Exercices du chapitre I (Intégration)

✓ : exercice d'application des méthodes, ★ : exercice classique, ☢ : exercice difficile.

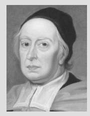
Calcul intégral sur un segment

Exercice 1. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan(x))^n \mathrm{d}x$.

1. Simplifier $I_n + I_{n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, exprimer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+2}$ en fonction de termes de la suite $(I_n)_{n \geqslant 0}$, et en déduire : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} = -\ln(2)$, et : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$.

★ **Exercice 2. (Irrationalité de π)** Supposons l'existence d'entiers non nuls a et b tels que : $\pi = \dfrac{b}{a}$. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0, \pi]$, $f_n(x) = \dfrac{x^n (bx-a)^n}{n!}$.

1. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{\pi} f_n(t) \sin(t) \mathrm{d}t \in \mathbb{Z}$.
2. Montrer : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\pi} f_n(t) \sin(t) \mathrm{d}t = 0$, et conclure.



1616-1703

★ **Exercice 3. (Intégrales de Wallis)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons : $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^n \mathrm{d}t$.

1. Donner une expression explicite de W_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que la suite $((n+1)W_{n+1}W_n)_{n \geqslant 0}$ est constante égale à $\dfrac{\pi}{2}$, et en déduire : $W_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Exercice 4.

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$ est définie et de classe C^1 sur $]0{,}1[$ et $]1, +\infty[$.
2. Étudier ses variations, et déterminer les limites de f en 0 et $+\infty$.
3. Calculer la limite de f en 1.

1863-1942

Exercice 5. (Égalité de Young) Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une application continue, strictement croissante et telle que $f(0) = 0$, et : $\displaystyle\lim_{+\infty} f = +\infty$.

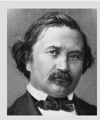
1. On suppose d'abord f de classe C^1. Montrer : $\forall a \in \mathbb{R}_+$, $af(a) = \displaystyle\int_0^a f + \int_0^{f(a)} f^{-1}$.
2. On ne suppose plus f de classe C^1. Montrer que l'égalité de la question précédente reste valable.

Intégrales impropres, étude pratique

✓ **Exercice 6.** Étudier la nature des intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t) e^{-t} \mathrm{d}t$, (b) $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\ln(1-t)\mathrm{d}t$, (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{(t+1)^{3/2}}\mathrm{d}t$,

(d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it-t^2}\mathrm{d}t$, (e) $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-(\ln(t))^\alpha}\mathrm{d}t$, $\alpha \in \mathbb{R}$, (f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t+1}-\sqrt{t}}{t^\alpha}\mathrm{d}t$, $\alpha \in \mathbb{R}$.



1822-1900

✓ **Exercice 7.** Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Étudier, selon les valeurs de α et β, la nature des intégrales :

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha(1+t^\beta)}$, (b) $\displaystyle\int_0^1 t^\beta \ln(1+t^\alpha)\,\mathrm{d}t$, (c) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha(\ln(t))^\beta}\mathrm{d}t$, (d) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha|\ln(t)|^\beta}\mathrm{d}t$, (e) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha|\ln(t)|^\beta}\mathrm{d}t$.

Les trois dernières intégrales sont appelées les *intégrales de Bertrand*.

✓ **Exercice 8.** Déterminer $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tels que $\displaystyle\int_0^1 \frac{|\ln(x)|^\beta}{(1-x)^\alpha}\mathrm{d}x$ soit convergente. La calculer pour $(\alpha,\beta)=\left(\frac{1}{2},1\right)$.

★ **Exercice 9.** Soit $(k,\ell)\in\mathbb{N}^2$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^k(\ln(x))^\ell\mathrm{d}x$ converge, et la calculer.

✓ **Exercice 10.** Montrer l'existence des intégrales suivantes, et les calculer :

$$\text{(a)}\ \int_0^1(1+t^2)\ln(t)\mathrm{d}t,\quad \text{(b)}\ \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)},\quad \text{(c)}\ \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2},\quad \text{(d)}\ \int_0^{+\infty}\cos(t)e^{-t}\mathrm{d}t.$$

✓ **Exercice 11.** Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable indiqué :

$$\text{(a)}\ \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+e^x)(1+e^{-x})}\ (t=e^x)\,,\quad \text{(b)}\ \int_0^{+\infty}\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)^2\ln(x)\mathrm{d}x\ \left(t=\frac{1}{x}\right),\quad \text{(c)}\ \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+(2\mathrm{ch}(x))^2}\ (t=e^x)\,.$$

☢ **Exercice 12. (Méchantes intégrales impropres)** Donner la nature des intégrales suivantes :

$$\text{(a)}\ \int_0^{+\infty}\frac{\sin(x)\ln(x)}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x,\quad \text{(b)}\ \int_0^{+\infty}|\sin(x)|^x\mathrm{d}x,\quad \text{(c)}\ \int_0^{+\infty}\cos(P(x))\mathrm{d}x,\ \text{avec : } P\in\mathbb{R}[X]\setminus\mathbb{R}_1[X].$$

★ **Exercice 13. (Intégrales de Dirichlet)** Justifier que les intégrales $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos(x))\mathrm{d}x$ et $J=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin(x))\mathrm{d}x$ convergent, et les calculer en considérant $I+J$.

★ **Exercice 14. (Fonction Bêta d'Euler)** Soient $x,y\in\mathbb{R}$.

1. Démontrer que l'intégrale $\mathrm{B}(x,y)=\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si $x>0$ et $y>0$.
2. Montrer, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x>0$, l'égalité : $\mathrm{B}(n+1,x)=\dfrac{n!}{\prod\limits_{k=0}^{n}(x+k)}$.

Intégrales impropres, étude théorique

Exercice 15. Soient $a\in\mathbb{R}$ et $f:[a,+\infty[\to\mathbb{C}$ une application continue sur $[a,+\infty[$ telle que $\displaystyle\int_a^{+\infty}f$ converge.

★ 1. On suppose uniquement dans cette question que f est uniformément continue. Montrer : $\lim\limits_{+\infty}f=0$.
2. On suppose que f est à valeurs réelles, positive et décroissante. Montrer : $f(x)\underset{x\to+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Exercice 16. Soit $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ une application de classe C^2 telle que f^2 et f''^2 soient intégrables sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que $f''f$ et f'^2 le sont également.

Exercice 17. Soit $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ une application de classe C^1 telle que f'^2 et $t\mapsto(tf(t))^2$ soient intégrables sur $\mathbb{R}_+$.

1. Montrer que f^2 et $t\mapsto t(f(t))^2$ sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer : $\lim\limits_{t\to+\infty}t(f(t))^2=0$.
3. Montrer : $\displaystyle\int_0^{+\infty}(f(t))^2\mathrm{d}t\leqslant 2\sqrt{\int_0^{+\infty}(tf(t))^2\mathrm{d}t}\sqrt{\int_0^{+\infty}(f'(t))^2\mathrm{d}t}$.

☢ **Exercice 18.** Soit f une application continue sur $\mathbb{R}_+$, et vérifiant : $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2f(x)=0$.

1. Pour tout $h\in\mathbb{R}_+^*$, montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant1}hf(nh)$ converge absolument.
2. Montrer : $\lim\limits_{h\to0^+}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}hf(nh)=\displaystyle\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$.
3. Donner un équivalent quand $x\to1^-$ de : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x^{n^2}$. On admet : $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-u^2}\mathrm{d}u=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (*voir les exercices 37, 38 et 41 pour différentes démonstrations*).

On peut démontrer le résultat de la deuxième question bien plus facilement si f est monotone, ce qui est suffisant dans bien des situations. Je vous encourage à aussi la traiter sous cette hypothèse.

Développements asymptotiques

Exercice 19. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1+t}}\mathrm{d}t$. Donner un développement asymptotique à deux termes de la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$.

Exercice 20. Montrer : $\forall m \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)} = \sum_{k=0}^{m} \frac{k!x}{(\ln(x))^{k+1}} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{x}{(\ln(x))^{m+1}}\right)$.

☢ **Exercice 21.**

1. Pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, on pose : $I_\varepsilon = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sqrt{(\sin(x))^2+\varepsilon(\cos(x))^2}}\mathrm{d}x$. Montrer : $I_\varepsilon = -\dfrac{1}{2}\ln(\varepsilon) + \ln(2) + \underset{\varepsilon\to 0}{o}(1)$.
2. Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, on pose : $J_\varepsilon = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(\sin(x))^2+\varepsilon(\cos(x))^2}}$. Montrer : $J_\varepsilon = -\dfrac{1}{2}\ln(\varepsilon) + 2\ln(2) + \underset{\varepsilon\to 0}{o}(1)$.
3. Trouver un équivalent quand $\varepsilon \to +\infty$ de J_ε.

☢ **Exercice 22.** Donner un équivalent quand $t \to 0$ de : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)(t+x)}}$.

Exercice 23. (Développement asymptotique des sommes de Riemann) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application de classe C^3 sur $[a,b]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, on pose : $S_n(f) = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)$.

1. Montrer : $S_n(f) = \displaystyle\int_a^b f - \frac{b-a}{2n}\int_a^b f' + \frac{(b-a)^2}{12n^2}\int_a^b f'' + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
2. En déduire : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+n} = \ln(2) + \frac{1}{4n} + \frac{1}{16n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Passages à la limite sous le signe intégrale, intégrales à paramètres

✓ **Exercice 24.** Calculer les limites quand $n \to +\infty$ de :

(a) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}(1+\sqrt{n}e^{-nx})\mathrm{d}x$, (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x$, (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{nt+t^2}\mathrm{d}t$, (d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+t^n}{\sqrt{t}+t^{2n}}\mathrm{d}t$.

Exercice 25. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. Étudier la convergence de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $f_n(x) = \displaystyle\int_0^x f(t^n)\mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$.

✓ **Exercice 26.**

1. Soient $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+x^2)^n}$ converge.
2. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+x^2)^{n+1}} = \frac{\pi}{(2x)^{2n+1}}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

✓ **Exercice 27.** Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Montrer : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(bx)-\arctan(ax)}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

Exercice 28. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{ch}(2xt)\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est bien définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre.
3. En déduire une expression simple de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On admet : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (*voir les exercices 37, 38 et 41 pour différentes démonstrations*).

Exercice 29.

1. Pour tout $x \in]1, +\infty[$, justifier l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi \ln(x - \cos(t))\,\mathrm{d}t$.
2. Montrer, pour tout $(a, b) \in]1, +\infty[^2$: $\displaystyle\int_0^\pi \ln\left(\frac{b - \cos(t)}{a - \cos(t)}\right)\mathrm{d}t = \pi \ln\left(\frac{b + \sqrt{b^2 - 1}}{a + \sqrt{a^2 - 1}}\right)$.

✓ **Exercice 30.**

1. Montrer que l'application $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} t^x \mathrm{d}t$ est définie et de classe C^1 sur $] - 1, +\infty[$.
2. En déduire : $\forall x \in] - 1, +\infty[$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} t^x \mathrm{d}t = \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$.

Exercice 31. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, calculer : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{(1+t^2)t}\mathrm{d}t$, et en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan(t)}{t}\right)^2 \mathrm{d}t$.

Exercice 32. (Florilège) Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{xt - t^2}\mathrm{d}t,\ x \in \mathbb{R}$, (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-xt^2}}{t}\mathrm{d}t,\ x \in \mathbb{R}_+$, (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2 + 2i\pi t x)\mathrm{d}t,\ x \in \mathbb{R}$,

(d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(xt)}{t^2} e^{-t}\mathrm{d}t,\ x \in \mathbb{R}$, (e) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(1 + x(\sin(t))^2\right)\mathrm{d}t,\ x \geqslant -1$, (f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\mathrm{d}t,\ x \in \mathbb{R}$ (☢).

On admet : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (*voir les exercices 37, 38 et 41 pour différentes démonstrations*).

Exercice 33. (Prolongement de la fonction dzêta) On note ζ l'application $s \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$, définie sur $]0, +\infty[$.

1. Montrer : $\forall s \in]1, +\infty[$, $\zeta(s) = \dfrac{s}{s-1} + s\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\lfloor t \rfloor - t}{t^{s+1}}\mathrm{d}t$.
2. Montrer que l'application $s \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\lfloor t \rfloor - t}{t^{s+1}}\mathrm{d}t$ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.
3. Montrer : $\zeta(s) \underset{s \to 1}{\sim} \dfrac{1}{s-1}$.

★ **Exercice 34.** Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a < b$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+^*$ une application continue sur $[a, b]$.

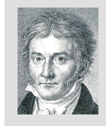
1. Montrer : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(\int_a^b (f(t))^x \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{x}} = \|f\|_\infty$.
2. Calculer : $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(\int_a^b (f(t))^x \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{x}}$.

★ **Exercice 35.** Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et $f : I \to \mathbb{C}$ une application de classe C^n sur I. On suppose qu'il existe $x_0 \in I$ tel que : $f(x_0) = 0$. Montrer l'existence d'une application $g : I \to \mathbb{C}$ de classe C^{n-1} sur I, telle que : $\forall x \in I$, $f(x) = (x - x_0)g(x)$.

Calcul des intégrales de Dirichlet et de Gauss

★ **Exercice 36. (Intégrale de Dirichlet, avec la transformation de Laplace)**

1. Montrer que l'intégrale $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt}\mathrm{d}t$ converge absolument pour tout $x > 0$.
2. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, et que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a : $F'(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-xt}\mathrm{d}t$.
3. En déduire qu'il existe une constante réelle c telle que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $F(x) = c - \arctan(x)$.
4. Montrer : $c = \dfrac{\pi}{2}$.
5. Montrer : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.



1777-1855

Exercice 37. (Intégrale de Gauß, avec le théorème de convergence dominée)

1. Montrer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\mathrm{d}t$.
2. En déduire : $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 38. (Intégrale de Gauß, avec une intégrale à paramètre) On pose : $\forall x\in\mathbb{R}$, $\displaystyle F(x)=\int_0^1\frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\mathrm{d}t$ et : $\displaystyle G(x)=\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$.

1. Démontrer que F et G sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et qu'on a : $\forall x\in\mathbb{R}$, $F'(x)=-2G'(x)G(x)$.
2. Calculer : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}F(x)$, et en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\mathrm{d}t$.

1788-1827

Exercice 39. (Intégrales de Fresnel) S'inspirer de l'exercice 38 pour obtenir l'existence et la valeur des intégrales de Fresnel $\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos\left(x^2\right)\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin\left(x^2\right)\mathrm{d}x$.

Compléments sur la fonction Γ d'Euler

On rappelle que la fonction Γ d'Euler est l'application $\displaystyle\Gamma : x\mapsto\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$. Elle est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

★ **Exercice 40. (Formule de Gauß)**

1. Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$. Démontrer : $\displaystyle\Gamma(x)=\lim_{n\to+\infty}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\mathrm{d}t$.
2. En déduire : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$. $\displaystyle\Gamma(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n!\cdot n^x}{\prod_{k=0}^{n}(x+k)}$ (*formule de Gauß*).

Exercice 41. On utilisera librement le résultat de l'exercice 40.

1. Montrer : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*$, $\displaystyle\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}=\mathrm{B}(x,y)$, où B est la fonction Beta d'Euler étudiée dans l'exercice 14. *On commencera par traiter le cas où x ou y est un entier naturel.*
2. En déduire la valeur de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, puis de l'intégrale de Gauß : $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-u^2}\mathrm{d}u=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 42. (Étude de la fonction Γ)

1. Montrer : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(x)>0$.
2. Montrer que Γ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que $\ln\circ\Gamma$ et Γ sont convexes sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Donner la limite de Γ quand $x\to+\infty$.
5. Donner la limite et un équivalent asymptotique de $\Gamma(x)$ quand $x\to 0^+$.

Un équivalent asymptotique en $+\infty$ est donné par l'exercice 43.

Exercice 43. (Raffinement de la formule de Stirling)

1. Montrer : $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $\displaystyle\Gamma(x+1)=\sqrt{x}\left(\frac{x}{e}\right)^x\int_{-\sqrt{x}}^{+\infty}\left(1+\frac{t}{\sqrt{x}}\right)^x e^{-\sqrt{x}t}\mathrm{d}t$.
2. On pose : $\forall(x,t)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$, $\displaystyle f(x,t)=\left(1+\frac{t}{\sqrt{x}}\right)^x e^{-\sqrt{x}t}\cdot\mathbb{1}_{[-\sqrt{x},+\infty[}(t)$. Montrer : $\forall t\in\mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x,t)=e^{-\frac{t^2}{2}}$.
3. Montrer que pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$, on a : $|f(x,t)|\leqslant\varphi(t)$, où : $\varphi(t)=\begin{cases}(1+t)e^{-t} & \text{si } t\geqslant 0,\\ e^{-\frac{t^2}{2}} & \text{si } t<0.\end{cases}$
4. En déduire : $\displaystyle\Gamma(x+1)\underset{x\to+\infty}{\sim}\sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x$. On admet : $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-u^2}\mathrm{d}u=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (*voir les exercices 37, 38 et 41 pour différentes démonstrations*).

Exercice 44. (Formule de Weierstraß) On pourra si besoin utiliser les résultats de l'exercice 40. Soit γ la constante d'Euler. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \dfrac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x} \lim\limits_{n\to+\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \left[\left(1+\dfrac{x}{k}\right)e^{-\frac{x}{k}}\right]$ (*formule de Weierstraß*).

Exercice 45. (Fonction Digamma) D'après l'exercice 42, la fonction Γ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et ne s'annule pas. On peut donc poser : $\forall x \in]0,+\infty[,\ \psi(x) = \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$. Soit γ la constante d'Euler.

1. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \psi(x) = -\dfrac{1}{x} - \gamma + \sum\limits_{k=1}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+x}\right)$. Utiliser l'exercice 44.
2. Calculer $\psi(1)$, et en déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\mathrm{d}t$.
3. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\ \psi(n) = -\gamma + \sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{k}$.
4. Montrer plus généralement que pour tous réels $p, q > 0$ distincts, on a : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(n+p)(n+q)} = \dfrac{\psi(p)-\psi(q)}{p-q}$.

Ainsi la fonction Digamma fournit théoriquement *un moyen de calculer des sommes de fractions rationnelles dont le dénominateur est de degré* 2. *Pour que ce moyen théorique devienne pratique : voir les exercices du chapitre* VII.

Compléments sur les transformées de Laplace et de Fourier, sur le produit de convolution


1749-1827

★ **Exercice 46. (Transformation de Laplace)** Une fonction $f : [0,+\infty[\to\mathbb{R}$ continue est dite d'ordre exponentiel s'il existe des réels $M > 0$ et r tels que pour tout $t \geqslant 0$, on ait : $|f(t)| \leqslant Me^{rt}$. Pour une telle fonction f, on définit alors sa transformée de Laplace : $\mathcal{L}(f)(s) := \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $\mathcal{L}(f)(s)$ est bien définie pour tout réel s assez grand.
2. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{C}$. Déterminer la transformée de Laplace de l'application $t \mapsto t^n e^{at}$.
3. Montrer que si f est de classe C^1 avec f et f' d'ordre exponentiel, alors pour tout s assez grand, on a : $\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f)(s) - f(0)$.
4. Soient f et g deux fonctions d'ordre exponentiel. Montrer que si $\mathcal{L}(f)(s) = \mathcal{L}(g)(s)$ pour tout réel s assez grand, alors : $f = g$. *En cela, on dit que la transformation de Laplace est injective.*

Exercice 47. (Théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale : cas particulier) Soit $f : [0,+\infty[\to\mathbb{C}$ une application continue par morceaux et bornée sur $[0,+\infty[$, continue en 0.

1. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{R}_+^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t$ converge. On pose : $\mathcal{L}(f)(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t$.
2. Montrer : $\lim\limits_{p\to+\infty} p\cdot\mathcal{L}(f)(p) = f(0)$.

On montrerait de même que si f admet une limite finie en $+\infty$, notée ℓ, alors : $\lim\limits_{p\to0} p\cdot\mathcal{L}(f)(p) = \ell$.


1768-1830

★ **Exercice 48. (Transformation de Fourier)** Pour toute application f intégrable sur $\mathbb{R}$, on note $\mathcal{F}(f) : x \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-ixt}\mathrm{d}t$ sa transformée de Fourier. Soit $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

1. Montrer que $\mathcal{F}f$ est définie, continue et bornée sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Comparer les transformées de Fourier de f et de $t \mapsto f(t-a)$.
3. Soit S un segment de $\mathbb{R}$. Calculer la transformée de Fourier de $\mathbb{1}_S$.
4. On suppose : $t \mapsto tf(t) \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Montrer que $\mathcal{F}(f)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et que : $\mathcal{F}(f)' = -i\mathcal{F}(t\mapsto tf(t))$.
5. On suppose que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et que : $f' \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathcal{F}(f')(x) = ix\mathcal{F}f(x)$.

On remarque que la transformée de Fourier d'une fonction gagne généralement en régularité : elle est bornée et continue (même uniformément continue, mais cela nécessite l'exercice 49) même si f ne l'est pas. Autre observation : la transformation de Fourier transforme la dérivée en multiplication (par x) et inversement. Elle apparaît donc naturellement en vue de simplifier l'étude de certaines équations différentielles.

★ **Exercice 49. (Lemme de Riemann-Lebesgue)** Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et f une application continue par morceaux sur I.

1. On suppose dans cette question : $I = [a, b]$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a \leqslant b$. Montrer : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_a^b f(t)e^{-ixt}\mathrm{d}t = 0$.
2. L'intervalle I est ici quelconque. On suppose que f est intégrable sur I. Montrer : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_I f(t)e^{-ixt}\mathrm{d}t = 0$.

★ **Exercice 50. (Produit de convolution)** On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est à *support compact* s'il existe un segment $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ tel que : $f_{|\mathbb{R}\setminus[a,b]} = 0$. Soit E l'ensemble des fonctions continues à support compact.

Pour toutes fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues par morceaux, on appelle *produit de convolution* de f et g la fonction : $f * g : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\mathrm{d}t$. Soient $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux et bornée sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $f * g$ est définie sur $\mathbb{R}$, et que si g est continue alors $f * g$ l'est également.
2. Montrer que la loi $*$ est commutative et distributive par rapport à l'addition.
3. Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose : $f \in E$, et : $g \in \mathrm{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Montrer : $f * g \in \mathrm{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, et que : $(f * g)^{(k)} = f * g^{(k)}$.
4. On suppose : $f \in E$, et que g est une application polynomiale. Montrer que $f * g$ en est également une.

La propriété centrale du produit de convolution est démontrée dans les questions 1 et 3 : le produit de convolution sert à augmenter la régularité des fonctions : partant d'une fonction f quelconque, et la convoluant avec une fonction g plus régulière, on obtient une nouvelle fonction $f * g$ aussi régulière que g, et « proche de f » si g est bien choisie : voir l'exercice 51.

★ **Exercice 51. (Approximations de l'identité)** On reprend la définition de E donnée dans l'exercice 50. On appelle *approximation de l'identité* (ou *de l'unité*) toute suite $(\chi_n)_{n\geqslant 0}$ de fonctions de E qui vérifie les trois propriétés :

$$\text{(a) } \forall n \in \mathbb{N},\ \chi_n \geqslant 0, \quad \text{(b) } \forall n \in \mathbb{N},\ \int_{\mathbb{R}} \chi_n = 1, \quad \text{(c) } \forall \alpha > 0,\ \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}\setminus[-\alpha,\alpha]} \chi_n = 0.$$

(On a noté : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}\setminus[-\alpha,\alpha]} = \int_{-\infty}^{-\alpha} + \int_{\alpha}^{+\infty} = \int_{\mathbb{R}} - \int_{[-\alpha,\alpha]}$.)

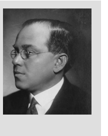
Soient $(\chi_n)_{n\geqslant 0}$ une telle suite et f une application dans E. On reprend les notations de l'exercice 50. Montrer que la suite de fonctions $(f * \chi_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f.

Ce résultat est la clé pour obtenir des résultats de densité à l'aide du produit de convolution. On l'illustre dans les exercices 52 et 53.

Exercice 52. (Théorème d'approximation de Weierstraß) On reprend les notations et définitions des exercices 50 et 51. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left(1-t^2\right)^n \mathrm{d}t$, et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $p_n(t) = \dfrac{\left(1-t^2\right)^n}{a_n} \mathbb{1}_{[-1,1]}(t)$.

1. Montrer que la suite $(p_n)_{n\geqslant 0}$ est une approximation de l'identité.
2. Soit $f \in E$. On suppose que f est identiquement nulle hors de $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $f * p_n$ est polynomiale.
3. Conclure que si I est un segment de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{C}$ une application continue, alors f est limite uniforme sur I d'une suite d'applications polynomiales.

Exercice 53. (Théorème de Fejér) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue et 2π-périodique. On appelle *polynôme trigonométrique* tout élément de $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\left\{e_k : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & e^{ikx} \end{cases} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}\right)$.


1880-1959

On pose : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} e_k$, $C_n = \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} S_k$.

1. Soit $\alpha \in]0, \pi[$. Montrer que la suite $(C_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur $[-\pi, \pi] \setminus [-\alpha, \alpha]$ vers la fonction nulle.
2. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Montrer que $\tilde{C}_n : x \mapsto \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)C_n(x-t)\mathrm{d}t$ est un polynôme trigonométrique.
3. Montrer que $\left(\tilde{C}_n\right)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f.

Ceci démontre que toute fonction continue 2π-périodique est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ de polynômes trigonométriques.