Exercices du chapitre XII (Espaces préhilbertiens et euclidiens)

✓ : exercice d'application des méthodes, ★ : exercice classique, ☢ : exercice difficile.

Sauf mention explicite du contraire, n désigne un entier naturel non nul.

Formes hermitiennes et bilinéaires, produits scalaires

✓ **Exercice 1.** Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer : $\ker(A) = \ker\left(A^\top A\right)$, et : $\mathrm{im}(A) = \mathrm{im}\left(AA^\top\right)$.

Exercice 2. On munit $E = \mathrm{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ du produit scalaire intégral usuel. Montrer que si f est dans l'orthogonal de $\mathbb{R}_n[X]$ (identifié canoniquement à un sous-espace vectoriel de E), alors f admet au moins $n+1$ zéros dans $[0,1]$.

✓ **Exercice 3.** Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien, dont on note $\|\cdot\|$ la norme associée à $\langle\cdot,\cdot\rangle$. On suppose l'existence d'une famille $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ de vecteurs unitaires de E telle que : $\forall \vec{x} \in E$, $\|\vec{x}\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle \vec{e}_k, \vec{x}\rangle^2$. Montrer que $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ est une base orthonormée de E.

★ **Exercice 4. (Produit scalaire sur $\ell^2(\mathbb{N})$)** Soit $\ell^2(\mathbb{N})$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum_{n\geqslant 0} |u_n|^2$ converge.

1. Montrer que pour toutes suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ dans $\ell^2(\mathbb{N})$, la série $\sum_{n\geqslant 0} \overline{u_n} v_n$ converge.
2. Montrer que $\ell^2(\mathbb{N})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et que l'application $\left((u_n)_{n\geqslant 0}, (v_n)_{n\geqslant 0}\right) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{u_n} v_n$ est un produit scalaire hermitien sur $\ell^2(\mathbb{N})$.
3. Soit F l'ensemble des suites complexes à support fini. Déterminer $F^\perp$ et $\left(F^\perp\right)^\perp$.

✓ **Exercice 5.** Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et f un endomorphisme de E tel que pour tout $\vec{x} \in E$, les vecteurs $\vec{x}$ et $f(\vec{x})$ soient orthogonaux. Que dire de f ?

✓ **Exercice 6.** Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel et $f : E \to E$ une application telle que : $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2$, $\langle f(\vec{x}), \vec{y}\rangle = \langle \vec{x}, f(\vec{y})\rangle$. Montrer que f est linéaire.

✓ **Exercice 7.** Soit f une application d'un espace préhilbertien $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, dont on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On suppose que f vérifie : $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2$, $\|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\| = \|\vec{x} - \vec{y}\|$, et : $f(\vec{0}) = \vec{0}$. Montrer que f est une isométrie vectorielle.

★ **Exercice 8. (L'identité du parallélogramme : théorème de Fréchet-von Neumann-Jordan)** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On suppose : $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2$, $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = 2\left(\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2\right)$. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme hermitienne ou euclidienne.

Exercice 9. Montrer qu'il n'existe pas trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ formant entre eux des angles de mesure strictement supérieure à $\dfrac{2\pi}{3}$.

Exercice 10. Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ des vecteurs de E.

1. Montrer : $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|^2 = n \sum_{i=1}^{n} \|\vec{x}_i\|^2 - \left\|\sum_{i=1}^{n} \vec{x}_i\right\|^2$.
2. On suppose que pour tous i et j distincts, on a : $\|\vec{x}_i - \vec{x}_j\| \geqslant 2$. Montrer que le rayon de toute boule fermée contenant $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ est supérieur ou égal à $\sqrt{2\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)}$.

✓ **Exercice 11.** Déterminer $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$.

✓ **Exercice 12.** On munit $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme associée au produit scalaire usuel, et on la note $\|\cdot\|$. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer : $\mathrm{tr}(A) \leqslant \sqrt{n}\|A\| = \sqrt{n\mathrm{tr}\left(A^\top A\right)}$.
2. Montrer que si $O \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, alors : $\|AO\| = \|OA\| = \|A\|$.
3. Montrer que si $O \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, alors : $\|O\| = \sqrt{n}$.

Exercice 13. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer : $|\det(A)| \leqslant (\sqrt{n}\|A\|_\infty)^n$.

Exercice 14. (Théorème de Maschke) Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(E)$.

1. Montrer que l'application $(\vec{x},\vec{y}) \mapsto \sum_{g\in G} \langle g(\vec{x}), g(\vec{y})\rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par tous les éléments de G. Montrer F possède un supplémentaire stable par tous les éléments de G.

Distances à un sous-espace vectoriel

Exercice 15. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace euclidien $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Montrer que F et G sont supplémentaires orthogonaux si et seulement si : $\forall \vec{x} \in E,\ \|\vec{x}\|^2 = (\mathrm{d}(\vec{x},F))^2 + (\mathrm{d}(\vec{x},G))^2$.

✓ **Exercice 16. (Calculs de distance dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$)** On munit $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel.

1. Calculer : $\inf\limits_{\substack{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 \\ a+b+c+d=0}} \left((1-a)^2 + b^2 + c^2 + (1-d)^2\right)$.
2. Soit $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$. Calculer la distance de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ à $G^\perp$.

★ **Exercice 17.** Calculer : $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4^n} - \frac{a}{2^n} - \frac{(-1)^n b}{2^n} \right)^2$.

★ **Exercice 18. (Polynômes de Laguerre)** Soit E l'ensemble des fonctions continues $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telles que $x \mapsto (f(x))^2 e^{-x}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel et que $(f,g) \mapsto \langle f,g\rangle = \int_0^{+\infty} e^{-x} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ est un produit scalaire sur E.
2. Montrer l'existence d'une famille $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications polynomiales qui est orthonormée pour $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et telle que L_n soit de degré n et de coefficient dominant strictement positif pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, il existe $(a_n,b_n,c_n) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $XL_n = a_nL_{n+1} + b_nL_n + c_nL_{n-1}$.
4. Calculer : $\inf\limits_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_0^{+\infty} e^{-x} \left(x^3 - ax^2 - bx - c\right)^2 \mathrm{d}x$.

Exercice 19. Calculer : $\inf\limits_{(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} e^{-x} \left(1 + \sum\limits_{i=1}^n a_i x^i\right)^2 \mathrm{d}x$.

★ **Exercice 20. (Polynômes d'Hermite)** Soit f l'application $x \mapsto e^{-x^2}$.
On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} f^{(n)}(x)$.

1. Montrer que H_n est une application polynomiale de degré n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ H_{n+2} = 2XH_{n+1} - 2(n+1)H_n$.
3. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ H_n'' - 2XH_n' + 2nH_n = 0$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose : $\forall x \in \mathbb{R},\ q_n(x) = H_n(x)e^{-x^2/2}$. Montrer : $q_n''(x) + (2n+1-x^2)q_n(x) = 0$.
5. Calculer $\int_{\mathbb{R}} q_m q_n$ pour tous m et n distincts. Traduction en termes géométriques du résultat ?

★ **Exercice 21. (Matrice de Gram)** Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et $\mathcal{F} = (\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n) \in E^n$. On définit la matrice de Gram de la famille $\mathcal{F}$ ainsi : $G(\mathcal{F}) = ((\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j\rangle))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

1. Montrer que la famille $\mathcal{F}$ est libre si et seulement si : $\det(G(\mathcal{F})) > 0$.
2. Montrer que si $\vec{v}_1$ est orthogonal à $\vec{v}_i$ pour tout $i \in [\![2,n]\!]$, alors : $\det\left(G(\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n)\right) = \|\vec{v}_1\|^2 \det\left(G(\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n)\right)$.
3. En déduire que si F est un sous-espace vectoriel de E, $(\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n)$ une base de F, alors pour tout $\vec{v} \in E$ on a : $\mathrm{d}(\vec{v},F)^2 = \dfrac{\det\left(G(\vec{v},\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n)\right)}{\det\left(G(\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n)\right)}$.

Exercice 22. (Une application des matrices de Gram) Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien de dimension finie non nulle n.

1. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ et des vecteurs unitaires $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_{n+1}$ tels que : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \Longrightarrow \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j\rangle = \alpha$. Déterminer α.
2. Démontrer qu'il existe effectivement de tels vecteurs dans E.

Approfondissements sur les formes hermitiennes ou bilinéaires

Exercice 23. Soit φ une forme bilinéaire sur un espace vectoriel réel de dimension finie. On suppose que pour tout $(\vec{x},\vec{y}) \in E^2$, si : $\varphi(\vec{x},\vec{y}) = 0$, alors : $\varphi(\vec{y},\vec{x}) = 0$. Montrer que φ est symétrique ou antisymétrique.

☢ **Exercice 24.** Soient E un espace vectoriel de dimension finie et φ une forme hermitienne sur E. Soit F un sous-espace vectoriel de E.

1. Montrer : $\dim(F) + \dim\left(F^{\perp_\varphi}\right) = \dim(E) + \dim\left(F \cap E^{\perp_\varphi}\right)$.
2. Montrer : $\left(F^{\perp_\varphi}\right)^{\perp_\varphi} = F + E^{\perp_\varphi}$.

Exercice 25. (Loi d'inertie de Sylvester, signature) Soit $A \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$. On note q_A la forme quadratique associée à $(X,Y) \mapsto X^\top AY$ et on pose : $r = \max\left(\left\{\dim(F) \mid q_{A|F\setminus\{0\}} > 0\right\}\right)$, $s = \max\left(\left\{\dim(G) \mid q_{A|G\setminus\{0\}} < 0\right\}\right)$. Le couple (r,s) est appelé la *signature* de A.

1. Soit $(r,s) \in \mathbb{N}^2$ tel que : $r+s \leqslant n$. Montrer que A admet (r,s) pour signature si et seulement s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que : $A = P^\top \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & & \mathbf{0} \\ & -\mathrm{I}_s & \\ \mathbf{0} & & 0_{\mathrm{M}_{n-r-s}(K)} \end{pmatrix} P$.
2. Soit $B \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A et B ont même signature si et seulement s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que : $A = P^\top BP$.
3. Montrer que la signature de A est donnée par son nombre de valeurs propres strictement positives et strictement négatives.
4. Déterminer les signatures de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Théorème de Riesz, adjoints, endomorphismes remarquables

Exercice 26. (Produit vectoriel) Soit $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien orienté de dimension 3. On fixe une base orthonormée directe $\mathcal{B}$ de E.

1. Montrer que pour tout $(\vec{u},\vec{v}) \in E^2$, il existe un unique vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v} \in E$ tel que : $\forall \vec{w} \in E$, $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \langle \vec{w}, \vec{u} \wedge \vec{v}\rangle$.
2. Montrer que $(\vec{u},\vec{v}) \mapsto \vec{u} \wedge \vec{v}$ est une forme bilinéaire antisymétrique.
3. Soit $(\vec{u},\vec{v}) \in E^2$. Montrer que $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
4. Soit $(\vec{u},\vec{v}) \in E^2$. Montrer que $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ si et seulement si $(\vec{u},\vec{v})$ est liée.
5. Soit $(\vec{u},\vec{v})$ une famille orthonormée de E. Montrer que pour tout $\vec{w} \in E$, la famille $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est orthonormée directe si et seulement si : $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$.
6. Soit $(\vec{u},\vec{v}) \in E^2$. Exprimer les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ de $\vec{u} \wedge \vec{v}$, en fonction de celles de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est appelé le produit vectoriel de $\vec{u}$ par $\vec{v}$.

Exercice 27. On munit $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Déterminer l'endomorphisme adjoint de $X \mapsto AX - XA$.
2. Montrer que A est nilpotente si et seulement s'il existe $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $A = AB - BA$.

Exercice 28. On munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire $(P,Q) \mapsto \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$. Déterminer l'endomorphisme adjoint de $\varphi : P \mapsto (X^2-1)P'' + 2XP' + P$.

✓ **Exercice 29.** Soit $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace hermitien. On note $\|\cdot\|$ la norme associée à $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Soit p une projection orthogonale de E. Montrer que pour toute base orthonormée $(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)$ de E, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \|p(\vec{e}_k)\|^2 = \mathrm{rang}(p)$.

Exercice 30. (Hyperplans médiateurs) Soient E un espace euclidien et $\vec{x}$, $\vec{y}$ deux vecteurs unitaires et distincts. Montrer qu'il existe un hyperplan H tel que : $\vec{y} = s_H(\vec{x})$, où s_H est la réflexion par rapport à H.

★ **Exercice 31. (Norme subordonnée à une norme euclidienne)** Soient $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un produit scalaire sur E et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. Soit $|||\cdot|||$ la norme triple subordonnée à $\|\cdot\|$. Pour tout $f \in \mathrm{L}(E)$, on pose : $\rho(f) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(f)\}$. C'est le *rayon spectral* de f.

1. Soit f un endomorphisme quelconque de E. Montrer : $|||f||| = |||f^*||| = \sqrt{\rho(f^* \circ f)}$.
2. Soit f un endomorphisme autoadjoint de E. Montrer : $|||f||| = \rho(f)$.

★ **Exercice 32. (Recherche de valeurs propres et problème d'extremums)** Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et f un endomorphisme autoadjoint de E.

1. Montrer : $\sup\limits_{\substack{\vec{x}\in E\\ \|\vec{x}\|=1}} \langle f(\vec{x}), \vec{x}\rangle = \max\limits_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f)} \lambda$, et : $\inf\limits_{\substack{\vec{x}\in E\\ \|\vec{x}\|=1}} \langle f(\vec{x}), \vec{x}\rangle = \min\limits_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f)} \lambda$.
2. Soit $\vec{x} \in E$ un vecteur unitaire vérifiant : $\langle f(\vec{x}), \vec{x}\rangle = \max\limits_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f)} \lambda$. Montrer que $\vec{x}$ est un vecteur propre de f.

Exercice 33. Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et f un endomorphisme autoadjoint de E. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\mathrm{Sp}(f)$ pour qu'il existe un vecteur unitaire $\vec{x} \in E$ tel que : $\langle f(\vec{x}), \vec{x}\rangle = 1$.

Exercice 34. (Théorème de Fisher-Cochran) Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien de dimension finie et $f_1, \ldots, f_p$ des endomorphismes autoadjoints de E tels que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \mathrm{rang}(f_i) = n$, et : $\forall \vec{x} \in E$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \langle f_i(\vec{x}), \vec{x}\rangle = \|\vec{x}\|^2$.

Montrer : $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{im}(f_i)$, que les $\mathrm{im}(f_i)$ sont orthogonaux deux à deux, et que f_i est le projecteur orthogonal de E sur $\mathrm{im}(f_i)$ pour tout $i \in [\![1,p]\!]$.

Exercice 35. Soit $A \in \mathrm{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer : $\det(A) \geqslant 0$.

Isométries vectorielles

✓ **Exercice 36.** Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer à quelle condition sur (a,b) on a : $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$; le cas échéant, déterminer l'isométrie de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A.

✓ **Exercice 37.** Soit $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que : $\sum\limits_{i=1}^{n} u_i^2 = 1$. On pose : $A = \mathrm{I}_n - 2UU^\top \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer la nature géométrique de l'endomorphisme canoniquement associé à A.

✓ **Exercice 38. (Principe de conjugaison)** Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien orienté de dimension 3 et r une rotation de E d'axe D et de mesure d'angle $\theta \in \mathbb{R}$. Soit s une réflexion de E par rapport à un plan de vecteur normal $\vec{n} \in E$.

1. Montrer que $r \circ s \circ r^{-1}$ est une réflexion par rapport à un plan de vecteur normal $r(\vec{n})$.
2. Montrer que $s \circ r \circ s^{-1}$ est une rotation d'axe $s(D)$ et de mesure d'angle $\pm\theta$ (le signe dépend de l'orientation).

★ **Exercice 39. (Il faut au moins $n-1$ transpositions pour engendrer S_n)** Soit $n \geqslant 2$.

1. Montrer qu'il existe un espace euclidien E de dimension $n-1$ et un morphisme injectif φ de S_n dans $\mathrm{O}(E)$, et identifier la nature géométrique de $\varphi(\tau)$ pour toute transposition $\tau \in S_n$.
2. En déduire que si S est une partie génératrice de S_n ne comprenant que des transpositions, alors : $\mathrm{card}(S) \geqslant n-1$.

Exercice 40. On fixe $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. On munit $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel.

1. Déterminer l'endomorphisme adjoint de $\varphi_A : M \mapsto AM$.
2. Déterminer à quelle condition nécessaire et suffisante sur A l'application φ_A est une isométrie.

Exercice 41. Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3, et soit f une rotation de E. On suppose qu'il existe $\vec{u} \in E$ non nul tel que : $f(\vec{u}) = -\vec{u}$. Déterminer f.

★ **Exercice 42.**

1. Montrer que $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.
2. Montrer que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est aussi connexe par arcs.

Exercice 43. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}$. Montrer : $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})) = \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

☢ **Exercice 44. (Les réflexions engendrent $\mathrm{O}(E)$)** Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Montrer que toute isométrie f de E s'écrit comme une composition d'au plus r réflexions, où : $r = \operatorname{rang}(f - \mathrm{Id}_E)$.

Exercice 45. (Formule de Rodrigues) Soit r une rotation d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ de dimension 3. L'ensemble des vecteurs invariants de r est une droite, que l'on oriente par $\vec{a}$ unitaire. On note $\theta \in \mathbb{R}$ une mesure d'angle de r. Soit $\vec{x} \in E$. Montrer : $r(\vec{x}) = \cos(\theta)\vec{x} + (1 - \cos(\theta)) \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle \vec{a} + \sin(\theta)\vec{a} \wedge \vec{x}$.

Matrices symétriques positives, définies positives, et inégalités matricielles

✓ **Exercice 46. (Résultats de base sur les matrices positives, définies positives)**

1. Soit $A \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que les coefficients diagonaux de A sont strictement positifs.
2. Montrer que si $(A, B) \in \left(\mathrm{S}_n^{+}(\mathbb{R})\right)^2$, alors pour tout $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+)^2$, on a : $\alpha A + \beta B \in \mathrm{S}_n^{+}(\mathbb{R})$.
3. Soit $A \in \mathrm{S}_n^{+}(\mathbb{R})$. Montrer que si : $\operatorname{tr}(A) = 0$, alors : $A = 0_{\mathrm{M}_n(\mathbb{R})}$.
4. Soit $A \in \mathrm{S}_n^{+}(\mathbb{R})$. Montrer que s'il existe $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que : $X^\top A X = 0$, alors A n'est pas inversible.

✓ **Exercice 47. (Topologie de l'ensemble des matrices positives)**

1. Étudier la connexité par arcs de $\mathrm{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est une partie dense de $\mathrm{S}_n^{+}(\mathbb{R})$.
3. Montrer que $\mathrm{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ est une partie fermée de $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$.

✓ **Exercice 48. (Matrice de covariance)** Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles discrètes définies sur un même espace probabilisé, ayant un moment d'ordre 2. Montrer que la matrice $M = \left((\operatorname{Cov}(X_i, X_j))\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique positive.

★ **Exercice 49.** Soit $(A, B) \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \times \mathrm{S}_n^{+}(\mathbb{R})$. Montrer que AB est diagonalisable et à valeurs propres dans $\mathbb{R}_+$.

★ **Exercice 50. (Critère de Sylvester)** Soit $A = ((a_{i,j}))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note : $A_k = ((a_{i,j}))_{1 \leqslant i,j \leqslant k} \in \mathrm{M}_k(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A est définie positive si et seulement si : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\det(A_k) > 0$. En déduire que $\mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est une partie ouverte de $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que si $M : [0,1] \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est une application continue à valeurs dans $\mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors la matrice $\displaystyle\int_0^1 M(t)\mathrm{d}t$ est symétrique définie positive.
3. Montrer que la matrice $A = \left(\left(\dfrac{1}{1 + |i - j|}\right)\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est définie positive.

Exercice 51. Soit $A = ((a_{i,j}))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $I \subseteq [\![1, n]\!]$, on note : $A_I = ((a_{i,j}))_{(i,j) \in I}$. Montrer que A est positive si et seulement si : $\forall I \in \mathcal{P}\left([\![1, n]\!]\right)$, $\det(A_I) \geqslant 0$.

✓ **Exercice 52.** Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, u une isométrie vectorielle de E et s un endomorphisme autoadjoint positif de E. Montrer : $\operatorname{tr}(u \circ s) \leqslant \operatorname{tr}(s)$.

★ **Exercice 53.**

1. Montrer : $\forall (A, B) \in \left(\mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})\right)^2$, $(\det(A + B))^{\frac{1}{n}} \geqslant (\det(A))^{\frac{1}{n}} + (\det(B))^{\frac{1}{n}}$.
2. Montrer que le résultat reste vrai si A et B sont symétriques positives.

Exercice 54. Soit $\alpha \in [0,1]$. Montrer : $\forall (A, B) \in \left(\mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})\right)^2$, $\det(\alpha A + (1 - \alpha)B) \geqslant \det(A)^\alpha \det(B)^{1-\alpha}$. Donner le cas d'égalité.

✓ **Exercice 55.** Soit $A \in \mathrm{S}_n^{+}(\mathbb{R})$. Montrer : $(\det(A))^{1/n} \leqslant \dfrac{\operatorname{tr}(A)}{n}$.

Exercice 56. (Théorème de perturbation de Weyl) Soit $(A, B) \in (\mathrm{S}_n(\mathbb{R}))^2$. On note $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ et $\mu_1 \leqslant \cdots \leqslant \mu_n$ les valeurs propres respectives de A et B, avec répétitions éventuelles. On note $|||\cdot|||$ la norme subordonnée à la norme euclidienne usuelle de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $|\lambda_i - \mu_i| \leqslant |||A - B|||$.

Exercice 57. (Décroissance de la fonction inverse) Soit $(A, B) \in \left(\mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})\right)^2$ tel que : $A - B \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que l'on a : $B^{-1} - A^{-1} \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Exercice 58. (Une suite croissante majorée converge) Soit $(A_p)_{p \in \mathbb{N}} \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$. On suppose qu'il existe $A \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall p \in \mathbb{N}$, $A - A_p \in \mathrm{S}_n^{+}(\mathbb{R})$, $A_{p+1} - A_p \in \mathrm{S}_n^{+}(\mathbb{R})$. Montrer que la suite $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge.

Exercice 59. Montrer que l'exponentielle matricielle induit une surjection de $\mathrm{A}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

☢ **Exercice 60.** Montrer que l'exponentielle matricielle induit une bijection de $\mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, de réciproque continue.

Exercice 61. Soit $A : \mathbb{R} \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une application continue telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, la matrice $-(A(t) + A(t)^\top)$ soit symétrique positive. On considère l'équation différentielle $(E) : Y' = AY$.

1. Montrer que si Y_1 et Y_2 sont deux solutions de (E), alors $Y_1^\top Y_2$ a une limite en $+\infty$.
2. Montrer que (E) admet une solution non identiquement nulle et de limite nulle en $+\infty$ si et seulement si : $\lim\limits_{t\to+\infty} \int_0^t \mathrm{tr}(A(s))\mathrm{d}s = -\infty$.

Autres réductions que par relation de similitude

★ **Exercice 62. (Décomposition OS)** Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose A inversible. Montrer qu'il existe un unique couple $(O, S) \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que : $A = OS$.
2. On ne suppose plus que A est inversible. Montrer qu'il existe $(O, S) \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{S}_n^{+}(\mathbb{R})$ tel que : $A = OS$.

★ **Exercice 63. (Théorème de réduction simultanée)** Soit $(A, B) \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \times \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $A = P^\top P$, et : $B = P^\top DP$.

★ **Exercice 64. (Décomposition en valeurs singulières)** Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $(U, V) \in (\mathrm{O}_n(\mathbb{R}))^2$ tel que : $A = UDV$, où D est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les racines carrées des valeurs propres de $A^\top A$.

★ **Exercice 65. (Décomposition de Choleski)** Soit $A \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique matrice $P \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure, à coefficients diagonaux strictement positifs, telle que : $A = P^\top P$.

Réduction d'autres endomorphismes remarquables

Exercice 66. (Matrices unitaires) Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice telle que : $\overline{A}^\top A = A\overline{A}^\top = \mathrm{I}_n$. Montrer que A est diagonalisable et que ses valeurs propres sont des nombres complexes de module 1.

★ **Exercice 67. (Endomorphismes normaux)** Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et f un endomorphisme de E. On dit que f est un endomorphisme *normal* s'il commute avec son adjoint.

1. Montrer que f est normal si et seulement si : $\forall(\vec{x}, \vec{y}) \in E^2$, $\langle f(\vec{x}), f(\vec{y})\rangle = \langle f^*(\vec{x}), f^*(\vec{y})\rangle$, si et seulement si : $\forall\vec{x} \in E$, $\|f(\vec{x})\| = \|f^*(\vec{x})\|$.
2. On suppose que f est normal. Montrer : $\forall\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, $\ker(f^* - \lambda\mathrm{Id}_E) = \ker(f - \lambda\mathrm{Id}_E)$.

Exercice 68. (Réduction des matrices normales sur $\mathbb{C}$) Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que A et $\overline{A}^\top$ commutent. Soient f et g leurs endomorphismes de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ canoniquement associés. On munit $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ du produit scalaire hermitien usuel.

1. Montrer que si λ est une valeur propre de f, alors $\ker\left(f - \lambda\mathrm{Id}_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})}\right)^\perp$ est stable par g.
2. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $D, D' \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ diagonales telles que : $A = PDP^{-1}$, $\overline{A}^\top = PD'P^{-1}$, et : $\overline{P}^\top P = \mathrm{I}_n$ (autrement dit : les colonnes de P forment une base orthonormée pour le produit scalaire hermitien usuel de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$).
3. Réciproquement, si $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ vérifie la conclusion de la question précédente, montrer : $A\overline{A}^\top = \overline{A}^\top A$.

☢ **Exercice 69. (Réduction des endomorphismes normaux)** Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et f un endomorphisme de E commutant avec son adjoint. On pose : $\forall(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

1. On suppose uniquement dans cette question : $\dim(E) = 2$. Montrer que pour toute base orthonormée $\mathcal{B}$ de E, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = M(a, b)$.
2. On suppose que f n'admet pas de valeur propre. Montrer qu'il existe un plan P stable par f et f^* tel que $P^\perp$ soit stable par f^* et f.
3. En déduire qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E et des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_r, a_1, b_1, \ldots, a_s, b_s$ tels que :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \mathbf{0} \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & M(a_1, b_1) & & \\ & & & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & & & M(a_s, b_s) \end{pmatrix}.$$