Exercices du chapitre IX (Probabilités discrètes)

✓ : exercice d'application des méthodes, ★ : exercice classique, ☢ : exercice difficile.

Probabilités, variables aléatoires

★ **Exercice 1. (Loi hypergéométrique)** L'équipe de football de Lionel Messire, l'En Avant Montvendre (localisée près de Barcelonne dans la Drôme), possède N joueurs sous contrat fédéral, dont n joueurs qui ont régulièrement recours à des méthodes médicales illicites pour améliorer leurs performances.

Un beau jour, un contrôle anti-dopage fait irruption dans leur vestiaire, et choisit uniformément au hasard ℓ joueurs parmi les N de l'équipe, pour procéder à une analyse sanguine qui détecterait quasi-certainement les joueurs en fraude.

On suppose l'existence d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ modélisant cette expérience. Soit X la variable aléatoire comptant, parmi les ℓ joueurs choisis par le contrôle anti-dopage, combien sont *effectivement* dopés.

1. Donner $E = X(\Omega)$, et calculer $p_k = \mathrm{P}(X = k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$.
2. Réciproquement, vérifier que $(p_k)_{k \in E}$ est bien une distribution de probabilités.
3. Calculer l'espérance de X.
4. On numérote de 1 à n les joueurs dopés. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note Y_i la variable aléatoire valant 1 si le i^{e} joueur a été sélectionné pour le test anti-dopage, et 0 sinon. Calculer la covariance de Y_i et Y_j pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ et en déduire la variance de X.
5. On suppose : $n = pN$, avec : $p \in]0,1[$. Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} \mathrm{P}(X = k) = \binom{\ell}{k} p^k (1-p)^{\ell - k}$. Expliquer le résultat obtenu.

On dit que la variable aléatoire de cet exercice suit une loi hypergéométrique de paramètres ℓ, $\frac{n}{N}$ et N.

★ **Exercice 2.** Deux joueurs A et B lancent à tour de rôle une pièce truquée, qui donne « face » avec la probabilité $p \in]0,1[$. Le joueur A commence, et la partie s'achève dès qu'un joueur obtient « face » (et dans ce cas le joueur en question gagne). Donner la probabilité de gagner de chaque joueur, ainsi que la probabilité que le jeu ne s'arrête jamais. Est-il une valeur de p qui assure que les deux joueurs aient la même probabilité de gagner ?

✓ **Exercice 3.** Dans une population donnée, on suppose que la probabilité p_k pour qu'une famille ait k enfants est définie par $p_0 = p_1 = a$ et, pour tout $k \geqslant 2$, $p_k = \dfrac{1-2a}{2^{k-1}}$, où $a \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$. On suppose de plus que la probabilité d'avoir un garçon ou une fille lors de la naissance est la même.

1. Quelle est la probabilité pour qu'une famille ayant deux garçons ait deux enfants seulement ?
2. Quelle est la probabilité pour qu'une famille ait deux filles sachant qu'elle a deux garçons ?

✓ **Exercice 4.** Pour étudier les capacités d'adaptation des souris, des biologistes ont mis au point le protocole suivant. Ils placent une souris dans une boîte comportant trois issues A, B et C. Les deux premières conduisent à un cul-de-sac alors que la troisième conduit à un morceau de gruyère. Après que la souris a choisi son issue, les scientifiques la remettent au centre de la boîte pour répéter l'expérience. Ils observent les résultats suivants :

— si la souris choisit la sortie A, elle sort la fois suivante en B ou C de façon équiprobable ;

— si elle choisit la sortie B, elle sort la fois suivante en A ou C avec la même probabilité ;

— si elle choisit la sortie C, elle la choisit de nouveau systématiquement la fois suivante.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé modélisant cette expérience. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on note A_n (respectivement B_n, C_n) l'évènement : « la souris a choisi la sortie A (respectivement B, C) à la n^{e} expérience », et on pose : $a_n = \mathrm{P}(A_n)$, $b_n = \mathrm{P}(B_n)$ et $c_n = \mathrm{P}(C_n)$. À la première expérience la souris sort par l'issue A, c'est-à-dire : $a_1 = 1$ et $b_1 = c_1 = 0$.

Donner la limite quand $n \to +\infty$ de a_n, b_n et c_n. Interpréter le résultat.

✓ **Exercice 5.** Soient $p \in]0, 1[$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Au dernier rang d'une salle de cours sont assises n personnes $P_1, \dots, P_n$. La personne P_1 reçoit de son voisin de devant une information sous la forme oui ou non, puis transmet une information à P_2, qui lui-même en transmet une à P_3, ainsi de suite, jusqu'à ce que P_n reçoive une information de P_{n-1} et prenne la parole devant tout le monde pour annoncer quelque chose.

Ces personnes transmettent telle quelle l'information qu'elles ont reçue avec la probabilité p et transmettent l'information contraire avec une probabilité $1 - p$, les transmissions étant indépendantes entre elles.

Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, calculer la probabilité p_n que l'information annoncée par P_n soit la même que celle communiquée à P_1. En déduire le comportement de $(p_n)_{n \geqslant 1}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 6. On lance indéfiniment une pièce de monnaie équilibrée, et pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ on note p_n la probabilité qu'on n'obtienne jamais trois « piles » consécutifs au cours des n premiers lancers. Soit aussi : $p_0 = 1$.

1. Calculer p_1, p_2 et p_3.
2. Trouver une relation de récurrence entre p_n, p_{n-1}, p_{n-2} et p_{n-3}, valable pour tout entier $n \geqslant 3$.
3. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.

Exercice 7. Christian Renauld, joueur de football fictif de l'AS Verderel à Juvignies, est incontestablement le meilleur buteur de District (troisième division). Son rival Lionel Messire, joueur de l'En Avant Montvendre (localisé près de la ville de Barcelonne) est distancé au classement des buteurs mais essaie de le rattraper. C'est la dernière journée de championnat, il ne reste plus de match à jouer pour l'AS Verderel, tandis qu'il reste encore un match pour l'En Avant Montvendre. Christian Renauld a $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ buts d'avance sur Lionel Messire.

En sachant que Lionel Messire a une probabilité $p \in]0,1[$ de marquer un but à chaque tir lors de son dernier match, donner la probabilité pour que les deux rivaux aient le même nombre de buts après k tirs de Lionel Messire, puis déterminer l'espérance du nombre de tirs nécessaires pour que Lionel Messire égale le nombre de buts de son rival.

Exercice 8. (Urnes de Pólya) Soit $c \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On considère une urne contenant initialement une boule blanche et une noire. Après chaque tirage, on remet la boule tirée dans l'urne et c boules de la même couleur que cette dernière. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on note p_n la probabilité que la première boule blanche soit obtenue au n^{e} tirage.

1. Ici $c = 1$. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $p_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
2. On revient au cas général et note $a_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{1+kc}{2+kc}$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
   (a) Écrire p_n à l'aide de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ pour tout $n \geqslant 2$.
   (b) Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ converge vers 0.
   (c) En déduire la probabilité de ne jamais obtenir de boule blanche.

Exercice 9. On dispose de deux urnes $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$, la première contient initialement deux boules noires et la seconde deux boules blanches. À chaque tirage, on tire une boule dans chaque urne, on les échange et les remet dans les urnes. On note X_n la variable aléatoire égal au nombre de boules noires dans l'urne $\mathcal{U}_1$ après la remise du n^{e} tirage.

1. Montrer que l'espérance de X_n est indépendante de n.
2. Déterminer la loi de X_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

✓ **Exercice 10.** Soient X, Y et Z trois variables aléatoires indépendantes, suivant la même loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose : $M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) & Z(\omega) \\ X(\omega) & Y(\omega) & Z(\omega) \\ X(\omega) & Y(\omega) & Z(\omega) \end{pmatrix}$. Quelle est la probabilité que M soit diagonalisable ? Que M soit une matrice de projecteur ?

★ **Exercice 11. (Temps d'attente d'au moins un succès)** Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre p. On pose : $T = \min(X, Y)$. Donner la loi de T.

★ **Exercice 12. (Lemme de Borel-Cantelli)** Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n \geqslant 0}$ une suite d'évènements de $\mathcal{A}$. On pose : $\limsup A_n = \displaystyle\bigcap_{p \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geqslant p} A_n$.

1. Montrer que $\limsup A_n$ est un évènement dont on éclaircira le sens concret.
2. On suppose que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \mathrm{P}(A_n)$ converge. Montrer : $\mathrm{P}(\limsup A_n) = 0$.

★ **Exercice 13. (Loi du zéro-un de Borel)** Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n \geqslant 0}$ une suite d'évènements *indépendants* de $\mathcal{A}$. On reprend la notation $\limsup A_n$ de l'exercice 12. On suppose que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \mathrm{P}(A_n)$ diverge.

1. Montrer : $\mathrm{P}\left(\overline{\limsup A_n}\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{P}\left(\displaystyle\bigcap_{k \geqslant n} \overline{A_k}\right)$.
2. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{N \to +\infty} \displaystyle\prod_{k=n}^{N} (1 - \mathrm{P}(A_k)) = 0$ grâce à la convexité de l'exponentielle. Conclure.

Exercice 14. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'évènements de $\mathcal{A}$.

1. Montrer que si les évènements A_n sont deux à deux disjoints, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{P}(A_n) = 0$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. On suppose dans cette question : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{P}(A_k) > 1 - \dfrac{1}{n}$. Montrer : $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k \neq \emptyset$.
3. On suppose dans cette question que la suite $(\mathrm{P}(A_n))_{n\geqslant 0}$ ne converge pas vers 0. Montrer qu'il existe un résultat $\omega \in \Omega$ appartenant à une infinité de A_k.

✓ **Exercice 15.** Soit $N \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Je dispose de N clés, dont celle de la serrure que je dois ouvrir. Quel est le nombre moyen de clés que je dois tester si je mets de côté chaque clé qui ne convient pas ? Et si je ne le fais pas ?

Exercice 16. L'ascenseur d'un immeuble dessert p étages. Un ensemble de n personnes montent au rez-de-chaussée dans l'ascenseur, et se rendent chacune à un étage quelconque. On note X la variable aléatoire indiquant le nombre d'arrêts effectués par l'ascenseur. Calculer l'espérance de X.

★ **Exercice 17. (Espérance conditionnelle)** Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé et $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'évènements. Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω ayant une espérance. Montrer que X sachant A_i admet une espérance pour tout $i \in I$ (que l'on note $\mathrm{E}(X \mid A_i)$), et que : $\mathrm{E}(X) = \sum\limits_{i\in I} \mathrm{E}(X \mid A_i)\mathrm{P}(A_i)$.

Vecteurs aléatoires

✓ **Exercice 18.** Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

1. Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne deux points et pour chaque boule noire tirée, il perd trois points. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées et Y le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.
   (a) Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
   (b) Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.
2. On suppose maintenant que les cinq tirages successifs se font sans remise. Déterminer la loi de X, puis celle de Y.

★ **Exercice 19. (Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$)** On considère une particule se déplaçant sur une droite graduée par les entiers relatifs. Sa position à l'instant initial $t = 0$ est $k = 0$. À chaque instant $t \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, elle se déplace aléatoirement de sa position $k \in \mathbb{Z}$ à la position $k + 1$ ou $k - 1$.
Soit $p \in]0,1[$. On définit sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ une suite de variables aléatoires indépendantes $(X_t)_{t\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ et identiquement distribuées dont la loi est définie par : $\forall t \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $\mathrm{P}(X_t = 1) = p$, et : $\mathrm{P}(X_t = -1) = 1 - p$. Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, on pose : $S_n = \sum\limits_{t=1}^{n} X_t$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ on a : $\mathrm{P}(S_n = 0) = \begin{cases} \dbinom{n}{n/2}(p(1-p))^{n/2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
2. Déterminer la limite de la suite $(\mathrm{P}(S_{2n} = 0))_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ lorsque n tend vers $+\infty$ selon les valeurs de p et interpréter le résultat.

Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on note O_{2j} la variable aléatoire égale à 1 si la particule est à l'origine à l'instant $t = 2j$, et 0 sinon. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $T_n = \sum\limits_{j=0}^{n} O_{2j}$.

3. Montrer : $\mathrm{E}(T_n) = \sum\limits_{j=0}^{n} \dbinom{2j}{j}(p(1-p))^j$.
4. On suppose dans cette question que $p \neq \dfrac{1}{2}$. Calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{E}(T_n)$, et interpréter le résultat.
5. On suppose dans cette question que $p = \dfrac{1}{2}$. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{E}(T_n) = \dfrac{2n+1}{2^{2n}}\dbinom{2n}{n}$, et en déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{E}(T_n)$.

Exercice 20. On dit qu'une variable aléatoire X suit la *loi de Rademacher* si elle suit la loi uniforme sur $\{-1,1\}$.

Soient n un entier naturel non nul et $((m_{i,j}))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une famille de n^2 variables aléatoires réelles discrètes indépendantes suivant toutes la loi de Rademacher. On définit alors : $M_n = ((m_{i,j}))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. On pose : $\tau_n = \mathrm{tr}\,(M_n)$, et : $\delta_n = \det\,(M_n)$.

1. Calculer $\mathrm{E}(\tau_n)$ et $\mathrm{V}(\tau_n)$.
2. Montrer : $\mathrm{E}\,(\delta_n) = 0$, et : $\mathrm{V}\,(\delta_n) = n!$.

Exercice 21. Soient a, b et c les résultats du lancer de trois dés équilibrés à six faces. Les lancers sont supposés indépendants. Quelle est la probabilité pour que le polynôme du second degré $aX^2 + bX + c$ issu de ces tirages, admette une racine double ? deux racines réelles distinctes ? n'admette pas de racines réelles ?

Exercice 22. Soient $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ et n variables aléatoires réelles discrètes $X_1, \ldots, X_n$ sur un même espace probabilisé, indépendantes et de somme $\sum_{k=1}^{n} X_k$ presque sûrement constante. Montrer que chacune des variables X_i est presque sûrement constante.

Exercice 23. Soit $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables réelles discrètes sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, indépendantes. On suppose : $\forall i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\mathrm{P}(X_i = 1) = \mathrm{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on définit les variables aléatoires $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ et $Z_n = \prod\limits_{k=1}^{n} X_k$.

Étudier l'indépendance de la suite de variables aléatoires $(S_n)_{n\geqslant 1}$ puis celle de $(Z_n)_{n\geqslant 1}$.

Exercice 24. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes, qui suivent toutes la loi uniforme sur $[\![1, N]\!]$. Déterminer l'espérance de : $\mathrm{card}(\{X_1, \ldots, X_n\})$.

Exercice 25. Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, indépendantes et identiquement distribuées. On pose : $C_n = \mathrm{card}(\{X_1, \ldots, X_n\})$.

1. Montrer : $\mathrm{E}(C_n) \underset{n\to+\infty}{=} o(n)$.
2. On suppose que les X_i admettent une espérance. Montrer : $\mathrm{E}(C_n) \underset{n\to+\infty}{=} o(\sqrt{n})$.

Exercice 26. Soit $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Pour tout $p \in \mathbb{P}$, la valuation p-adique $v_p : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ est une variable aléatoire sur l'espace probabilisé $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \mathcal{P}(\mathbb{N} \setminus \{0\}), \mathrm{P})$ avec : $\forall x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\mathrm{P}(\{x\}) = \dfrac{1}{\zeta(2)x^2}$ (ici ζ est la fonction dzêta de Riemann).

1. Déterminer la loi de chaque v_p avec $p \in \mathbb{P}$.
2. Calculer alors $\mathrm{P}(v_p \geqslant n)$ pour $p \in \mathbb{P}$ et $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que les variables $(v_p)_{p\in\mathbb{P}}$ sont indépendantes.
4. Déterminer la fonction génératrice de chaque v_p.
5. En déduire l'espérance et la variance des variables aléatoires v_p.

Exercice 27. Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. On lance n dés équilibrés à six faces et note X le nombre de numéros distincts apparus lors de ces n lancers. On considère aussi X_i la variable de Bernoulli indiquant si le numéro i est sorti ($X_i(\omega) = 1$ indique que le numéro i est sorti).

1. Déterminer la loi de X_i.
2. Calculer l'espérance de X.
3. Pour tous entiers i et j tels que : $i \neq j$, déterminer la loi de $X_i X_j$ ainsi que la covariance $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$. Les variables X_i et X_j sont-elles indépendantes ?
4. Déterminer la variance de X.

✓ **Exercice 28.** On considère une urne contenant une boule noire et quatre boules blanches. On effectue l'expérience aléatoire suivante :

— on commence par tirer des boules de l'urne une à une avec remise jusqu'à obtenir la boule noire (que l'on remet aussi dans l'urne) et l'on note N le nombre de tirages effectués ;

— puis on réalise N nouveaux tirages dans l'urne, toujours avec remise, et l'on note X le nombre de fois où la boule noire a été obtenue dans cette seconde série de tirages.

Donner les lois de probabilité des variables aléatoires N et X.

✓ **Exercice 29.** Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Une secrétaire appelle n clients. Chaque client répond avec une probabilité de $p \in]0,1[$, indépendamment des autres. On note X la variable aléatoire réelle discrète correspondant au nombre de clients ayant répondu lors de cet appel. Ensuite elle décide de rappeler ceux qui n'ont pas répondu, soit $n - X$ personnes, et on note Y le nombre de personnes ayant répondu lors de ce second appel (mêmes hypothèses sur les réponses).

On pose : $Z = X + Y$. Déterminer la loi de Z.

✓ **Exercice 30.** Un péage comporte m guichets numérotés de 1 à m. Soit N la variable aléatoire égale au nombre de voitures arrivant au péage en une heure. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose de plus que les conducteurs choisissent leur file au hasard et que ces choix sont indépendants.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de voitures se présentant au guichet n^o 1. Donner la loi de X.

Approximation, convergence

✓ **Exercice 31. (Approximation de la loi uniforme continue)** Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on note E_n l'ensemble : $E_n = \left\{ \dfrac{k}{n} \mid k \in [\![0,n]\!] \right\}$, et X_n est une variable aléatoire réelle discrète suivant la loi uniforme sur E_n. Soit $x \in [0,1]$. Calculer : $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{P}(X_n \leqslant x)$.

Exercice 32. (Problème du collectionneur) Un fabricant de chocolat met dans chacune de ses tablettes une image faisant partie d'une collection de n images distinctes. On suppose que chaque tablette contient une des n images avec la même probabilité, et les choix d'images mises dans les tablettes sont indépendants d'une tablette à l'autre. On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tablettes qu'il faut acheter pour réunir la collection complète.

1. Calculer l'espérance de X_n et en donner un équivalent quand n tend vers $+\infty$.
2. Calculer la variance de X_n. Montrer qu'il existe une constante C avec $\mathrm{V}(X_n) \leqslant Cn^2$. En déduire : $\forall \varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n \to \infty} \mathrm{P}\left(\left| \dfrac{X_n}{n \ln(n)} - 1 \right| \geqslant \varepsilon \right) = 0$.

Exercice 33. On considère une suite de variables aléatoires indépendantes $(X_n)_{n \geqslant 0}$, suivant une même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on pose : $Y_i = X_i X_{i+1}$. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On pose : $S_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=0}^{n-1} Y_i$. Montrer : $\forall \varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{P}\left(|S_n - p^2| \geqslant \varepsilon \right) = 0$.

Exercice 34. (Inégalité de Paley-Zygmund) Soient $\eta \in]0,1[$ et X une variable aléatoire dans L^2, positive, telle que : $\mathrm{E}(X^2) > 0$. Montrer : $\mathrm{P}(X \geqslant \eta \mathrm{E}(X)) \geqslant (1-\eta)^2 \dfrac{(\mathrm{E}(X))^2}{\mathrm{E}(X^2)}$.

Exercice 35. (Inégalité de Hoeffding) Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles discrètes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, indépendantes et identiquement distribuées, à valeurs dans $[-\alpha, \alpha]$ avec $\alpha > 0$, et centrées. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on pose : $S_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

1. Dans cette question : $\alpha = 1$. Montrer : $\forall t > 0$, $\mathrm{E}\left(e^{tX_1}\right) \leqslant \mathrm{ch}(t) \leqslant e^{\frac{t^2}{2}}$.
2. Montrer : $\forall \varepsilon > 0$, $\forall n \geqslant 1$, $\mathrm{P}(|S_n| \geqslant \varepsilon) \leqslant 2e^{-\frac{n\varepsilon^2}{2\alpha^2}}$.

★ **Exercice 36. (Loi forte des grands nombres : cas particulier)** Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles discrètes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, indépendantes et identiquement distribuées, à valeurs dans $[-1,1]$ et centrées. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on pose : $S_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, et : $A = \left\{ \omega \in \Omega \mid \lim\limits_{n \to +\infty} S_n(\omega) = 0 \right\}$.

1. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ on a : $\mathrm{P}\left(\bigcap\limits_{n \geqslant 1} \bigcup\limits_{m \geqslant n} (|S_m| > \varepsilon) \right) = 0$. *On utilisera l'exercice 35.*
2. Montrer : $\mathrm{P}(A) = 1$.

Fonctions génératrices

✓ **Exercice 37.** Soit $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Donner la fonction génératrice d'une somme de r variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

Exercice 38. Lionel Messire et Christian Renauld jouent à pile ou face en répétant le lancer une pièce non équilibrée, dont la probabilité de tomber sur pile est $p \in]0,1[$. Lionel gagne dès que la séquence « FFP » est apparue (et dans ce cas la partie s'arrête), tandis que Christian gagne dès que « FPP » est apparue (idem).

Donner la probabilité de victoire de Lionel et Christian. Existe-t-il une valeur de p tel que le jeu soit équitable ?

★ **Exercice 39. (Fonction caractéristique)** Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes.

1. Montrer que l'application $\Phi_X : t \mapsto \mathrm{E}\left(e^{itX}\right)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. On suppose X et Y indépendantes. Montrer : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t)\Phi_Y(t)$.
3. On suppose X et Y à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Montrer que si : $\Phi_X = \Phi_Y$, alors X et Y ont même loi.

★ **Exercice 40. (Formule de Wald)** Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes et identiquement distribuées sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$. Soit $N : \Omega \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ une variable aléatoire indépendante des X_i. On pose : $\forall \omega \in \Omega$, $S_N(\omega) = \displaystyle\sum_{n=1}^{N(\omega)} X_n(\omega)$. Montrer : $G_{S_N} = G_N \circ G_{X_1}$, et en déduire : $\mathrm{E}(S_N) = \mathrm{E}(N)\mathrm{E}(X_1)$.

Exercice 41. Démontrer que l'on ne peut pas truquer deux dés indépendants et à six faces, de sorte que la somme des points obtenue en les lançant soit équirépartie. *Utiliser les fonctions génératrices.*

☢ **Exercice 42. (Théorème de Raikov)**

1. Montrer que si S est une somme de série entière définie sur $\mathbb{C}$ et ne s'annulant pas, alors il existe une série entière de rayon de convergence infini, dont on note T la somme, telle que : $S = \exp(T)$.
2. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes, à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes, non nulles presque sûrement, telles que $X + Y$ suive une loi de Poisson. Montrer que X et Y suivent une loi de Poisson.