Exercices du chapitre XII (Espaces préhilbertiens et euclidiens) – Indications

L'icône « (🗎) » indique que les documents *Méthodes* donnent des conseils plus généraux.
La lettre « C » indique que la *Banque des Cent* contient ou contiendra des exercices analogues.

Formes hermitiennes et bilinéaires, produits scalaires

✓ **Exercice 1.** Noter que deux inclusions sur les quatre sont faciles, et que la seconde égalité découle de la première par un argument dimensionnel. Pour montrer l'inclusion non triviale $\ker(\bigstar) \subseteq \ker(\heartsuit)$: remarquer que si X appartient à $\ker(\bigstar)$ alors l'égalité $\bigstar X = 0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ devient, après multiplication convenable, une égalité du type : $\|\heartsuit X\|^2 = 0$, où $\|\cdot\|$ est une norme euclidienne sur $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. En déduire que X appartient à $\ker(\heartsuit)$.

Il y a une coquille dans la feuille d'exercices distribuée (et corrigée dans la version en ligne) : on doit montrer l'égalité $\mathrm{im}(A) = \mathrm{im}(AA^\top)$.

Commentaires.

Exercice 2. Si f a strictement moins de $n+1$ zéros dans $[0,1]$ alors, en notant $x_1, \ldots, x_k$ ses zéros (disons ordonnés en sens croissant), construire un polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ défini à l'aide de ces x_i, de tel sorte que $\int_0^1 fP > 0$ (sous quelle condition suffisante sur l'intégrande peut-on s'assurer qu'une intégrale est strictement positive ? c'est cela qui doit guider votre réflexion pour construire P). En déduire le résultat par contraposée.

Commentaires.

✓ **Exercice 3.** Pour montrer que les $\vec{e}_i$ et $\vec{e}_j$ sont orthogonaux : évaluer l'égalité de l'énoncé en des vecteurs convenables et raisonner sur le signe des quantités pour en déduire $\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = 0$. Pour montrer que c'est une famille génératrice (bien noter que E n'est pas supposé de dimension finie !), montrer que si $\vec{x}$ est orthogonal à tous les $\vec{e}_i$ alors $\vec{x} = \vec{0}$. Qu'est-ce que cela démontre ? L'interpréter en termes de supplémentaire orthogonal.

Commentaires. Une jolie idée est illustrée dans cet exercice : le fait de montrer une égalité $F = E$ en montrant plutôt : $F^\perp = \{\vec{0}\}$ (méthode acceptable seulement si F est de dimension finie). C'est utile notamment si l'inclusion $E \subseteq F$ nécessite de montrer une propriété du type : « $\forall \vec{x} \in E, \exists \bigstar$... ». Dans ce cas de figure, la difficulté est la construction explicite d'un $\bigstar$ pour chaque $\vec{x}$. C'est potentiellement dur voire impossible. C'est une difficulté omniprésente en mathématiques. Mais en se ramenant à montrer : $F^\perp = \{\vec{0}\}$ (c'est-à-dire à montrer pour tout $\vec{x} \in E$ que si : $\forall \vec{y} \in F$, $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$, alors : $\vec{x} = \vec{0}$), on se dispense de la moindre construction explicite d'éléments : c'est potentiellement plus abordable.

C'est la même idée que l'on met en œuvre lorsqu'on montre qu'une application linéaire est surjective en montrant seulement qu'elle est injective et en invoquant un argument dimensionnel : la surjectivité est plus difficile à montrer que l'injectivité parce qu'elle nécessite en principe une construction explicite d'un antécédent.

★ **Exercice 4. (Produit scalaire sur $\ell^2(\mathbb{N})$)**

1. S'inspirer de la démonstration de cours du chapitre d'intégration, où l'on montre que si f et g sont de carré intégrable alors fg est intégrable (autre démonstration dans le même esprit : si X et Y sont deux variables aléatoires ayant un moment d'ordre 2 alors XY est d'espérance finie).
2. Même chose que la première question.
3. Introduire la « base canonique » $\left((e_{i,n})_{n\geqslant 0}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ (qui n'en est absolument pas une vu qu'elle n'est même pas génératrice, mais vous comprendrez à quelles suites je pense). Utiliser le fait que si une suite est orthogonale à F, alors elle est orthogonale à $(e_{i,n})_{n\geqslant 0}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ et conclure qu'elle est nulle. Décrire $\left(F^\perp\right)^\perp$ est alors trivial.

Commentaires. Cela fournit un contre-exemple en dimension infinie des égalités $F \oplus F^\perp = E$ et $\left(F^\perp\right)^\perp = F$ (néanmoins une inclusion reste vraie : laquelle ?). Les contre-exemples les plus faciles à produire utilisent des sous-espaces vectoriels F ayant une base infinie dénombrable : ainsi, en utilisant le fait que l'orthogonalité à F équivaille à l'orthogonalité aux éléments de cette base, on parvient souvent à démontrer que $F^\perp$ est nul. Le contre-exemple du cours est $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathrm{C}^0([0,1], \mathbb{R})$: il est aussi à base dénombrable.

✓ **Exercice 5.** (🗎) L'hypothèse se traduit par : $\forall \vec{x} \in E$, $\langle f(\vec{x}), \vec{x} \rangle = 0$. Or $\langle f(\vec{x}), \vec{y} \rangle$ (ce qu'on peut écrire de manière presque équivalente $\langle \vec{x}, f(\vec{y}) \rangle$ si vous le souhaitez), pour tout $\vec{x}$ et tout $\vec{y}$, serait plus utile à connaître : on sait en effet que connaître f équivaut à connaître $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \langle \vec{x}, f(\vec{y}) \rangle$ puisque la matrice de f dans une base orthonormée est la matrice associée à cette forme bilinéaire (façon savante de rappeler que les coefficients de la matrice de f sont de la forme $\langle \vec{e}_i, f(\vec{e}_j) \rangle$).

Comment, donc, exprimer $\langle f(\vec{x}), \vec{y}\rangle$ ou $\langle \vec{x}, f(\vec{y})\rangle$ en fonction de quantités de la forme $\langle f(\bigstar), \bigstar\rangle$? Un énoncé de votre cours de 1re année, revu en 2e année (mais avec plus de généralité, justement pour une situation telle que celle-ci), le permet aisément. En déduire une relation entre $\langle f(\vec{x}), \vec{y}\rangle$ et $\langle \vec{x}, f(\vec{y})\rangle$ valable pour tous vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$. L'évaluer en des vecteurs d'une base orthonormée afin de pouvoir interpréter matriciellement le résultat obtenu.

Commentaires. Cet exercice donne un sens géométrique très concret à des matrices que vous connaissez depuis la première année, mais dont les endomorphismes associés devaient vous sembler conceptuellement peu intéressants.
Vous connaissez d'autres opérations mathématiques qui transforment tout vecteur en un vecteur qui lui est orthogonal : le produit vectoriel (vu en Physique et en Sciences Industrielles de l'Ingénieur). Il s'avère qu'en dimension 3, il n'y a pas d'autres endomorphismes vérifiant les hypothèses de l'énoncé que les applications de la forme $\vec{x} \mapsto \vec{a} \wedge \vec{x}$.

✓ **Exercice 6. (🗎)** Nos hypothèses portent sur des *produits scalaires*, tandis que ce qu'on veut démontrer est une identité entre *vecteurs* : $f(\vec{x} + \lambda\vec{y}) = f(\vec{x}) + \lambda f(\vec{y})$. Le document *Méthodes* indique comment procéder dans ce cas de figure.

Commentaires.

✓ **Exercice 7. (🗎)** Seule la linéarité est à démontrer, la conservation des normes découlant de l'hypothèse de l'énoncé.

Nos hypothèses portent sur des *normes*, tandis que ce qu'on veut démontrer est une identité entre *vecteurs* : $f(\vec{x} + \lambda\vec{y}) = f(\vec{x}) + \lambda f(\vec{y})$. Le document *Méthodes* indique comment procéder dans ce cas de figure.

Problème : si vous avez bien suivi les conseils du document *Méthodes*, vous constaterez que mettre en œuvre ces conseils ici nécessite de savoir simplifier des produits scalaires du type $\langle f(\vec{x}), f(\vec{y})\rangle$, mais l'hypothèse ne le permet pas *a priori*. Quand nos données portent sur des *normes* et qu'on veut calculer des *produits scalaires*, une identité de votre cours s'impose.

Commentaires.

★ **Exercice 8. (L'identité du parallélogramme : théorème de Fréchet-von Neumann-Jordan)** Si $\|\cdot\|$ est une norme associée à un produit scalaire φ, alors à quoi doit être nécessairement égale $\varphi(\vec{x}, \vec{y})$ pour tous $\vec{x}$ et $\vec{y}$? (L'exprimer en fonction de $\|\cdot\|$) Réciproquement, appelez φ l'application qui est la seule à pouvoir convenir, et vérifiez que c'est effectivement un produit scalaire. La symétrie et le caractère défini positif découlent aisément de la définition de φ et des propriétés d'une norme. C'est la bilinéarité qui pose problème. Il est plus facile de procéder en deux points en montrant que par rapport à la première variable (par exemple : peu importe par symétrie), φ est additive et commute avec la multiplication externe.

C'est pour l'additivité que sert l'identité du parallélogramme : comparer $\varphi(\vec{x} + \vec{y}, \vec{z})$ et $\varphi(\vec{x}, \vec{z}) + \varepsilon(\vec{y}, \vec{z})$ grâce à la définition de φ. Vous aurez à un moment besoin de remarquer que $\varphi(\vec{x}_0, 2\vec{z}) = 2\varphi(\vec{x}_0, \vec{z})$ pour tous $\vec{x}_0$ et $\vec{z}$.

Pour la multiplication externe : utiliser l'additivité pour montrer $\varphi(n\vec{x}, \vec{y}) = n\varphi(\vec{x}, \vec{y})$ pour tout n entier relatif (c'est très classique : on peut aussi constater que cela revient à montrer que deux morphismes de groupes coïncident sur $\mathbb{Z}$, ce qui revient à montrer qu'ils sont égaux en le générateur 1), puis l'étendre à tout rationnel et conclure par densité (là encore tout est classique, à un détail près : bien justifier que $r \mapsto \varphi(r\vec{x}, \vec{y})$ est continue sur $\mathbb{R}$: le fait que φ soit définie à l'aide d'une norme y contribuera).

Commentaires.

Exercice 9. Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^3$. Noter que le résultat est facile à obtenir dans $\mathbb{R}^2$, par exemple en raisonnant sur les affixes de ces vecteurs et leurs formes exponentielles : cela permet de montrer que la somme des angles (non orientés) entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$, entre $\vec{v}$ et $\vec{w}$, et entre $\vec{v}$ et $\vec{w}$, doit être égale à 2π. Il n'est donc pas possible que chacun des termes de cette somme soit supérieur strictement à $\frac{2\pi}{3}$.

L'idée du raisonnement est de se ramener au plan en projetant (orthogonalement) l'un des trois vecteurs sur le plan engendré par les deux autres. Disons par exemple qu'on projette $\vec{w}$ sur $P = \mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$ et qu'on note $p(\vec{w})$ ce projeté. Comparer $\langle \vec{w}, \vec{u}\rangle$ et $\langle p(\vec{w}), \vec{u}\rangle$, ainsi que $\|\vec{w}\|$ et $\|p(\vec{w})\|$, et en déduire une inégalité comparant l'angle entre $\vec{w}$ et $\vec{u}$, et l'angle entre $p(\vec{w})$ et $\vec{u}$. Faire de même en remplaçant $\vec{u}$ par $\vec{v}$. Conclure avec l'observation du premier paragraphe.

Commentaires.

Exercice 10.

1. Calcul sans subtilité majeure : on sait développer $\|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|^2$ ainsi que $\left\|\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \vec{x}_i\right\|^2$.

2. Si une boule $\mathrm{B}_f(\vec{a}, R)$ contient tous les $\vec{x}_i$: appliquer la question précédente aux vecteurs $\vec{x}_i - \vec{a}$. Minorer les $\|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|$ grâce à l'hypothèse de l'énoncé (cela nécessite de savoir simplifier $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} 1$: combien y a-t-il d'indices (i, j) tels que $1 \leqslant i < j \leqslant n$? c'est du dénombrement élémentaire) et majorer les $\|\vec{x}_i - \vec{a}\|$ par le rayon de la boule. Conclure.

Commentaires.

✓ **Exercice 11.** Observer qu'une matrice orthogonale à coefficients entiers doit avoir un et un seul 1 par colonne et par ligne. Dénombrer le nombre de possibilités, éventuellement en se ramenant à compter des permutations.

Commentaires.

✓ **Exercice 12. (🗎)**

1. Interpréter $\mathrm{tr}(A)$ comme un produit scalaire. Le résultat est alors conséquence immédiate d'une inégalité classique comparant produits scalaires et normes.
2. Calcul immédiat tirant parti des propriétés de la trace et des matrices orthogonales.
3. Le déduire de la question précédente.

Commentaires.

Exercice 13. Le cas non inversible est trivial. Sinon : une inégalité démontrée dans le cours majore le déterminant d'une matrice inversible à l'aide de ses coefficients. L'utiliser ici.

Commentaires.

Exercice 14. (Théorème de Maschke)

1. Vérification facile.
2. Montrer que si $g \in G$, alors g est une isométrie de E au sens du produit scalaire de la question précédente (faire un changement d'indice convenable pour simplifier $\displaystyle\sum_{h \in G} \langle g(h(\vec{x})), g(h(\vec{y}))\rangle$: une idée abondamment présente dans les exercices des chapitres III et IV).

Commentaires. Le procédé de l'énoncé (fabriquer un produit scalaire conservé par des éléments de G, partant d'un produit scalaire qui *a priori* ne l'est pas) se généralise : moyenner, c'est créer de l'invariance. C'est-à-dire, si l'on considère une représentation linéaire (c'est-à-dire un morphisme $\varphi : G \to \mathrm{GL}(E)$ où G est un groupe et E un espace vectoriel), alors pour tout $x \in E$ l'objet : $\displaystyle\sum_{g \in G} \varphi(g)(x)$, s'il a un sens (et s'il n'y a pas de problème de discontinuité ; question qui ne se pose pas en cas de groupe fini), est invariant par φ, au sens où : $\forall g' \in G$, $\varphi(g')\left(\displaystyle\sum_{g \in G} \varphi(g)(x)\right) = \displaystyle\sum_{g \in G} \varphi(g)(x)$. On utilise pour cela la linéarité de $\varphi(g)$ et le fait que : $\forall (g, g') \in G^2$, $\varphi(g') \circ \varphi(g) = \varphi(g'g)$. Comme $g \mapsto g'g$ permute le groupe G, on en déduit la relation voulue.
On utilise souvent cette observation en théorie des groupes (calcul de sommes indexées par des sommes finies).

Distances à un sous-espace vectoriel

Exercice 15. (🗎) Sens direct : si p_F et p_G sont les projecteurs orthogonaux sur F et G respectivement, donner une relation entre eux. En déduire une expression de $\mathrm{d}(\vec{x}, F)^2$ et $\mathrm{d}(\vec{x}, G)^2$ exclusivement en fonction de $\vec{x}$ et $p_F(\vec{x})$ (par exemple). L'égalité à démontrer découle alors d'un théorème bien connu. Un *dessin* peut éventuellement vous aider à y voir clair.

Sens réciproque : la situation est classique, puisque notre hypothèse ne fait intervenir que des normes, alors qu'on veut calculer des produits scalaires (pour démontrer l'orthogonalité de F et G). Or on sait comment exprimer des produits scalaires exclusivement à l'aide de normes. Ce faisant, montrer que $\vec{x} \in F$ et $\vec{y} \in G$ sont toujours orthogonaux devient possible (bien songer à exprimer les distances en présence à l'aide de projetés orthogonaux, et à simplifier les différences de normes apparaissant grâce à la même formule dont je suggère l'emploi ci-avant !). Lors du calcul de $\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle$, ne pas oublier que les éléments de F sont exactement les points fixes de p_F (et de même pour G et p_G).

Cela permet de montrer que F et G sont orthogonaux, mais pas qu'ils sont supplémentaires. Partant de $\vec{x} \in E$, on sait facilement produire un vecteur dans F et un vecteur dans G ; au vu de ce que l'on doit démontrer, la décomposition de $\vec{x}$ en somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G est donc facile à conjecturer. Pour démontrer votre conjecture : on veut montrer une égalité entre *vecteurs* alors que vous avez une hypothèse sur des *normes* (ou produits scalaires) : le document *Méthodes* vous dit comment procéder. Si vous suivez cette piste : vous aurez besoin du fait que les inclusions $F \subseteq G^{\perp}$ et $G \subseteq F^{\perp}$ démontrées ci-dessus impliquent $p_F \circ p_G = 0$ et $p_G \circ p_F = 0$.

Autre piste : prendre $\vec{x} \in G^{\perp}$ et montrer que $\vec{x} \in F$, l'inclusion réciproque procédant de l'orthogonalité de F et G. Pour cela, noter que l'égalité de l'énoncé impose : $p_F(\vec{x}) - \vec{x} = \vec{0}$. Conclure.

Commentaires.

✓ **Exercice 16. (Calculs de distance dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$) (C)**

1. Remarquer que cela revient à calculer la distance d'un vecteur de $\mathbb{R}^4$ à un hyperplan (ou, cela revient au même, la distance d'une matrice de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ à un hyperplan) pour le produit scalaire usuel. La méthode est standard. Noter qu'un vecteur normal se voit à l'œil nu.
2. Cela se ramène à un calcul de projection orthogonale. Il n'y a pas de subtilité particulière.

Commentaires.

★ **Exercice 17. ()** Reconnaître le calcul d'une distance à un sous-espace vectoriel de suites. Si vous séchez complètement : lorgner du côté de l'exercice 4. L'exercice se résume alors à un calcul de projection orthogonale : la démarche est la même que dans tout autre contexte.

Commentaires.

★ **Exercice 18. (Polynômes de Laguerre) ()**

1. S'inspirer de la démonstration que $\mathrm{L}^2(I, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire intégrale (cours d'intégration).
2. Utiliser l'algorithme de Gram-Schmidt. Les propriétés sur le degré et le coefficient dominant découlent soit de la forme explicite des vecteurs fournie par cet algorithme, soit (c'est plus efficace) des conclusions de cet algorithme sur les « Vect » et les produits scalaires (montrer ainsi que $L_n \in \mathbb{R}_n[X]$ et $L_n \notin \mathbb{R}_{n-1}[X]$, puis que $\langle L_n, X^n \rangle > 0$, pour obtenir ce qu'on veut).
3. Décomposer dans une base orthonormée XL_n, et noter que $\langle XL_n, L_k \rangle$ peut se réécrire sous la forme $\langle L_n, \bigstar \rangle$. Remarquer que L_n est orthogonal à tous les polynômes de degré strictement inférieur à n, puis conclure.
4. Remarquer qu'il s'agit de calculer la distance de $x \mapsto x^3$ à un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. On est ramené à un calcul de projection orthogonale : la méthode est classique.

   Il faut savoir simplifier $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^k e^{-x} \mathrm{d}x$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ pour traiter convenablement cette question : on sait normalement faire. Si ce n'est pas le cas : reconnaître un exemple étudié au chapitre d'intégration.

Commentaires.

Exercice 19. () Reconnaître un calcul de distance analogue à celui de l'exercice 18. Cependant l'affaire est ici plus corsée à cause de la dimension n de l'espace sur lequel on projette orthogonalement. On peut contourner les difficultés, d'abord en ramenant le calcul de $\|P - p(P)\|^2$ (où P est le polynôme à projeter et $p(P)$ son projeté orthogonal) à celui de $\langle P - p(P), P \rangle$. On est amené à devoir simplifier $\sum_{i=1}^{n} a_i i! - 1$, où les a_i sont les coefficients du polynôme $p(P)$.

Pour calculer cette somme (c'est là qu'est le point le plus astucieux de l'exercice : ce qui précède n'est finalement que raisonnements classiques), remarquer qu'il s'agit de calculer $R(0)$ où R est un polynôme bien choisi de degré au plus n (pour le définir, se demander quel polynôme, après évaluation en 0, vaut $i!$; faire une combinaison linéaire de tels polynômes pour avoir R) et dont les racines sont connues ; en effet, on sait par définition d'une projection orthogonale que $P - p(P)$ est orthogonal à l'espace vectoriel sur lequel on projette, et donc en particulier à une base de cet espace vectoriel. Regarder la condition d'annulation de ces produits scalaires se traduit en des égalités du type : $R(\bigstar) = 0$.

Un polynôme de degré au plus n, dont on connaît n racines, peut entièrement être explicité (au coefficient dominant près, qu'on parvient à déterminer directement en évaluant sa définition en un nombre bien choisi). Il devient alors aisé de calculer $R(0)$ pour conclure.

Commentaires.

★ **Exercice 20. (Polynômes d'Hermite)**

1. Montrer par récurrence sur n que $f^{(n)}$ est de la forme $x \mapsto P_n(x)e^{-x^2}$ avec P_n polynomiale de degré n.
2. Si vous avez correctement traité la récurrence de la question précédente, vous avez dû obtenir une relation entre P_{n+1} et P_n, et donc entre H_{n+1}, H_n et H_n'. Noter alors que l'identité de l'énoncé en découle si l'on démontre une certaine relation entre H_n' et H_{n-1}, valable pour tout n. La démontrer par récurrence.
3. Exprimer H_n' et H_n'' à l'aide de H_{n-1} et H_{n-2} grâce à la relation trouvée en passant dans la question précédente.
4. C'est une conséquence facile de la question précédente.
5. Ne pas oublier de justifier la convergence absolue de l'intégrale par un bon usage du théorème des croissances comparées. Effectuer plusieurs intégrations par parties pour se ramener à un intégrande dont un facteur polynomial est de degré nul. En déduire que si m et n sont distincts alors l'intégrande est nul.

   Interpréter le résultat montré comme l'orthogonalité d'une certaine famille de polynômes pour un certain produit scalaire.

Commentaires.

★ **Exercice 21. (Matrice de Gram)**

1. Noter d'abord que si $\mathcal{F}$ est libre, alors $\mathcal{F}$ engendre un espace vectoriel de dimension n (cela intervient lorsqu'on construit la matrice P plus loin). Ensuite : se souvenir qu'un exemple du cours permet d'écrire $G(\mathcal{F})$ sous la forme $P^\top P$ où P est une certaine matrice de passage qui doit ici être inversible. L'inégalité $\det(G(\mathcal{F})) > 0$ en résulte aisément.

   Le sens réciproque se traite de même, à une subtilité près : ici, on n'est plus en mesure d'affirmer directement que P est carrée et on en a besoin pour considérer son déterminant ; pour cela, montrer que si P n'est pas carrée, alors $P^\top P$ ne peut pas être inversible, ce qui contredirait l'hypothèse sur le déterminant de $G(\mathcal{F})$. On y parvient en montrant que le rang ne peut que diminuer quand on fait un produit matriciel (se démontre aisément en passant *via* les applications linéaires canoniquement associées).
2. Remarquer que presque tous les coefficients de la première colonne de $G(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ sont nuls. Développer par rapport à cette colonne.
3. Écrire : $\vec{v} = \vec{v}_F + (\vec{v} - \vec{v}_F)$, où $\vec{v}_F$ est le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur F, et utiliser les questions précédentes pour simplifier le déterminant de $G(\vec{v}, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$.

Commentaires.

Exercice 22. (Une application des matrices de Gram)

1. Introduire la matrice de Gram G de ces vecteurs. Noter qu'elle est de déterminant nul. Or on sait calculer le déterminant de G grâce à ses valeurs propres : en comparant les deux expressions du déterminant, donner la valeur de α.
2. Il suffit de trouver une famille $\mathcal{F}$ telle que sa matrice de Gram G soit $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & \alpha \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n+1}(\mathbb{R})$. Montrer que cette matrice est positive grâce à ses valeurs propres, et en déduire qu'on peut l'écrire $P^\top P$ avec P une matrice carrée : invoquer un résultat du cours. Les colonnes de P fournissent les vecteurs qui conviennent (*a priori* ils appartiennent à $\mathrm{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$, mais grâce à la matrice ci-dessus on peut démontrer qu'ils sont liés et appartiennent donc à un espace vectoriel de dimension au plus n ; on conclut en notant que tous les espaces euclidiens de dimension prescrite sont isomorphes entre eux).

Commentaires.

Approfondissements sur les formes hermitiennes ou bilinéaires

Exercice 23. Interpréter l'hypothèse de l'énoncé en termes de formes linéaires, pour déduire de votre cours de 1re année que pour tout $\vec{x} \in E$, il existe $\lambda_{\vec{x}} \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall \vec{y} \in E,\ \varphi(\vec{x}, \vec{y}) = \lambda_{\vec{x}} \varphi(\vec{y}, \vec{x})$. Partant de la relation ci-dessus, obtenir une relation du type : $\forall \vec{x} \in E,\ \Phi(\vec{x}) = \lambda_{\vec{x}} \vec{x}$, où Φ est un endomorphisme de E dépendant d'un isomorphisme construit à l'aide de φ (s'inspirer de la démonstration du théorème de représentation de Riesz). C'est un exercice de classique d'en déduire que $\vec{x} \mapsto \lambda_{\vec{x}}$ est constante, c'est-à-dire : $\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall \vec{x} \in E,\ \Phi(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$. Revenir à φ pour en déduire : $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2,\ \varphi(\vec{x}, \vec{y}) = \lambda \varphi(\vec{y}, \vec{x})$. En jouant avec cette identité, conclure que $\lambda^2 = 1$.

Il y a cependant une subtilité non mentionnée plus haut : s'il existe $\vec{x} \in E$ tel que : $\forall \vec{y} \in E,\ \varphi(\vec{x}, \vec{y}) = 0$, vous ne pouvez pas imiter la démonstration du théorème de représentation de Riesz pour construire l'isomorphisme dont je parle plus haut. Pour cela : introduire un supplémentaire de $E^{\perp_\varphi} = \{\vec{x} \in E \mid \varphi(\vec{x}, \cdot) = 0\}$. Adapter le raisonnement ci-dessus au supplémentaire. Comparer alors $\varphi(\vec{x}, \vec{y})$ et $\varphi(\vec{y}, \vec{x})$ pour $\vec{x}$ et $\vec{y}$ quelconques en décomposant ces vecteurs dans une somme de sous-espaces supplémentaires.

Commentaires.

Exercice 24.

1. Il s'agit de remarquer que cette égalité découle du théorème du rang appliqué à une application linéaire f convenable : trouver une application linéaire de F dans un certain espace vectoriel, dont le noyau est exactement $F \cap E^{\perp_\varphi}$. Je pense que d'abord essayer de retrouver l'égalité $\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E)$ par cette méthode, dans le cas d'un produit scalaire, peut vous inspirer.
   Ensuite montrer que l'image de cette application f est de dimension $\dim(E) - \dim(F^{\perp_\varphi})$, en montrant que : $\{\vec{y} \in E \mid \forall \phi \in \mathrm{im}(f),\ \phi(\vec{y}) = 0\}$ est exactement égal à $F^{\perp_\varphi}$, et en faisant le lien entre la dimension de ce sous-espace vectoriel et celle de $\mathrm{im}(f)$. Je pense que vous n'y parviendrez pas aisément sans raisonner sur une base de $\mathrm{im}(f)$ et une base du sous-espace vectoriel ci-dessus construite à l'aide de ladite base de $\mathrm{im}(f)$: si $(\psi_1, \dots, \psi_r)$ est une base de $\mathrm{im}(f)$, complétée en une base $(\psi_1, \dots, \psi_n)$ de l'espace ambiant, montrer l'existence d'une base (par ailleurs unique) $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ de E telle que : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\psi_i(\vec{e}_j) = \delta_{i,j}$, et construire une base du sous-espace vectoriel ci-dessus à l'aide des $\vec{e}_j$.
2. L'inclusion réciproque est facile. Montrer que les dimensions sont égales grâce à la question précédente. Faire apparaître $\dim(F + E^{\perp_\varphi})$ *via* la formule de Grassmann.

Commentaires.

Exercice 25. (Loi d'inertie de Sylvester, signature) Pour attaquer les relations du type : $A = P^\top BP$ (appelées relation de *congruence*), il est *indispensable* de les interpréter en termes de forme quadratique (d'ailleurs l'énoncé y incite), sinon il est impossible de vraiment comprendre ce qu'on veut nous faire démontrer. Noter que cela signifie : $\forall X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $q_A(X) = q_B(PX)$. Autrement dit : q_A et q_B sont égales à un changement de coordonnées près (donné par la matrice de passage P). La réciproque est vraie par un argument classique vu en cours.

1. Si D est la matrice diagonale de l'énoncé, par ce qui a été ci-dessus il s'agit de montrer qu'on peut écrire q_A sous la forme : $q_A(X) = q_D(Y) = \sum\limits_{i=1}^{r} y_i^2 - \sum\limits_{i=r+1}^{r+s} y_i^2$ avec Y les coordonnées de X dans une base adéquate (c'est le changement de base qui fournira la matrice P). Noter que le théorème spectral permet d'obtenir une telle expression de q_A : modifier la base orthonormée fournie par ce théorème pour qu'il n'y ait plus de λ_i, mais que des ± 1 dans la combinaison linéaire des carrés. Conclure.
   Sens réciproque : si $A = P^\top DP$, noter que déterminer les sous-espaces vectoriels F tels que $q_{A|F\setminus\{0\}} > 0$ revient à en faire de même pour q_D. Or il s'avère que q_D a une expression très simple (cf. ci-dessus), ce qui rend raisonnable le calcul de r et s pour q_D. On le fait par double inégalité : si r_d est la dimension de l'énoncé et r_+ le nombre de 1 sur la diagonale de D, on veut montrer : $r_d = r_+$.
   L'écriture explicite de q_D permet aisément de trouver un sous-espace vectoriel de dimension r_+ tel que q_D y soit définie positive par restriction : cela donne $r_+ \leqslant r_d$. Pour l'inégalité réciproque : utiliser l'expression de q_D pour en déduire un sous-espace vectoriel G « aussi gros que possible » où la restriction de q_D est négative. En déduire que G est en somme directe avec tout sous-espace vectoriel F où q_D est définie positive. En déduire une inégalité liant $\dim(F)$ et $\dim(G)$ et remarquer que cela donne $r_d \leqslant r_+$ lorsqu'on prend F qui maximise la dimension.
   Raisonnement analogue pour avoir $s_d = s_-$.
2. Sens réciproque : l'application $X \mapsto PX$ induit une bijection entre les sous-espaces vectoriels où $(X,Y) \mapsto X^\top AX$ est définie positive et ceux où $(X,Y) \mapsto X^\top BX$ l'est (de même pour le caractère défini négatif). Conclure.
   Sens direct : utiliser la question précédente.
3. Utiliser le théorème spectral, puis modifier la base orthonormée de vecteurs propres afin d'écrire D (une matrice orthogonalement semblable à A) sous la forme : $D = Q^\top \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & & \mathbf{0} \\ & -\mathrm{I}_s & \\ \mathbf{0} & & 0_{\mathrm{M}_{n-r-s}(K)} \end{pmatrix} Q$ avec $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
4. Les valeurs propres sont faciles à obtenir dans les deux cas (même pas besoin de passer par le polynôme caractéristique : faire un usage adéquat du rang). Pour la première matrice (que je note A), on peut aussi écrire $X^\top AX$ comme une combinaison linéaire de carrés, en s'inspirant de la mise sous forme canonique des polynômes. Cela se traduit matriciellement par : $X^\top AX = (PX)^\top D(PX)$ où D est diagonale et P inversible. Par les questions précédentes, on a aisément la signature de D puis celle de A.

Commentaires.

Théorème de Riesz, adjoints, endomorphismes remarquables

Exercice 26. (Produit vectoriel)

1. Remarquer que l'application $\vec{w} \mapsto \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une forme linéaire.
2. Pour l'antisymétrie : montrer que $-\vec{v} \wedge \vec{u}$ représente la forme linéaire $\vec{w} \mapsto \det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ (utiliser les propriétés du déterminant) et conclure par unicité du vecteur qui doit le représenter. Raisonnement analogue pour la bilinéarité.
3. Calculer $\langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{u} \rangle$ grâce à la première question. De même en remplaçant $\vec{u}$ par $\vec{v}$.
4. Sens direct : noter que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est liée pour tout $\vec{w}$ sous cette hypothèse, et que cela impose $(\vec{u}, \vec{v})$ liée également (se démontre par exemple par contraposée).
   Sens réciproque : montrer que sous cette hypothèse on a : $\vec{u} \wedge \vec{v} \in E^{\perp}$.
5. Sens réciproque : ce qui précède permet déjà de montrer que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est orthogonale : montrer que $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est unitaire en évaluant l'identité de la première question en $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ divisé par sa norme (qui est non nulle car... ?). Simplifier pour obtenir : $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = 1$ (utiliser le fait que le déterminant d'une famille orthonormée relativement à une base orthonormée soit toujours ± 1). Ce même calcul assure que $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ doit être positif et donc la base doit être directe.
   Sens direct : noter que $\vec{w}$ et $\vec{u} \wedge \vec{v}$ sont proportionnels par un argument dimensionnel (ils appartiennent au même espace vectoriel de dimension 1) et unitaires : ils doivent différer d'un signe plus ou moins. Exclure la seconde possibilité grâce à l'aspect « direct ».
6. On sait que les coordonnées dans une base orthonormée sont des produits scalaires. Or $\langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{e}_i \rangle$ est un déterminant, fort aisé à calculer en développant par rapport à une colonne convenable.

Commentaires.

Exercice 27.

1. Pour tout $Y \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, mettre $\operatorname{tr}\left((AX - XA)^{\top} Y\right)$ sous la forme $\operatorname{tr}\left(X^{\top} \bigstar\right)$ grâce aux propriétés de la trace. Vous devez tomber sur un endomorphisme adjoint ressemblant beaucoup à l'endomorphisme initial.
2. Noter que l'existence de B telle que $A = AB - BA$ s'interprète comme une propriété de l'application linéaire $X \mapsto AX - XA$. Grâce à son endomorphisme adjoint, montrer que cela équivaut à montrer que si A est nilpotente, alors on a une égalité du type : $\forall X \in \spadesuit$, $\operatorname{tr}\left(A^{\top} X\right) = 0$. Pour cela, montrer que l'hypothèse $X \in \spadesuit$ implique que $A^{\top}$ et X commutent et en déduire que $A^{\top} X$ est nilpotente. On connaît alors ses valeurs propres et donc sa trace, ce qui permet de conclure.
   Le sens réciproque a été traité dans l'exercice 63 du chapitre V.

Commentaires.

Exercice 28. L'adjoint de l'identité étant l'identité, le terme en P peut être ignoré.

Remarquer que $(X^2 - 1)P'' + 2XP'$ est la dérivée d'un produit. Effectuer alors une ou plusieurs intégrations par parties pour transformer $\langle \varphi(P), Q \rangle$ en un produit scalaire de la forme $\langle P, \bigstar \rangle$.

Commentaires.

✓ **Exercice 29.** Le rang d'un projecteur est sa trace. Comme on est dans une base orthonormée, la trace s'exprime à l'aide de produits scalaires. Utiliser alors le fait que p soit orthogonale pour transformer ces produits scalaires en l'expression souhaitée.

Commentaires.

Exercice 30. (Hyperplans médiateurs) (🗎) Faire des DESSINS en dimension 2 et 3 pour conjecturer quel hyperplan H convient (conjecturer un vecteur normal, surtout). Vérifier votre conjecture par un calcul sans subtilité majeure. Noter que l'on sait calculer aisément les projections orthogonales sur un hyperplan quand on en connaît un vecteur normal (voir si besoin *Méthodes* si ce n'est pas le cas), et c'est donc aussi le cas des symétries orthogonales en vertu de la relation $s = 2p - \mathrm{Id}$.

On peut aussi faciliter le calcul de $s_H(\vec{x})$ en décomposant $\vec{x}$ comme somme d'un vecteur dans H et d'un vecteur dans son orthogonal (qui est donc proportionnel au vecteur normal). C'est très facile si vous avez fait la bonne conjecture pour un vecteur normal qui convient).

Commentaires.

★ **Exercice 31. (Norme subordonnée à une norme euclidienne)**

1. La première égalité entre normes triples se montre par double inégalité. Montrer par exemple que $|||f||| \leqslant |||f^*|||$ en écrivant $\|f(\vec{x})\|^2$ comme un produit scalaire grâce aux propriétés de l'adjoint, et en utilisant une inégalité bien connue pour majorer ce produit scalaire à l'aide de $|||f|||$ et $|||f^*|||$. De même pour l'inégalité réciproque.

   Pour la deuxième égalité : reprendre le produit scalaire qui a dû apparaître dans vos calculs précédents de $|||f|||$. Remarquer qu'il fait intervenir un endomorphisme autoadjoint, ce qui permet de joliment exprimer ce produit scalaire dans une base orthonormée de vecteurs propres, en fonction de ses valeurs propres. Partant de là, majorer par le rayon spectral est aisé, et un bon choix de vecteur propre donne le cas d'égalité.
2. Utiliser la question précédente, et utiliser une diagonalisation de f pour montrer : $\rho(f^2) = \rho(f)^2$.

Commentaires.

★ **Exercice 32. (Recherche de valeurs propres et problème d'extremums)**

1. On veut comparer $\langle f(\vec{x}), \vec{x}\rangle$ à des valeurs propres : il serait donc commode d'écrire ce produit scalaire à l'aide des valeurs propres de f. Un théorème du cours vous le permet. Partant de là, des inégalités basiques mènent au résultat (bien penser à vérifier que le cas d'égalité se produit).
2. Reprendre les inégalités de la question précédente et remarquer que si un vecteur $\vec{x}$ vérifie le cas d'égalité, alors ces inégalités deviennent des égalités, et cela nous ramène à une somme nulle de réels positifs. En écrivant que le terme général doit être nul, on note que $\vec{x}$ doit être combinaison linéaire de vecteurs propres associés à la valeur propre maximale, ce qui conclut.

Commentaires.

Exercice 33. On veut une condition nécessaire et suffisante sur le spectre de f pour que $\vec{x} \mapsto \langle f(\vec{x}), \vec{x}\rangle$ vérifie une certaine propriété : il est donc naturel de vouloir écrire ce produit scalaire à l'aide des valeurs propres de f. Un théorème du cours vous le permet. Le résultat de l'exercice 32 permet de conjecturer la condition nécessaire et suffisante cherchée.

Pour le sens direct : introduire des vecteurs propres unitaires et orthogonaux $\vec{u}$ et $\vec{v}$ associés à des valeurs propres bien choisies (cf. votre conjecture ou le résultat de l'exercice 32), et chercher $\vec{x}$ sous la forme $\vec{x}_{a,b} = a\vec{u} + b\vec{v}$. En se souvenant que $\vec{x}$ doit être unitaire, on peut écrire a et b sous une forme plus commode : commode parce qu'elle permet de ramener la recherche de $\vec{x}_{a,b}$ unitaire vérifiant $\langle f(\vec{x}_{a,b}), \vec{x}_{a,b}\rangle = 1$ à l'étude d'une fonction $\theta \mapsto \langle f(\bigstar), \bigstar\rangle$ de la *variable réelle* : l'existence d'un vecteur répondant au problème posé découle alors immédiatement d'un théorème d'analyse réelle de première année.

Sens réciproque facile si les indications ci-dessus ont été comprises.

Commentaires.

Exercice 34. (Théorème de Fisher-Cochran) Montrer que l'hypothèse de l'énoncé implique : $\sum_{i=1}^{p} f_i = \mathrm{Id}_E$.

Y parvenir fait apparaître deux raisonnements standards : 1° on veut passer d'une égalité faisant intervenir produits scalaires et normes à une égalité entre vecteurs : quelle méthode (développée dans *Méthodes*...) s'invite ? 2° si vous avez identifié la méthode en question et essayé de la mettre en œuvre, vous avez pu être gênés du fait de méconnaître $\langle f_i(\vec{x}), \vec{y}\rangle$. Comment exprimer $\langle f_i(\vec{x}), \vec{y}\rangle$ en fonction de produits scalaires de la forme $\langle f_i(\bigstar), \bigstar\rangle$? Là encore, l'approche est classique.

On peut aussi démontrer cette relation en notant que $\sum_{i=1}^{p} f_i - \mathrm{Id}_E$ est un endomorphisme diagonalisable, ayant 0 pour unique valeur propre à cause de l'identité de l'énoncé.

Une fois l'égalité ci-dessus démontrée, le reste est relativement standard : l'égalité ci-dessus prouve que $E = \sum_{i=1}^{p} \mathrm{im}(f_i)$, et l'hypothèse sur les rangs donne la somme directe. Le fait que la décomposition dans cette somme soit *unique* permet, en composant l'égalité ci-dessus par f_j, de montrer que $f_j \circ f_i = 0_{\mathrm{L}(E)}$ si $i \neq j$, et donne f_i sinon : cela prouve que f_i est un projecteur, orthogonal grâce à une hypothèse de l'énoncé. L'orthogonalité des $\mathrm{im}(f_i)$ en résulte (pourquoi ?).

À comparer avec l'exercice 30 du chapitre V.

Commentaires.

Exercice 35. Utiliser le fait que le déterminant soit le produit des valeurs propres (comptées avec leurs ordres de multiplicité) et que les valeurs propres d'une matrice antisymétrique réelle soient des imaginaires purs. Revoir éventuellement l'exercice 59 du chapitre V.

Commentaires.

Isométries vectorielles

✓ **Exercice 36. (🗎)** La condition d'orthonormalité des colonnes équivaut à des équations vérifiées par a et b. Faire une distinction de cas selon que $b = 0$ ou $b \neq 0$ pour en déduire les valeurs possibles de a et b. Il reste un nombre fini de possibilités. Pour chaque possibilité, on détermine l'isométrie canoniquement associée à la matrice en calculant $\dim(\ker(A - \mathrm{I}_3))$: cela permet de savoir si c'est une rotation, une symétrie orthogonale ou la composition commutative d'une rotation ou d'une symétrie orthogonale. Le reste (trouver une mesure d'angle...) peut se trouver dans *Méthodes*.

Commentaires.

✓ **Exercice 37.** Un calcul matriciel banal permet de montrer que A est une matrice orthogonale (il est utile de traduire matriciellement la condition $\sum\limits_{i=1}^{n} u_i^2 = 1$, pour l'utiliser dans les calculs matriciels) et symétrique : que peut-on dire d'un endomorphisme dont la matrice (dans une base orthonormée) est symétrique et orthogonale ? Il reste à déterminer ses sous-espaces propres pour conclure (et même un seul !). Cela revient, au fond, à trouver les sous-espaces propres de $UU^\top$: noter que c'est une matrice de rang 1. C'est un exercice classique de les déterminer (exercice 66 du chapitre V).

On peut aussi remarquer que c'est une matrice de transvection (écrire AX plutôt que A, avec X vecteur colonne, pour reconnaître la forme linéaire en jeu) : voir *Méthodes* du chapitre V pour quelques conseils permettant de trouver rapidement les sous-espaces propres.

Commentaires.

✓ **Exercice 38. (Principe de conjugaison)**

1. Montrer que $r \circ s \circ r^{-1}(\vec{x}) = \vec{x}$ si et seulement si l'on a une relation du type : $s(\bigstar) = \bigstar$. En déduire que les sous-espaces propres de $r \circ s \circ r^{-1}$ et s associés à 1 ont même dimension, ce qui permet de montrer que ces deux isométries ont même nature. Expliciter le premier sous-espace propre permet d'obtenir le vecteur normal annoncé.
2. Raisonnement analogue pour avoir le fait que ce soit une rotation d'axe $s(D)$. Pour une mesure d'angle : regarder la trace dans une base adéquate et utiliser le fait que $s \circ r \circ s^{-1}$ et r soient semblables.

Commentaires.

★ **Exercice 39. (Il faut au moins $n - 1$ transpositions pour engendrer S_n)**

1. Il est facile de montrer que l'endomorphisme $u_\sigma : \vec{e}_i \mapsto \vec{e}_{\sigma(i)}$ est dans $\mathrm{O}(\mathbb{R}^n)$ (avec $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base orthonormée). Constater qu'il existe une droite D de $\mathbb{R}^n$ stable par tous les u_σ – cela revient à montrer l'existence d'un vecteur propre qui leur est commun – et en déduire que S_n s'injecte dans $\mathrm{O}\left(D^\perp\right)$ (bien penser à vérifier l'injectivité : pour un morphisme de groupes, il suffit d'étudier le noyau). Si $\varphi : \sigma \mapsto u_\sigma$ est le morphisme injectif en question et $\tau = (i\ j)$ une transposition : montrer que u_τ est une symétrie orthogonale. Pour déterminer sa caractéristique géométrique, il suffit de résoudre $u_\tau(\vec{x}) = \vec{x}$. Montrer que cela équivaut à une équation extrêmement simple vérifiée par les coordonnées x_i de $\vec{x}$, et que u_τ est donc une réflexion par rapport à un hyperplan de $D^\perp$ dont on peut donner un vecteur normal.
2. D'abord justifier que $\varphi(S)$ engendre $\varphi(S_n)$. Ensuite, par des arguments dimensionnels, montrer que si : $\mathrm{card}(S) < n - 1$, alors : $\bigcap\limits_{\tau \in S} \ker(\tau - \mathrm{Id}) \neq \{\vec{0}\}$. En déduire l'existence de vecteurs non nuls fixés par tous les éléments de $\varphi(S_n)$, et exhiber une isométrie $\varphi(\sigma) \in \mathrm{O}(D^\perp)$ pour laquelle ce serait contradictoire (il est sans doute plus facile de d'abord réfléchir sur les permutations, puis de passer aux matrices).

Commentaires.

Exercice 40.

1. Introduire $N \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et écrire $\mathrm{tr}(\varphi_A(M)^\top N)$ sous la forme $\mathrm{tr}(M^\top \bigstar)$, grâce aux propriétés de la trace.

2. Cela revient à chercher une condition nécessaire et suffisante pour que : $\varphi_A^* \circ \varphi_A = \mathrm{Id}_{\mathrm{M}_n(\mathbb{R})}$. Une conjecture est très facile à établir lorsqu'on écrit explicitement cette composition. Le sens réciproque de cette conjecture est immédiat et le sens direct s'obtient en évaluant cette égalité en une matrice M bien choisie.

Commentaires.

Exercice 41. Montrer que $\vec{u}$ doit être dans le plan P orthogonal à l'axe de la rotation f. Écrire la matrice de f dans une base adaptée à $E = P^\perp \oplus P$. On sait qu'elle doit être égale à $\begin{pmatrix} 1 & 0_{\mathrm{M}_{1,2}(\mathbb{R})} \\ 0_{\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})} & R(\theta) \end{pmatrix}$. Mais l'hypothèse de l'énoncé nous permet de l'écrire autrement. Conclure.

Commentaires.

★ **Exercice 42.**

1. Montrer que toute matrice de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ peut être reliée à I_n par un chemin continu : commencer par une matrice de rotation d'ordre 2, puis traiter n quelconque en réduisant toute matrice de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ sous la forme diagonale par blocs vue en cours (le fait d'être dans $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ nous dit quelque chose sur le nombre de -1 de la diagonale : pourquoi est-ce important ?).
2. Trouver une application surjective continue de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ (penser au fait que ce qui distingue en premier lieu les éléments de ces deux ensembles, c'est le déterminant : comment, partant d'une matrice orthogonale de déterminant 1, fabriquer aisément une matrice orthogonale de déterminant opposé ?).

Commentaires.

Exercice 43. Tout au long de la résolution, il est utile de se souvenir que les matrices de permutation de signature paire (et donc en particulier les matrices de 3-cycles) sont dans $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ (pourquoi ?), ainsi que les matrices de retournements, un retournement étant une symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace vectoriel de dimension $n-2$. On voit d'ailleurs dans ces deux cas la raison pour laquelle on suppose $n \geqslant 3$ dans l'énoncé (en fait, les matrices de 3-cycles sont des retournements).

Il suffit alors d'écrire toutes les matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ comme combinaison linéaire de telles matrices pour obtenir le résultat voulu.

D'abord montrer que pour tout i, la matrice $E_{i,i} = ((\delta_{k,i}\delta_{\ell,i}))_{1\leqslant k,\ell\leqslant n}$ est dans $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}))$. En déduire que toutes les matrices diagonales sont dans F. Si vous ne parvenez pas à obtenir les $E_{i,i}$ (et cela peut effectivement être tortueux selon la parité de n), notez qu'il suffit d'obtenir n matrices diagonales linéairement indépendantes pour en déduire qu'elles sont toutes dans F.

Montrer par des manipulations analogues que pour tous i et j la matrice $E_{i,j} - E_{j,i}$ est dans F (elle n'est pas dans $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, mais une matrice très simple de la forme $E_{i,j} - E_{j,i} + M$ est dedans : grâce au fait que les matrices diagonales soient dans F, vous pouvez conclure), et en déduire que le sous-espace vectoriel qu'elles engendrent (vous le connaissez bien) est dans F.

Raisonnement analogue pour montrer que toute matrice symétrique est dans F et conclure.

Commentaires.

☢ **Exercice 44. (Les réflexions engendrent $\mathrm{O}(E)$)** Raisonner par récurrence sur r. Montrer que si $\mathrm{rang}(f - \mathrm{Id}_E) = r \geqslant 1$ alors il existe $\vec{e}$ unitaire tel que $f(\vec{e}) - \vec{e} \neq \vec{0}$. Vérifier alors qu'il existe une réflexion s envoyant $\vec{e}$ sur $f(\vec{e})$ (voir exercice 30 si besoin pour s'en inspirer) et qu'alors $s \circ f$ est une isométrie telle que $\mathrm{rang}(s \circ f - \mathrm{Id}_E) < \mathrm{rang}(f - \mathrm{Id}_E)$ (comparer les noyaux : il y a une inclusion stricte), ce qui permet d'appliquer l'hypothèse de récurrence et de conclure.

Commentaires. Cet exercice montre que le groupe $\mathrm{O}(E)$ est engendré par les réflexions. On peut montrer que $r = \mathrm{rang}(f - \mathrm{Id}_E)$ est en fait le nombre *minimal* de réflexions nécessaires pour écrire f comme composition de réflexions.
On retrouve le fait que $R(\theta)$ soit le produit d'au plus deux matrices de réflexion (cas de la dimension 2), et même exactement deux lorsque $R(\theta)$ n'est pas la matrice identité.
Un *dessin* permet de de saisir le sens géométrique de la construction ci-dessus, qui n'est pas si astucieuse que cela : l'idée est que plus r est petit et plus f admet de points fixes (géométriquement, $\mathrm{im}(f - \mathrm{Id}_E)$ est le supplémentaire orthogonal de l'ensemble des points fixes de f comme vous pouvez le vérifier). Plus précisément, le sous-espace des vecteurs invariants par f est de dimension $n - r$. La stratégie ci-dessus est de composer f avec des réflexions qui vont augmenter son nombre de points fixes, jusqu'à se ramener à une isométrie qui fixe tout l'espace et qui est donc l'identité. Chaque composition augmente d'au moins 1 la dimension du sous-espace des points fixes : d'où la nécessité, *a priori*, de r compositions pour obtenir l'identité (la démonstration de l'hérédité correspond à une de ces r compositions).
Pour « fabriquer » de nouveaux points fixes : si $\vec{e}$ n'est pas un point fixe de f, alors il suffit d'introduire une réflexion envoyant $\vec{e}$ sur $f(\vec{e})$ (ou l'inverse : peu importe vu qu'une réflexion est involutive), et l'exercice 30 nous montre comment faire : il suffit de prendre une réflexion par rapport à un hyperplan médiateur. Remarquer que la construction de l'hyperplan médiateur, dans l'exercice 30, fait intervenir exactement les mêmes vecteurs que dans l'indication ci-dessus.

Exercice 45. (Formule de Rodrigues) Faire un dessin est extrêmement utile pour comprendre ce qu'il se passe.

Soit $\vec{x} \in E$. Si D est l'axe de r, introduire une base orthonormée directe de E adaptée à la décomposition $E = D \oplus D^\perp$: pour faciliter les calculs, prendre pour premier vecteur de la base de $D^\perp$ le projeté orthogonal de $\vec{x}$ sur $D^\perp$ (normalisé) ; le deuxième vecteur d'une base orthonormée de $D^\perp$ est alors complètement caractérisé par les deux précédents, si l'on souhaite en déduire une base orthonormée directe de E (observer la formule à démontrer peut vous donner une idée de ce qu'est ce vecteur, si vous séchez).

Calculer alors l'image par r de la composante dans D de $\vec{x}$, puis de la composante dans $D^\perp$ de $\vec{x}$, en se souvenant que r induit sur $D^\perp$ une rotation planaire. Conclure en sommant le tout, puis en se souvenant que la composante de $\vec{x}$ dans D est explicite (comme toute projection sur une droite dont on a un vecteur directeur unitaire), ainsi que le projeté orthogonal de $\vec{x}$ sur $D^\perp$.

Commentaires.

Matrices symétriques positives, définies positives, et inégalités matricielles

✓ **Exercice 46. (Résultats de base sur les matrices positives, définies positives)**

1. Les coefficients diagonaux sont égaux à des produits scalaires adéquats, qui sont strictement positifs grâce au caractère défini de A.
2. Conséquence facile de la définition.
3. Utiliser le fait que la trace soit la somme des valeurs propres, et qu'une matrice symétrique réelle est toujours diagonalisable.
4. Simplifier $X^\top AX$ grâce à une base orthonormée de vecteurs propres. En déduire que si $X^\top AX = 0$ avec X non nul, alors λ doit être une valeur propre de A.

Commentaires.

✓ **Exercice 47. (Topologie de l'ensemble des matrices positives)**

1. Montrer que ces deux ensembles sont convexes (par exemple).
2. S'inspirer de la démonstration que $\mathrm{GL}_n(K)$ est dense dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, en l'adaptant pour que votre suite de matrices $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ symétriques vérifie bien : $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$, $X^\top A_p X > 0$.
3. Interpréter la condition : $\forall X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^\top A_p X \geqslant 0$, comme le fait que $\mathrm{S}_n^+(\mathbb{R})$ soit une intersection d'images réciproques d'intervalles fermés par des applications continues.

Commentaires.

✓ **Exercice 48. (Matrice de covariance)** Pour tout vecteur colonne Y, écrire $Y^\top MY$ comme une variance.

Commentaires.

★ **Exercice 49.** En utilisant la racine carrée de A, montrer que AB est semblable à une matrice symétrique $\bigstar$ dépendant de B, dont on vérifiera qu'elle est positive en exprimant $X^\top \bigstar X$ en fonction de $\spadesuit^\top B \spadesuit$. Le résultat voulu en résulte aussitôt.

Commentaires.

★ **Exercice 50. (Critère de Sylvester)**

1. Sens direct : montrer que si A est définie positive, alors A_k l'est aussi pour tout k, en notant que pour tout X on a : $X^\top A_k X = Y^\top AY$, avec Y bien choisi. Conclure grâce au signe des valeurs propres d'une matrice définie positive.

   Sens réciproque : raisonner par récurrence sur n. Noter que si $A \in \mathrm{S}_{n+1}(\mathbb{R})$ vérifie l'hypothèse sur les déterminants des matrices extraites alors on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à $A_n \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$, qui est donc définie positive. Grâce au théorème spectral appliqué à A_n, introduire une base orthonormée de $\mathrm{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ telle que pour tout vecteur colonne X, on ait : $X^\top AX = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \bigstar_i^2 + \spadesuit$, où les λ_i sont les valeurs propres de A_n. Montrer que $\spadesuit$ est positif (et même strictement positif si l'on ne retient que la partie indépendante de X) en remarquant que cette quantité apparaît lorsqu'on calcule convenablement le déterminant de A_n. Conclure.
2. Bien justifier que cette intégrale définit une matrice symétrique (immédiat par construction de l'intégrale ou en intégrant composante par composante). On veut montrer que pour tout vecteur colonne non nul X on a : $X^\top \left(\int_0^1 M(t)\mathrm{d}t\right) X > 0$. Grâce à une propriété de l'intégrale, montrer que $\int_0^1 X^\top M(t)X\mathrm{d}t > 0$, puis faire le lien avec la quantité précédente.
3. Noter que $A = \int_0^1 M(t)\mathrm{d}t$ où M est une matrice symétrique dont les coefficients sont des puissances de t (comment les choisir pour que, après intégration, on ait $\frac{1}{1+|i-j|}$?). On montre que $M(t)$ est définie positive pour tout $t \in]0,1[$ grâce à la première question et un raisonnement par récurrence (faire une opération convenable entre les deux dernières colonnes pour obtenir de nombreux zéros, et développer par rapport à une colonne, pour obtenir une relation de récurrence entre déterminants). Les termes $t = 0$ et $t = 1$ ne changent pas grand'chose par un argument classique d'intégration.

Commentaires. Pour étudier une matrice symétrique, il y a potentiellement deux angles d'attaque : passer par l'endomorphisme canoniquement associé ou la forme bilinéaire symétrique canoniquement associée. Vous n'avez pas forcément l'habitude d'adopter le second point de vue et il est donc normal de se demander quand il prévaut. Plusieurs exercices de ce chapitre donnent un début de réponse (par exemple, le théorème spectral permet de donner des informations sur le spectre *via* l'étude de $X \mapsto X^\top AX$ et réciproquement). Cet exercice donne un autre point de vue : lorsqu'on étudie des matrices extraites de A. En effet, sauf cas rares (sous-espaces stables...), il n'y a pas de relation spécialement commode entre les endomorphismes de A et d'une matrice extraite de A ; en revanche, si l'on adapte le point de vue des formes bilinéaires, on relie celles associées à A et à ses matrices extraites *via* une bête restriction.

Exercice 51. Sens direct : raisonner comme dans la première question de l'exercice 50. Sens réciproque : se ramener au cas défini positif en introduisant $A + \varepsilon \mathrm{I}_n$ avec $\varepsilon > 0$. Il s'agit de justifier que c'est effectivement une matrice définie positive, grâce à l'exercice 50 justement : noter que $\det(A_I + \varepsilon \mathrm{I}_n)$ est un polynôme en ε dont les coefficients s'expriment à l'aide des déterminants des A_J avec $J \subseteq I$: ils sont donc positifs par hypothèse. En déduire que $\det(A_I + \varepsilon \mathrm{I}_n) > 0$ pour tout $\varepsilon > 0$ et que $A_I + \varepsilon \mathrm{I}_n$ est définie positive.

Conclure par un passage à la limite (à comparer avec l'exercice 47).

Commentaires. On se demandera pourquoi la condition nécessaire et suffisante n'est pas la même que dans l'exercice 50 (chercher des matrices symétriques qui ne sont pas positives alors que $\det(A_k) \geqslant 0$ pour tout k), et pourquoi la démonstration ne peut pas être imitée ici en remplaçant simplement les inégalités strictes par les inégalités larges.
Il est très fréquent, dans les exercices de cette feuille, que l'on soit contraint de se ramener aux matrices définies positives pour ensuite conclure par densité dans le cas positif : avoir conscience de ce schéma récurrent (exercices 53, 54, 62 pour d'autres exemples).

✓ **Exercice 52.** Introduire une base orthonormée convenable pour écrire la trace de $u \circ s$ à l'aide de produits scalaires. Par « convenable », on entend : qui permette aussi de simplifier aisément $s(\vec{e}_i)$ dans le calcul des produits scalaires. L'inégalité découle alors aisément d'une majoration de $\langle u(\vec{e}_i), \vec{e}_i \rangle$, que l'on montrera en notant que les hypothèses permettent de calculer la norme de $\vec{e}_i$ (pour $\vec{e}_i$ unitaire) et de $u(\vec{e}_i)$ (car u est une isométrie) : comment ramener ce produit scalaire à leurs normes ?

Commentaires.

★ **Exercice 53.** (🗎)

1. D'abord traiter le cas où $B = \mathrm{I}_n$. Remarquer que si l'on écrit le déterminant comme un produit de valeurs propres alors, quitte à composer l'inégalité par une fonction croissante bien choisie, l'inégalité à démontrer est

une inégalité de convexité (pour la composition que je mentionne : noter qu'une inégalité de convexité fait intervenir une somme dans chaque membre de l'inégalité, or le déterminant est un produit : y remédier).

Pour le cas général : se ramener au cas précédent. Mais si on le fait naïvement en factorisant $A + B$ par B, on faire apparaître la matrice AB^{-1} qui n'est même pas symétrique : on ne peut lui appliquer ce qui précède. On a expliqué dans le cours et dans *Méthodes* comment remédier à cette rupture de symétrie. S'en inspirer.

2. Raisonner par densité (noter que si les deux matrices ne sont pas dans $\mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, le résultat est trivial : on peut se placer dans le cas où une seule matrice est dans $\mathrm{S}_n^{+}(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$).

Commentaires.

Exercice 54. D'abord traiter le cas où $B = \mathrm{I}_n$. Remarquer que si l'on écrit le déterminant comme un produit de valeurs propres alors, quitte à composer l'inégalité par une fonction croissante bien choisie, l'inégalité à démontrer est une inégalité de convexité (pour la composition que je mentionne : noter qu'une inégalité de convexité fait intervenir une somme dans chaque membre de l'inégalité, or le déterminant est un produit : y remédier).

Pour le cas général : se ramener au cas précédent. Mais si on le fait naïvement en factorisant $\alpha A + (1-\alpha)B$ par B, on fait apparaître la matrice AB^{-1} qui n'est même pas symétrique : on ne peut lui appliquer ce qui précède. On a expliqué dans le cours et dans *Méthodes* comment remédier à cette rupture de symétrie. S'en inspirer.

Comme la fonction convexe utilisée est strictement convexe, on connaît le cas d'égalité.

Commentaires.

✓ **Exercice 55.** Reconnaître une inégalité de convexité : exprimer la trace et le déterminant à l'aide des valeurs propres. Se souvenir ensuite que les inégalités de convexité ont des sommes dans chaque membre de l'inégalité : ce n'est pas le cas ici, mais une composition classique permet de se ramener à des sommes.

Commentaires.

Exercice 56. (Théorème de perturbation de Weyl) En s'inspirant de l'exercice 32, montrer que λ_i et μ_i sont des extremums de $X \mapsto X^\top AX$ et $X \mapsto X^\top BX$ restreints à des sous-espaces vectoriels F et G convenables (prendre des sous-espaces vectoriels ne contenant pas de vecteurs propres associés aux valeurs propres plus grandes ou plus petites – à vous de réfléchir au bon choix – que λ_i). Il faudrait idéalement que ce soient des extremums de la restriction de ces formes quadratiques à un sous-espace vectoriel commun : partant de F et G, comment obtenir un sous-espace vectoriel H tel que λ_i et μ_i soient des extremums sur H de $X \mapsto X^\top AX$ et $X \mapsto X^\top BX$? S'assurer que H contient au moins un vecteur non nul grâce à un argument dimensionnel : cette étape nécessite d'avoir bien choisi F et G : s'ils ne vous donnent pas $\dim(H) > 0$, changez leurs définitions.

On conclut alors qu'il existe X unitaire tel que $|\lambda_i - \mu_i| \leqslant X^\top AX - X^\top BX = X^\top (A-B)X$. Conclure en utilisant une inégalité adéquate et la définition de la norme triple.

Commentaires.

Exercice 57. (Décroissance de la fonction inverse) D'abord traiter le cas où $B = \mathrm{I}_n$. Remarquer alors que l'hypothèse sur $A - \mathrm{I}_n$ équivaut à une inégalité vérifiée par les valeurs propres de A, qui équivaut à une inégalité vérifiée par les valeurs propres de A^{-1}. En déduire $\mathrm{I}_n^{-1} - A^{-1} \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Se ramener au cas précédent *via* une technique expliquée dans *Méthodes* et illustrée dans le cours, quand on veut factoriser par une matrice symétrique (pour se ramener au cas de la matrice identité) sans rompre la symétrie.

Commentaires.

Exercice 58. (Une suite croissante majorée converge) Montrer que pour tout vecteur colonne, la suite $\left(X^\top A_p X\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante majorée donc converge. En déduire, *via* un argument classique, que la suite $\left(X^\top A_p Y\right)_{p\in\mathbb{N}}$ converge pour tous X et Y. Conclure que $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge composante par composante.

Commentaires.

Exercice 59. On sait trouver un antécédent par l'exponentielle matricielle de toute matrice de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ qui soit antisymétrique. On y parviendrait sans aucune difficulté pour I_p (quel antécédent privilégié connaissez-vous de cette matrice ?). Pour $-\mathrm{I}_q$, noter d'abord que q doit être pair pour avoir une matrice de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. Remarquer alors qu'il s'agit d'une diagonale par blocs de matrices de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.

Ayant des antécédents antisymétriques de toutes ces matrices, en déduire un antécédent antisymétrique de toute matrice de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ en se ramenant au cas précédent *via* réduction.

Commentaires.

Exercice 60.

D'abord justifier que l'image d'une matrice symétrique réelle est symétrique et définie positive : cela découle rapidement de la connaissance du spectre d'une exponentielle de matrice.

Pour l'injectivité : adapter l'exercice 14 du chapitre X (montrer que A et B commutent en montrant que A est un polynôme en $\exp(B)$, en déduire qu'on peut codiagonaliser A et B, conclure en comparant les matrices diagonales semblables à A et B : voir l'exercice cité pour des détails).

Pour la surjectivité : comme toutes les matrices symétriques réelles sont diagonalisables, il est facile de fabriquer un antécédent explicite de toute matrice $A \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Pour la continuité de la bijection réciproque $\exp_{|\mathrm{S}_n(\mathbb{R})}$: c'est assez rare pour être noté, mais il est commode de montrer la caractérisation de la continuité par les fermés : introduire un fermé F de $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ et montrer que $\exp_{|\mathrm{S}_n(\mathbb{R})}(F)$ est fermé dans $\mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. C'est-à-dire : montrer que si $(\exp(A_p))_{p\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ converge vers une matrice $B \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors : $B \in \exp(F)$. L'idée est d'introduire un antécédent $A \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ de B, et c'est gagné si l'on montre que $A = \lim\limits_{p\to+\infty} A_p$ (car $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans F qui est fermé). La difficulté est de montrer que $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge : si c'est le cas, c'est forcément vers A d'après tout ce qui précède (pourquoi ?). Pour cela, utiliser la convergence de $(\exp(A_p))_{p\in\mathbb{N}}$ pour montrer que $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée (grâce à la preuve explicite de la surjectivité, vous avez probablement explicité le spectre de A_p en fonction de celui de $\exp(A_p)$: or un bon choix de norme sur $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ permet de lier norme et valeurs propres, et donc de montrer que $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée parce que les valeurs propres de la suite $(\exp(A_p))_{p\in\mathbb{N}}$ forment un ensemble borné) et en extraire une sous-suite convergente. Justifier que la limite de cette sous-suite convergente doit être A et en déduire que $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée ayant une unique valeur d'adhérence. Conclure grâce à un résultat de topologie.

Autre approche analogue : montrer que $\exp^{-1}_{|\mathrm{S}_n(\mathbb{R})}$ est séquentiellement continue. Introduire $(B_p)_{p\in\mathbb{N}} \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ qui converge vers $B \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, et si A_p est l'unique antécédent dans $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ de B_p, montrer que $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers l'unique antécédent dans $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ de B (bien se convaincre que cela montrerait ce qu'on veut). Cela revient à faire essentiellement le même raisonnement que ci-dessus.

Commentaires. On se demandera pourquoi, ici, on a utilisé la caractérisation de la continuité par les fermés. Une piste pour méditer là-dessus : le fait qu'on étudie la continuité d'une bijection *réciproque* non explicite. Remarquer que les indications ci-dessus permettent de travailler presque exclusivement avec l'exponentielle qui, elle, est connue.

Exercice 61.

1. D'abord traiter le cas $Y_1 = Y_2$, l'intérêt de ce cas particulier étant d'exploiter le caractère symétrique négatif de $A + A^\top$: cette matrice apparaît naturellement en dérivant $Y_1^\top Y_1$. En déduire que $Y_1^\top Y_1$ est une fonction décroissante minorée.

   Le résultat étant démontré pour toute norme de solution de $Y' = AY$, on en déduit que c'est vrai pour tout produit scalaire de deux solutions de $Y' = AY$, *via* une identité exprimant produits scalaires en fonction de normes (le raisonnement est classique).

2. Cette intégrale doit vous faire penser à une fonction naturellement associée à $Y' = AY$ et qui apparaît dans votre cours. Cette fonction est elle-même naturellement associée à une matrice (ou plutôt une application matricielle) dont les colonnes forment un système fondamental de solutions de $Y' = AY$. Si l'on note $M : I \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ cette matrice : noter que toute solution de cette équation différentielle peut s'écrire $t \mapsto M(t)X$ avec $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. En déduire que le premier prédicat de l'énoncé équivaut à l'existence de X tel que $X^\top M(t)^\top M(t)X \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Déduire de la question précédente que $M(t)^\top M(t)$ a une limite finie M_∞ quand $t \to +\infty$. En combinant tout ce qui précède, montrer que l'équivalence à montrer se ramène à l'existence de X tel que $X^\top M_\infty X = 0$, puis à la non inversibilité de M_∞ (ici intervient le caractère symétrique positif de $M(t)^\top M(t)$, à justifier). Conclure en considérant le déterminant de $M(t)$ (et de M_∞), que vous savez calculer grâce au cours.

Commentaires.

Autres réductions que par relation de similitude

★ **Exercice 62. (Décomposition OS)**

1. Faire une analyse-synthèse : si ce couple convient, à quoi doivent être égales O et S ? Il est plus facile de d'abord trouver S : produire deux équations liant les matrices A, O et S (suivant le principe récurrent que pour expliciter deux inconnues, nous avons besoin d'au moins deux équations). En utilisant le fait que $O^\top O = \mathrm{I}_n$, combiner

ces deux équations de sorte à trouver une équation entre S et A. Un résultat du cours vous permet d'alors résoudre cette équation pour avoir une valeur candidate de S. Une fois qu'on a S, on isole O dans $A = OS$.

Vérifier réciproquement que le couple (O, S) convient : on doit en particulier vérifier que O est orthogonale.

Pour l'unicité, si l'on n'est pas passé par une analyse-synthèse, ou si l'on veut se passer du résultat d'unicité de la solution à l'équation entre S et A ci-dessus : si $OS = O'S'$, regrouper les matrices orthogonales d'un côté, symétriques de l'autre. Que dire d'une matrice à la fois orthogonale et symétrique définie positive, en termes de valeurs propres ? et de réduction ? Conclure.

2. Raisonner par densité des matrices inversibles. Problème : si $A_p = O_p S_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} A$, on aimerait dire que A est le produit de la limite de $(O_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et de la limite de $(S_p)_{p\in\mathbb{N}}$, mais rien n'assure que ces deux suites convergent. Une propriété topologique de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ permet d'y remédier : même si ces suites ne convergent pas, on peut se ramener au cas convergent. Le plus dur est alors fait.

   Montrer ensuite que la limite d'une suite de matrices symétriques définies positives est symétrique positive, en passant à la limite dans : $X^\top S_n X > 0$.

Commentaires.

★ **Exercice 63. (Théorème de réduction simultanée)** Un résultat de votre cours permet d'avoir une telle factorisation pour A : c'est l'avoir pour B qui est subtil. Pour cela, noter que si vous avez construit P telle que : $A = P^\top P$, il ne reste plus qu'à vouloir que $(P^\top)^{-1}BP^{-1}$ soit diagonale : quel théorème permet naturellement d'exprimer cette matrice à l'aide d'une matrice diagonale ? L'utiliser (penser à vérifier son hypothèse) et isoler B. La matrice P de cette indication ne sera pas tout à fait la matrice à convenir.

Commentaires.

★ **Exercice 64. (Décomposition en valeurs singulières)** L'exercice résulte très aisément de la décomposition OS de l'exercice 62 (diagonaliser S), mais on peut obtenir le résultat directement : voir ci-dessous.

Appliquer le théorème spectral à $A^\top A$: il existe une matrice de passage P orthogonale et D une matrice diagonale telles que : $A^\top A = PDP^{-1}$. Pour en déduire la décomposition voulue de A, il y a plusieurs pistes, toutes intéressantes.

Première piste. Remarquer que si f est canoniquement associé à A et si $\mathcal{B} = (E_1, \ldots, E_n)$ est une base orthonormée de vecteurs propres de $A^\top A$, alors $\langle f(E_i), f(E_j)\rangle = \lambda_i \delta_{i,j}$ où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ désigne le produit scalaire usuel. En déduire une renormalisation des vecteurs de la famille $f(\mathcal{B})$ qui soit orthonormée si les λ_i sont non nuls (s'il existe des λ_i nuls, on remplace les i^{e} vecteurs correspondants de cette famille par n'importe des vecteurs d'une base convenable de $\ker(f)$; on simplifie la rédaction si l'on définit $\mathcal{B}$ de sorte à que les valeurs propres nulles soient à la fin). Écrire alors la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}$, grâce à un changement de base qui fait apparaître exclusivement des matrices de passage entre bases orthonormées (bien noter que le changement de base à effectuer n'est pas celui classique : vous devez faire apparaître les racines carrées des valeurs propres de $A^\top A$ comme coefficients diagonaux de la matrice diagonale, ce qui n'a aucune chance d'arriver si vous cherchez une relation de similitude : comment choisir la base $(U_1, \ldots, U_n)$ à l'arrivée pour que $f(E_i) = \sqrt{\lambda_i}U_i$?).

Deuxième piste. Comme les coefficients diagonaux de D sont positifs (pourquoi ?), on peut introduire une matrice diagonale D' telle que $D'^2 = D$. L'égalité $A^\top A = PDP^{-1}$ équivaut à : $(AP)^\top(AP) = D = D'^2$, et on veut en déduire l'existence de U orthogonale telle que : $AP = UD'$. Remarquer que l'égalité $(AP)^\top(AP) = D$ implique l'orthogonalité des colonnes de AP. Les normaliser pour qu'elles forment une famille orthonormée (attention au cas des colonnes nulles : compléter la famille en remplaçant les colonnes nulles par n'importe quoi tant qu'on a une famille orthonormée). Noter U la matrice dont les colonnes sont cette famille orthonormée. Vérifier qu'on a bien $AP = UD'$, et conclure.

Commentaires.

★ **Exercice 65. (Décomposition de Choleski)** Se convaincre qu'une relation de la forme $A = P^\top P$ (avec P inversible) revient à montrer l'existence d'une base $\mathcal{B}$ telle que $X^\top AX = Y^\top Y = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2$, où les y_i sont les coordonnées de $Y = [X]_{\mathcal{B}}$. Faire le lien avec l'indication de l'exercice 50 si besoin.

Pour cela : noter que $(X, Y) \mapsto X^\top AY$ est un produit scalaire et orthonormaliser une base adéquate pour ce produit scalaire-ci (faire le lien avec un résultat de cours selon lequel toute norme s'écrit comme la norme euclidienne usuelle lorsqu'on a la donnée d'une base orthonormée). En déduire l'existence de P telle que pour tous X et Y on ait : $X^\top AY = (PX)^\top(PY)$. Le raisonnement pour en déduire que $A = P^\top P$ est classique. Les propriétés de l'orthonormalisation de Gram-Schmidt assurent que P vérifie les propriétés voulues.

Pour l'unicité : montrer que si Q est une autre matrice vérifiant les mêmes hypothèses que P, alors PQ^{-1} est à la fois triangulaire supérieure et inférieure. Montrer que les coefficients diagonaux sont strictement positifs et conclure que $P = Q$.

> **Commentaires.** La présence dans un énoncé d'une matrice triangulaire supérieure, à coefficients diagonaux strictement positifs doit vous faire penser en premier lieu à l'algorithme de Gram-Schmidt, surtout si elle n'apparaît dans une relation de similitude (où, là, vous pourriez être davantage tentés d'interpréter la positivité comme une condition sur le signe des valeurs propres d'un endomorphisme ou d'une matrice).
> Les produits matriciels de la forme $P^\top P$ apparaissent plutôt dans des études de formes bilinéaires (avec lesquelles on effectue des changements de base). Voir les indications de l'exercice 50 à ce sujet. C'est cela qui peut inciter à penser à étudier $(X, Y) \mapsto X^\top AY$ dans cet exercice.

Réduction d'autres endomorphismes remarquables

Exercice 66. (Matrices unitaires) Imiter la démonstration faite pour les matrices orthogonales, en profitant du fait qu'un endomorphisme admet toujours des vecteurs propres dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel (pourquoi ?).

Il faut simplement adapter la stabilité des supplémentaires orthogonaux des sous-espaces stables, puisqu'on s'était restreint au cas réel dans le cours, et pour cause : on avait besoin de la notion d'adjoint pour montrer que si F est stable par un endomorphisme f alors $F^\perp$ est stable par f^* (et donc par f^{-1} dans le cas des isométries). À défaut d'avoir la notion d'adjoint dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, vous pouvez toujours imiter cette démonstration en prenant un produit scalaire hermitien, c'est-à-dire : montrer que si $F \subseteq \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ est stable par $X \mapsto AX$, alors pour tout $X \in F^\perp$ et tout $Y \in F$ on a : $\overline{Y}^\top \left(A^{-1}X\right) = 0$ (cela prouverait la stabilité de $F^\perp$ par $X \mapsto A^{-1}X$, et passer à $X \mapsto AX$ se fait comme pour les isométries dans le cours).

> **Commentaires.**

★ **Exercice 67. (Endomorphismes normaux)**

1. Premier sens direct : utiliser les propriétés de l'adjonction pour transformer $\langle f(\vec{x}), f(\vec{y})\rangle$, puis utiliser l'aspect normal pour obtenir $\langle f^*(\vec{x}), f^*(\vec{y})\rangle$. Premier sens réciproque : on veut montrer : $\forall \vec{x} \in E,\ f \circ f^*(\vec{x}) = f^* \circ f(\vec{x})$. On veut donc montrer une égalité entre *vecteurs* alors que l'hypothèse est sur des *produits scalaires* : l'approche est classique et est par exemple expliquée dans *Méthodes*.

   La deuxième équivalence est facile : le sens direct est trivial et le sens réciproque résulte d'un raisonnement classique, lorsque nos hypothèses portent sur des normes et qu'on veut calculer des produits scalaires.
2. Le cas $\lambda = 0$ découle aisément de la question précédente. Pour le cas général : se ramener au cas précédent en introduisant un endomorphisme adéquat (bien vérifier qu'il est aussi normal).

> **Commentaires.**

Exercice 68. (Réduction des matrices normales sur $\mathbb{C}$)

1. Vérifier que le résultat à montrer équivaut à $\overline{g(X)}^\top Y = 0$ pour tout Y dans le sous-espace propre de f associé à λ et tout X dans son orthogonal. C'est alors immédiat si l'on traduit concrètement ces deux appartenances et qu'on utilise des propriétés de base de la transposition et de la conjugaison complexe.
2. Raisonner plutôt avec les endomorphismes canoniquement associés à A et $\overline{A}^\top$, par récurrence sur n. Pour l'hérédité : justifier qu'au vu des hypothèses, f admet nécessairement un sous-espace propre E_λ. Appliquer l'hypothèse de récurrence à l'endomorphisme induit par f et g sur E_λ et son supplémentaire orthogonal ; pour cela, on a cependant besoin du fait que E_λ soit stable par g et $E_\lambda^\perp$ stable par f : c'est là qu'intervient l'hypothèse de commutation (se souvenir d'un résultat abondamment utilisé au chapitre V). Un calcul analogue à celui de la première question permet alors de montrer que $E_\lambda^\perp$ est stable par f.

   Le reste du raisonnement imite celui des réductions faites dans le cours.
3. Calcul sans mystère, qui fonctionne grâce au fait que les matrices de passage se simplifient et les matrices diagonales commutent.

> **Commentaires.**

☢ **Exercice 69. (Réduction des endomorphismes normaux)**

1. Poser $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et regarder les équations vérifiées par a, b, c et d, du fait que $f \circ f^* = f^* \circ f$. C'est du calcul bête et méchant.

2. C'est l'étape subtile de l'exercice (noter que l'exercice de la feuille distribuée contient un énoncé moins fort que ce dont on a vraiment besoin : c'est rectifié dans la version en ligne). S'inspirer de la démonstration faite dans le cours selon laquelle tout endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel admet une droite ou un plan stable. La nouveauté est qu'on doit montrer que si $\vec{x} \in \ker(P(f)) \setminus \{\vec{0}\}$ avec P un facteur irréductible de degré 2 de χ_f, alors $P = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((\vec{x}, f(\vec{x})))$ est un plan stable par f^*. La vérification s'avère ardue si $\vec{x}$ n'est pas pris plus précisément : prendre pour $\vec{x}$ un vecteur propre de l'endomorphisme induit par $f^* \circ f$ sur $\ker(P(f))$ (pourquoi en existe-t-il ?).

   Le résultat pour $P^\perp$ découle facilement des propriétés de l'adjoint.

3. Raisonner par récurrence sur la dimension, la question précédente servant dans l'hérédité.

   Pour appliquer la question précédente, encore faut-il s'assurer que les endomorphismes induits sur des sous-espaces stables restent normaux : s'assurer que l'adjoint de l'endomorphisme induit par f sur P est bien l'endomorphisme induit par f^* sur $P^\perp$, sans quoi le raisonnement ne peut se poursuivre.

   La diagonale de λ_i provient de vecteurs propres.

Commentaires.