\left(\bigcap\limits_{k\geqslant n} A_n\right)$ comme un produit de probabilités : c'est là que l'hypothèse d'indépendance intervient.

Commentaires.

Exercice 14.

1. Déduire de la σ-additivité que $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathrm{P}(A_n)$ doit converger.
2. Montrer par récurrence : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{P}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k\right) > 1 - \frac{k}{n}$, par une utilisation convenable de la formule de Moivre, et conclure.
3. Avec les notations de l'exercice 12, on demande de montrer : $\limsup A_n \neq \emptyset$. Pour cela il suffit d'avoir : $\mathrm{P}(\limsup A_n) > 0$. Reprendre en partie le raisonnement de l'exercice 12 pour écrire cette probabilité comme une limite de probabilités d'évènements B_p bien choisis. Traduire alors ce que signifie, par définition, le fait que $(\mathrm{P}(A_n))_{n\geqslant 0}$ ne converge pas vers 0, afin d'en déduire l'existence de $\varepsilon > 0$ tel que : $\forall p \in \mathbb{N}$, $\mathrm{P}(B_p) \geqslant \varepsilon$. Conclure.

Commentaires.

✓ **Exercice 15.** Dans un cas, la variable aléatoire comptant le nombre d'essais est clairement usuelle. Dans l'autre cas, attention au fait que la probabilité de succès (« tomber sur la bonne clé ») change à chaque tirage, ce qui ne permet pas de reconnaître une loi usuelle. Il faut donc calculer la loi de probabilité « à la main », en regardant ce qu'on veut observer tirage après tirage, pour que la bonne clé soit la k^{e} tirée (pour $k \in [\![1, N]\!]$). Une fois qu'on a décomposé étape par étape (chronologique) un évènement, comment utiliser cette décomposition pour en déduire sa probabilité ? Une formule est naturellement appliquée à ces situations.

Commentaires.

Exercice 16. Remarquer que cela revient à calculer l'espérance de la variable aléatoire qui, à une application de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$, associe le cardinal de son image. Cette description de X (potentiellement superflue si vous avez les idées claires) permet de l'écrire sous la forme : $X = \sum_{i=1}^{p} \mathbb{1}_{A_i}$, où les A_i sont des évènements bien choisis, de sorte que leur probabilité d'advenir soit calculable explicitement à moindre frais (vous aurez à calculer la probabilité qu'un élément ne soit pas dans l'image d'une application $[\![1, n]\!] \to [\![1, p]\!]$ en admettant que tous les choix sont équiprobables). Utiliser alors la linéarité de l'espérance.

Commentaires.

★ **Exercice 17. (Espérance conditionnelle)** Écrire la définition de $\mathrm{E}(X)$. On veut faire apparaître dans son expression la loi conditionnelle de X sachant A_i, c'est-à-dire $\mathrm{P}_{A_i}(X = k)$: songer à une formule du cours le permettant. Le reste des calculs se poursuit sans ambage (penser à un théorème sur les familles sommables pour assurer que tous vos calculs sont licites).

Commentaires.

Vecteurs aléatoires

✓ **Exercice 18.**

1. Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne deux points et pour chaque boule noire tirée, il perd trois points. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées et Y le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.
   (a) On remarque que X suit une loi usuelle.
   (b) Exprimer Y en fonction de X.
2. Remarquer que X suit une loi hypergéométrique (exercice 1 : s'inspirer des indications qui y sont données). En déduire celle de Y comme ci-dessus. On remarquera que, le nombre de boules blanches étant inférieur au nombre de tirages, l'image de X est très petite et celle de Y aussi.

Commentaires.

★ **Exercice 19. (Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$)**

1. Remarquer que S_n est une somme de 1 et de -1 et qu'il en faut autant de chaque pour avoir $S_n = 0$.
   Autre point de vue : les X_t sont « presque » des lois de Bernoulli. Se ramener effectivement à des variables de loi de Bernoulli, et utiliser le fait que la somme de telles variables (indépendantes) soit binomiale.
2. Utiliser la formule de Stirling pour avoir un équivalent du coefficient binomial quand $n \to +\infty$. Remarquer que $0 < p(1-p) \leqslant \frac{1}{4}$ (le cas d'égalité pouvant se produire pour une valeur de p).
3. Utiliser la linéarité de l'espérance. Les O_{2j} suivent une loi usuelle.
4. L'hypothèse assure que $4p(1-p) < 1$, de sorte que $4p(1-p)$ soit dans l'intervalle ouvert de convergence de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} x^n$ qui doit vous évoquer le développement en série entière d'une fonction usuelle.
   Conclure que $\mathrm{E}(T_n)$ tend vers la somme de cette série entière.
5. Pour l'égalité : soit on raisonne par récurrence, soit on remarque que $\mathrm{E}(T_n)$ est le coefficient général du produit de Cauchy de deux séries entières dont les sommes sont connues. En développant en série entière explicitement la somme de ce produit de Cauchy, et en utilisant l'unicité des coefficients, on obtient l'identité voulue. Le calcul de limite découle encore une fois de la formule de Stirling.

Commentaires.

Exercice 20.

1. Utiliser la linéarité de l'espérance. Pour la variance : utiliser l'indépendance des $m_{i,j}$. La variance d'une variable de loi de Rademacher se calcule trivialement à partir de la définition de la variance.
2. Écrire ce qu'est par définition le déterminant, et utiliser à la fois la linéarité de l'espérance, et l'indépendance des $m_{i,j}$, pour simplifier l'espérance d'une somme ou d'un produit. Le calcul de la variance est plus pénible mais suit le même principe. Noter qu'en développant $(\delta_n)^2$ afin d'en considérer l'espérance, vous aurez des sommes de produits de variables aléatoires indépendantes (de sorte que le produit de l'espérance soit l'espérance du produit), sauf pour $n!$ termes de la somme.

Commentaires.

Exercice 21. Remarquer que cela revient à étudier la probabilité que $(\Delta > 0)$, $(\Delta = 0)$ ou $(\Delta < 0)$ se réalise, où Δ est le discriminant du polynôme. Vous pouvez énumérer les possibilités permettant la réalisation de ces différents évènements, en gagnant en efficacité si vous déterminez préalablement l'image des variables aléatoires b^2 et $4ac$. Cela vous permettra par exemple d'observer que l'évènement $(\Delta = 0)$ ne se réalise que dans un très petit nombre de cas (explicite) ; de même pour les deux autres (une fois que vous avez déterminé deux des évènements, déduisez-en le dernier par passage au complémentaire ; choisissez ingénieusement, donc, l'évènement le moins complexe des deux pour l'énumération exhaustive).

Commentaires.

Exercice 22. Vous connaissez une caractérisation des variables aléatoires presque sûrement constantes à l'aide d'une application dont le comportement sur les sommes de variables aléatoires est contrôlé. S'en servir ici.

Commentaires.

Exercice 23. Noter que $(S_n = n)$ se réalise à une condition très spécifique sur S_{n-1}, qui garantit la non indépendance. Formaliser.

Ce raisonnement ne fonctionne pas pour la suite $(Z_n)_{n\geqslant 1}$. Utiliser le fait que $\frac{Z_n}{Z_{n-1}} = X_n$ pour écrire un évènement du type : $\bigcap_{k=1}^{n} (Z_k = \varepsilon_k)$, exclusivement à l'aide des X_k. Utiliser l'indépendance des X_k pour conclure.

Commentaires.

Exercice 24. Écrire $C_n = \operatorname{card}(\{X_1, \ldots, X_n\})$ comme une somme de fonctions indicatrices bien choisies, en remarquant que calculer $C_n(\omega)$ revient à compter les nombres $j \in [\![1, N]\!]$ pour lesquels il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $X_i(\omega) = j$. Comme une fonction indicatrice est une variable de Bernoulli, son espérance se calcule grâce à son paramètre. On détermine le paramètre d'une de ces variables de Bernoulli en raisonnant plutôt sur la probabilité de l'échec, plus facile à obtenir par du dénombrement (possible puisque les X_i suivent une loi uniforme). Conclure par linéarité de l'espérance.

Commentaires.

Exercice 25.

1. Intuitivement : la σ-additivité et la propriété sur les restes de séries convergentes assurent que peu importe la variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$, la probabilité $\mathrm{P}(X \geqslant a)$ tend vers zéro quand a tend vers l'infini, ce qui veut dire concrètement que X a tendance à rester « petit ». C'est ce qui, dans l'idée, conduit les $X_1, \ldots, X_n$ à prendre des valeurs proches les unes des autres ; il y a donc souvent des collisions et C_n devient petit. Formaliser cet argument en exprimant C_n à l'aide des fonctions indicatrices des évènements $(X_i > a)$ et $(X_i \leqslant a)$, avec a à fixer plus tard. Utiliser la croissance et la linéarité de l'espérance. Choisir alors convenablement a pour avoir le résultat voulu.
2. Reprendre la majoration de la première question en l'affinant. Remarquer que l'hypothèse d'espérance permet de montrer : $a\mathrm{P}(X_i > a) = \underset{a \to +\infty}{o}(1)$ (s'inspirer de la démonstration de l'inégalité de Markov). En déduire, pour tout $\varepsilon > 0$, et par un bon choix de a, une majoration du type : $\mathrm{E}(C_n) \leqslant \bigstar \varepsilon \sqrt{n}$. Conclure.

Commentaires.

Exercice 26.

1. Remarquer qu'il est plus facile d'expliciter $(v_p \geqslant n)$ et d'en déduire sa probabilité. En déduire la loi de v_p par une manipulation analogue à celle qui permet d'avoir la loi d'une variable aléatoire à l'aide de sa fonction de répartition.
2. Voir la question précédente.
3. Le calcul du produit $\prod_{i=1}^{r} \mathrm{P}(v_{p_i} = n_i)$, pour tous r et n_i, découle aisément des questions précédentes (j'ai noté $p_1, \ldots, p_r$ les r premiers nombres premiers). Pour calculer $\mathrm{P}\left(\bigcap_{i=1}^{r} (v_{p_i} = n_i)\right)$, s'inspirer de la première question pour écrire cette probabilité à l'aide de probabilités de la forme $\mathrm{P}\left(\bigcap_{i=1}^{r} (v_{p_i} \spadesuit_i n_i)\right)$ avec $\spadesuit_i \in \{\geqslant, =\}$.

4. Immédiat en utilisant la définition d'une fonction génératrice et la loi explicitée à la première question. Faire apparaître des sommes géométriques.
5. Calculer les dérivées successives de la fonction génératrice trouvée.

Commentaires.

Exercice 27.

1. C'est une loi usuelle. Pour obtenir son paramètre : cela revient à déterminer la probabilité d'avoir au moins un succès (tirer le numéro i) dans une succession d'épreuves d'indépendantes.
2. Écrire X en fonction des X_i et utiliser la linéarité de l'espérance.
3. Noter que X_iX_j est de loi usuelle. Obtenir son paramètre en calculant la probabilité que les numéros i et j sortent dans cette série de lancers. Voici potentiellement une façon de procéder : la première question permet d'obtenir la probabilité que i ou j ne sorte pas. Un calcul analogue permet d'avoir la probabilité qu'aucun des deux ne sorte. Un bon usage de la formule de Moivre permet de conclure. Une fois qu'on a la loi de X_iX_j, le calcul de la covariance est immédiat par la formule de Huygens.
4. La variance d'une somme s'exprime à l'aide de covariances, fort heureusement calculées dans la question précédente.

Commentaires.

✓ **Exercice 28.** (🗎) C'est très standard : voir *Méthodes*, *Lois marginales et lois conjointes*. La loi de N et la loi conditionnelle de X sachant $(N = n)$ sont usuelles. Le calcul de $\mathrm{P}(X = k)$ est subtilement différent pour $k \geqslant 1$ et $k = 0$ (vous aurez un terme en trop dans une somme si vous êtes imprudents). Vous aurez besoin de la formule du binôme négatif.

Commentaires.

✓ **Exercice 29.** (🗎) C'est très standard : voir *Méthodes*, *Lois marginales et lois conjointes*. D'abord reconnaître en X une loi usuelle et noter que la loi conditionnelle de Y sachant $X = i$ est connue. On connaît alors la loi conjointe de X et Y et on veut en déduire la loi marginale de Y : la méthode est connue. Vous aurez à simplifier la somme $\sum\limits_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i}(1-p)^{2n-k-i}$. Pour cela, vous aurez besoin de la formule du binôme de Newton, et de la dériver plusieurs fois (par exemple ; plusieurs approches sont possibles).

Commentaires.

✓ **Exercice 30.** (🗎) C'est très standard : voir *Méthodes*, *Lois marginales et lois conjointes*.

Commentaires.

Approximation, convergence

✓ **Exercice 31. (Approximation de la loi uniforme continue)** D'abord calculer $\mathrm{P}(X_n \leqslant \frac{k}{n})$ avec $k \in [\![0, n]\!]$. En déduire, pour $x \in]0,1]$, $\mathrm{P}(X_n \leqslant x)$, en introduisant le plus grand entier k tel que $\frac{k}{n} \leqslant x < \frac{k+1}{n}$. Passer à la limite.

Commentaires.

Exercice 32. (Problème du collectionneur)

1. Remarquer que pour tout entier k, la variable aléatoire $X_k - X_{k-1}$ correspond à un temps d'attente (avoir la k^{e} image sachant qu'on en a déjà $k-1$). En déduire que cette variable suit une loi usuelle dont on connaît l'espérance (attention au paramètre de succès, qui dépend de k puisqu'il dépend du nombre d'images différentes déjà collectées). Conclure en écrivant X_n à l'aide de ces variables. Obtenir un équivalent est classique : un changement d'indice vous ramène à une somme partielle de séries de Riemann.
2. Démontrer que les variables $X_k - X_{k-1}$ sont indépendantes et obtenir la variance de X_n en raisonnant comme dans la question précédente. Cette variance est une combinaison linéaire de deux sommes partielles de séries de Riemann, celle en facteur de n^2 étant convergente. La majoration demandée en découle aussitôt. Utiliser alors l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour conclure.

Vous aurez besoin de « remplacer » $\mathrm{E}(X_n)$ par l'équivalent obtenu à la question précédente, ce qui ne peut pas se faire sans soin : obtenir une majoration du type $|X_n - n\ln(n)| \leqslant |X_n - \mathrm{E}(X_n)| + \bigstar$. En déduire une inclusion de l'évènement $(X_n - n\ln(n) \geqslant \varepsilon n \ln(n))$ dans un évènement du type $(X_n - \mathrm{E}(X_n) \geqslant \spadesuit)$. Là, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev s'applique et donne le résultat voulu en passant à la limite.

Commentaires.

Exercice 33. On imite la démonstration de la loi faible des grands nombres, en appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. La différence est que des covariances de Y_i et Y_j apparaissent et qu'il faut les simplifier. Pour cela : le lemme des coalitions permet de conclure immédiatement si Y_i et Y_j n'ont pas de facteur en commun. Sinon : calculer la covariance grâce à la formule $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$. Utiliser le fait que $X^2 = X$ si X est de Bernoulli, et l'indépendance des X_i pour simplifier les variables aléatoires dans les espérances. Il ne reste plus que des espérances de variables de Bernoulli à calculer. Conclure.

Commentaires.

Exercice 34. (Inégalité de Paley-Zygmund) Puisqu'on demande de comparer une probabilité à différentes espérances, le problème serait plus naturel en écrivant cette probabilité comme étant elle-même une espérance aussi. On sait faire (revoir si besoin la démonstration de l'inégalité de Markov).

Une fois que vous aurez réécrit convenablement l'inégalité demandée avec des espérances, vous devriez reconnaître un cas particulier d'un résultat du cours.

Commentaires.

Exercice 35. (Inégalité de Hoeffding)

1. Pour la première inégalité : pour comparer $\mathrm{E}(e^{tX_1})$ et $\mathrm{ch}(t)$, notons que cela revient à savoir majorer e^{ta} (avec $a \in \mathbb{R}$) en fonction de e^t et e^{-t}. Remarquer qu'une inégalité de convexité convenablement employée le permet. Remplacer ensuite a par X_1 et prendre l'espérance. C'est ici que sert l'hypothèse que la variable est centrée.

   Pour la deuxième inégalité : comparer les développements en série entière de ch et $t \mapsto e^{\frac{t^2}{2}}$.
2. Pour se ramener à la question précédente, écrire $(|S_n| \geqslant \varepsilon)$ en fonction d'évènements de la forme $(e^{\bigstar} \geqslant \spadesuit)$ et utiliser l'indépendance des variables aléatoires (afin de « séparer les variables aléatoires »).
   Noter que la question précédente suppose $\alpha = 1$. Pas grave : partant d'une variable aléatoire X_i à valeurs dans $[-\alpha, \alpha]$, comment la transformer en une variable aléatoire à valeurs dans $[-1,1]$?
3. D'abord traduire avec quantificateurs ce qu'on doit démontrer, et en déduire une écriture ensembliste de l'évènement $\left(\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 0\right)$, dont on doit montrer qu'il est de probabilité 1. Remarquer alors que le résultat voulu découle de la question précédente (avec une valeur bien choisie de ε) et du lemme de Borel-Cantelli (exercice 12).

Commentaires.

★ **Exercice 36. (Loi forte des grands nombres : cas particulier)** Voir la dernière question de l'exercice 35 (j'ai fait accidentellement un doublon).

Commentaires.

Fonctions génératrices

✓ **Exercice 37. (📄C)** On sait calculer la fonction génératrice d'une somme de r variables aléatoires indépendantes. Celle d'une variable de loi géométrique est usuelle.

Commentaires.

Exercice 38. Montrer d'abord que si Christian ou Lionel gagne au n^{e} lancer, alors la suite des $n-3$ premiers lances doit être de la forme $\mathrm{P}^q(\mathrm{FP})^r\mathrm{F}^s$ avec q, r, s des entiers tels que $q + 2r + s = n - 3$ (en remarquant qu'autrement, la partie aurait déjà été achevée avant le n^{e} lancer). Les trois lancers suivants dépendent selon que ce soit Christian ou Lionel le vainqueur.

Conclure que la probabilité c_n que Christian gagne au n^{e} lancer est de la forme $c_n = \left(\sum\limits_{q+2r+s=n-3} \bigstar\right)\spadesuit$, où $\spadesuit$ provient des probabilités que les trois derniers lancers assurent la victoire de Christian, et $\bigstar$ correspond à la probabilité d'avoir $P^q(FP)^rF^s$. Calculer c_n en introduisant la série génératrice $\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$ et en remarquant que l'égalité ci-avant permet d'écrire la somme de cette série comme un produit de trois sommes usuelles. Simplifier le tout. En déduire la probabilité que Christian gagne en considérant $z \to 1$ (pourquoi ?). Procéder de même pour avoir la probabilité que Lionel gagne.

Il n'est pas difficile d'en déduire une valeur de p qui donne l'égalité entre les deux probabilités calculées.

Commentaires.

★ **Exercice 39. (Fonction caractéristique)**

1. Utiliser le théorème de continuité d'une limite uniforme (s'il vous ennuie de ne pas avoir une somme indexée par les entiers naturels : s'y ramener grâce à la dénombrabilité de $X(\Omega)$). La convergence normale s'obtient en majorant $\left|e^{itx}P(X=x)\right|$ indépendamment de t.
2. C'est exactement la même démonstration que pour les fonctions génératrices.
3. S'inspirer de la démonstration de la formule intégrale de Cauchy (exercice 26 du chapitre VIII) pour exprimer $P(X=x)$ en fonction de Φ_X. Conclure avec l'égalité $\Phi_X = \Phi_Y$.

Commentaires.

★ **Exercice 40. (Formule de Wald)** Dans le développement en série entière de G_{S_N}, exprimer $P(S_N=n)$ en fonction des lois de N et $X_1, \dots, X_k$ (à quelles conditions sur ces variables aléatoires l'évènement $(S_N = n)$ se réalise ?). Utiliser un théorème sur les familles sommables afin de faire apparaître $\sum_{k=1}^{+\infty} P(N=k)\bigstar$, et remarquer que ★ donne la fonction génératrice de $\sum_{i=1}^{k} X_i$. Or on sait simplifier la fonction génératrice d'une somme vérifiant certaines hypothèses. Conclure. On connaît ensuite le lien entre espérance et fonction génératrice.

Commentaires.

Exercice 41. Raisonner par l'absurde. Si X et Y sont les résultats donnant les lancers des deux dés, alors G_{X+Y} est explicite grâce à l'hypothèse absurde, et s'exprime en fonction de G_X et G_Y grâce à un résultat du cours. Comparer les racines réelles non nulles de G_X, G_Y et G_{X+Y} (celles de G_{X+Y} sont très bien connues, l'existence de racines réelles non nulles de G_X et G_Y nécessite en revanche un argument indirect mais classique sur le degré des polynômes) pour avoir une absurdité.

La contradiction peut aussi provenir d'autres arguments polynomiaux.

Commentaires.

☢ **Exercice 42. (Théorème de Raikov)**

1. On aurait envie de poser $T = \ln(S)$, chose qui n'a en général pas de sens mais peut quand même vous inspirer. Poser : $T(x) = \int_0^1 \bigstar \mathrm{d}t$ (ou $\int_1^x \bigstar \mathrm{d}t$), où ★ correspond à ce qui apparaîtrait si T était effectivement un logarithme de S comme on l'entendrait pour une fonction S strictement positive.
   Pour montrer que T est développable en série entière sur $\mathbb{C}$: c'est là que les choses se corsent (beaucoup). Se convaincre que cela revient à démontrer que c'est le cas de $\frac{1}{S}$. Des exercices du chapitre VIII le permettent (l'exercice 23 semble être le plus adapté, mais en vérité la formule intégrale de Cauchy, convenablement employée, remplit mieux son office si l'on veut avoir un rayon de convergence maximal : si $\frac{1}{S}$ est développable en série entière, comment s'écrivent ses coefficient a_n en fonction de S ? faire la synthèse).
   Vérifier ensuite que $\exp(T) = S$ par dérivation de $S\exp(-T)$.
2. Remarquer que $G_X(t)G_Y(t) = e^{\lambda(t-1)}$ implique que G_X et G_Y ne s'annulent pas. Vérifier qu'elles sont définies sur $\mathbb{C}$ (faire un produit de Cauchy et isoler un terme du n^{e} coefficient pour en déduire une majoration de $P(X=n)$, ou de $P(Y=n)$, qui suffit à montrer que le rayon de convergence de ces deux séries génératrices est infini ; on déduit de ces mêmes majorations que G_X et G_Y sont dominées par une fonction exponentielle sur $\mathbb{C}$). Appliquer la question précédente à ces deux fonctions. Si l'on note T_X et T_Y des fonctions telles que $G_X = \exp(T_X)$ et $G_Y = \exp(T_Y)$, utiliser les majorations de G_X et G_Y que vous avez dû trouver précédemment, afin d'en déduire une majoration de $\mathrm{Re}(T_X)$ et $\mathrm{Re}(T_Y)$. S'inspirer de la démonstration du théorème de Liouville (ou de l'exercice 48, chapitre VIII aussi) pour en déduire que T_X et T_Y sont des fonctions affines. Expliciter les coefficients de ces fonctions affines grâce à l'égalité $G_X(t)G_Y(t) = e^{\lambda(t-1)}$. Conclure.

Commentaires.